Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.2, с. 3–45

УДК 519.833
ББК 22.18

УРАВНОВЕШИВАНИЕ КОНФЛИКТОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. II. АНАЛОГ МАКСИМИНА*

Владислав И. Жуковский
МГУ им М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Константин Н. Кудрявцев
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
e-mail: kudrk@mail333.com

Формализуется и устанавливается существование (в смешанных стратегиях) двух видов гарантированных равновесий в бескоалиционной игре при неопределенности. Построен явный вид гарантированного равновесия в математической модели дуополии Курно при учете импорта.

Ключевые слова: максимин, векторные оптимумы по Слейтеру, бескоалиционная игра, неопределенности, смешанные стратегии, равновесие по Нэшу.

1. Введение

В предыдущей статье [14] авторами в качестве решения бескоалиционной игры при неопределенности (БИН) было рассмотрено понятие балансового равновесия, базирующееся на предложенном

* Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00783

В.И. Жуковским в [18, с. 233] подходе (основанном на подходящей модификации понятия седловая точка), использовавшимся им же для различных видов равновесий в [7] и в кооперативных играх [11]. В данной работе предлагается новый подход к формализации гарантированных решений БИН, основанный уже на понятии максимина.

1.1. Однокритериальная задача при неопределенности

Однокритериальную задачу при неопределенности (ОЗН) составляет тройка

$$\langle\, \mathrm{X}_1, \mathrm{Y}, f_1(x_1, y) \,\rangle, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{X}_1 \subseteq \mathbf{R}^{n_1}$ – множество стратегий ЛПР (лица, принимающего решения), $\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество неопределенных факторов y, $f_1(x_1, y)$ – – функция полезности (выигрыша) ЛПР, определенная на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y}$, и которую он стремится возможно увеличить за счет подходящего выбора $x_1 \in \mathrm{X}_1$, учитывая реальность появления любого $y \in \mathrm{Y}$.

Для задачи (1.1) исследование операций предлагает в качестве решения пару $(x_1^g, f_1^g) \in \mathrm{X}_1 \times \mathbf{R}$, введенную Абрахамом Вальдом [32] в 1939 г:

$$f_1^g = \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^g, y). \tag{1.2}$$

Именно, ЛПР рекомендуется применять стратегию x_1^g, тем самым «обеспечивая себе самую большую» гарантию $f_1^g \leqslant f_1(x_1^g, y)\ \forall y \in \mathrm{Y}$ (см. далее замечание 1.1).

1.2. Интерпретация (1.2) «с позиции» двухуровневой иерархической игры

Снова рассматриваем задачу (1.1), но уже как иерархическую игру двух лиц: игрока 1 (ЛПР), формирующего $x_1 \in \mathrm{X}_1$, и игрока 2, выбирающего $y \in \mathrm{Y}$. Предполагаем, что в такой игре фиксирована последовательность ходов следующего вида [2, с. 79]. Пусть игрок 1 обладает приоритетом в действиях по отношению к игроку 2 – такая игра с правом первого хода у игрока 1 описывает, например, взаимодействия участников конфликта в двухуровневой иерархической системе с одним игроком на каждом уровне иерархии. Предполагаем, что принцип выбора «хороших» стратегий игрока 2 состоит в том, что в ситуации, где исход зависит только от его выбора, он всегда минимизирует функцию $f_1(x_1, y)$. А игроку 1 известен этот принцип.

Тогда игрок 1 может воспользоваться правом *первого хода*, состоящего в том, что он сообщает игроку 2 свою стратегию $x_1 \in \mathrm{X}_1$. Второй ход за игроком 2 – он состоит в формировании контрстратегии $y(x_1) : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Y}$, минимизирующей функцию $f_1(x_1, y(x_1))$ при каждом $x_1 \in \mathrm{X}_1$. Если этот минимум достигается при каждом x_1 только лишь в одной точке $y(x_1)$, то наилучший (гарантированный) результат игрока 1 будет

$$f_1^g = \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) = \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, y(x_1)) = \\ = f_1(x_1^g, y(x_1^g)) = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^g, y).$$

Порядок ходов ЛПР и игрока 2 представлен на рис. 1.

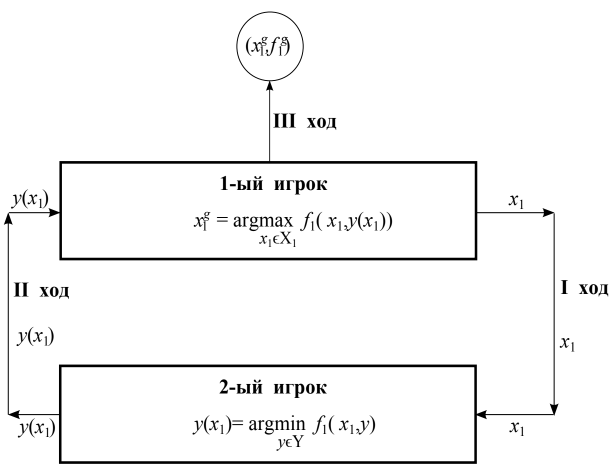

Рисунок 1. Иерархия в максимине

В результате ЛПР предлагается использовать (в качестве решения) максиминную стратегию x_1^g, обеспечивающую ему «самый хороший» гарантированный выигрыш

$$f_1^g \leqslant f(x_1^g, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y}.$$

Причем этот выигрыш будет наибольшим среди всех (для $\forall\, x_1 \in \mathrm{X}_1$) остальных гарантированных выигрышей

$$f_1(x_1, y(x_1)) = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) \leqslant f_1(x_1, y) \quad \forall\, x_1 \in \mathrm{X}_1.$$

Замечание 1.1. Приведенная операция построения $y(x_1) : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{Y}$ соответствует нахождению *внутреннего минимума*

$$f_1(x_1, y(x_1)) = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) \quad \forall x_1 \in \mathrm{X}_1$$

в определении максимина (1.2), а формирование x_1^g с помощью

$$f_1(x^g, y(x_1^g) = \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, y(x_1))$$

отвечает операции *внешнего максимума* в (1.2). Именно перенос этих операций (взятия внутреннего минимума и внешнего максимума) на БИН и составляет основу определения двух предлагаемых далее понятий гарантированного равновесия.

1.3. Недостаток балансового равновесия как решения бескоалиционной игры при неопределенности (БИН)

В предыдущей статье авторов [14] рассмотрена БИН вида

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \mathrm{Y}, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{N} = \{1, \ldots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков,
$\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество чистых стратегий x_i игрока i,
$\mathrm{X} = \prod\limits_{i \in \mathbf{N}} \mathrm{X}_i$ – множество ситуаций $x = (x_1, \ldots, x_N)$,
$\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество чистых неопределенностей y,
$f_i(x, y)$ – определенная на $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ функция выигрыша i-го игрока. Для (1.3) на основе подходящей модификации седловой точки формализовано понятие первого вида гарантированного решения БИН (см. определение 2.1 из [14]), названного балансовым равновесием.

Там же в заключение статьи упоминалось о негативной стороне этого понятия. «Корень» негативного свойства балансового равновесия в том, что согласно требованию 1^o определения 2.1 ситуация $\bar{x}^e \in \mathrm{X}$ будет равновесной по Нэшу, если

$$\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i(\bar{x}^e \| x_i, y_S) = f_i(\bar{x}^e, y_S), \tag{1.4}$$

где неопределенность y_S – «заморожена». На самом деле уже в самой постановке задачи постулируется, что неопределенность y может принимать *любые значения* из Y и ориентация на появление среди них конкретной y_S весьма и весьма призрачна (заметим, что равенства вида (1.4) совсем не обязательно выполнены для других $y \neq \bar{y}_S$). Если же в игре (1.3) реализуется $y \in \mathrm{Y}$, $y \neq y_S$, то свойство равновесности по Нэшу ситуации x^e вообще говоря «теряется», а сама ситуация x^e доставляет векторную гарантию $\bar{f}^S = f(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$, только если все игроки придерживаются своих стратегий из ситуации x^e (не отклоняются от x^e ни при каких условиях). Однако в «защиту» гарантированного по Слейтеру балансового равновесия в [14] приведен целый ряд существенных достоинств и в некоторых случаях (например, при «разделенных» по x и y функциях выигрыша) это понятие становится полезным в практических задачах. Наконец, снять указанное негативное свойство позволяет использование в качестве решений БИН сильно гарантированного равновесия и гарантированного по Слейтеру равновесия, которым посвящены разделы 2 и 3 соответственно.

2. Сильно гарантированное равновесие

Предлагается, на наш взгляд, самое очевидное из приведенных в [14] и здесь трех понятий гарантированного решения бескоалиционной игры при неопределенности.

2.1. Формализация

Рассмотрим бескоалиционную игру при учете неопределенностей и условии возможной *информационной дискриминации* игроков:

$$\Gamma = \langle \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle. \tag{2.1}$$

В (2.1)
$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков,
$\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество чистых стратегий x_i у i-го игрока, набор $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X} = \prod \mathrm{X}_i$ называется *ситуацией* игры Γ,
$\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество неопределенных факторов y,
Y^{X} – множество функций $y(x)$, заданных на X со значениями в Y, m-вектор–функции $y(x)$ назовем *неопределенностями в игре* (2.1),
$f_i(x, y) = f_i(x, y(x))$ – функция выигрыша i-го игрока ($i \in \mathbf{N}$).

Партия игры разыгрывается следующим образом. Игроки одновременно (и не имея возможности объединяться в коалиции) выбирают каждый свою стратегию $x_i \in \mathrm{X}$ ($i \in \mathbf{N}$). В результате образуется ситуация игры Γ – упорядоченный набор стратегий $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_N$. Предполагаем *информационную дискриминацию* игроков и *дополнительную «информированность» неопределенности.* Именно, по аналогии с иерархическими играми (см. раздел 1.2) первый ход за игроками: они выбирают свои стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ и сообщают об этом ЛПР, «ведающему» построением неопределенностей. Второй ход за указанным ЛПР – он формирует N неопределенностей в виде непрерывных на X m-вектор–функций $y^{(i)}(x)$ ($i \in \mathbf{N}$) и сообщает о своем выборе всем N игрокам. При этом предполагается, что неопределенности формируются таким образом, чтобы «максимально испортить» выигрыши отдельно каждому из N игроков. Игроки, используя эту информацию выбирают ситуацию $x^e \in \mathrm{X}$, доставляющую «хороший» выигрыш (например, равновесный по Нэшу) каждому i-му игроку $f_i(x^e, y(x^e))$ ($i \in \mathbf{N}$). А затем из всего множества таких «хороших» ситуаций выбирают максимальную по Слейтеру $\bar{x}^e$. Дело здесь в том, что, как показано в примере 2.1 из [14], множество ситуаций равновесия по Нэшу $\{x^e\}$ *внутренне не устойчиво*: могут существовать две ситуации $x^{(j)} \in \{x^e\}$ ($j = 1, 2$), такие что $f_i[x^{(1)}] > f_i[x^{(2)}]$ ($i \in \mathbf{N}$). Как раз «избавиться» от этого недостатка и позволяет максимальность по Слейтеру $\bar{x}^e$. Такая иерархическая процедура принятия решения наглядно представлена на рис. 2. Заметим, что, для доказательства существования выбранных «хороших» решений – ситуаций в игре (2.1), иногда вместо чистых стратегий игроков приходится использовать смешанные. Как раз такой подход и применяется в этом и следующем разделах.

Напомним, что гарантированное решение (x_1^g, f_1^g) однокритериальной задачи

$$\langle \mathrm{X}_1, \mathrm{Y}, f_1(x_1, y) \rangle$$

определяется цепочкой равенств

$$f_1^g \;=\; \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) \;=\; \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^g, y)$$

и сводится сначала к операции построения *внутреннего минимума*

$$y(x_1) = \arg\min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y),$$

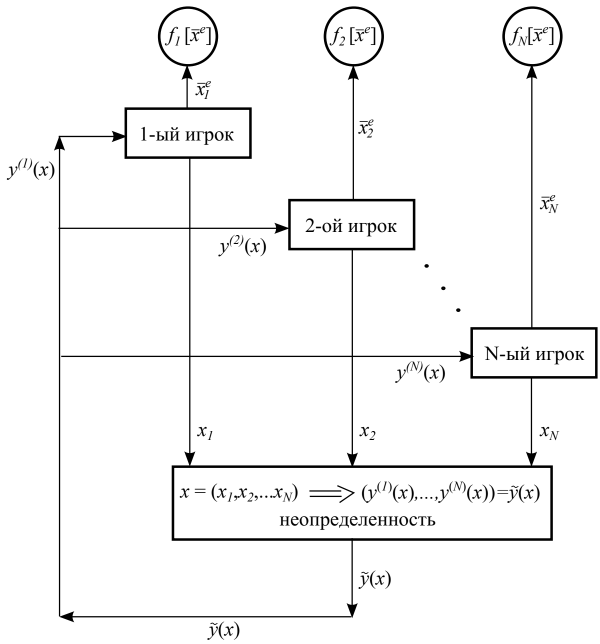

Рисунок 2. Принятие решения в БИН (2.1)

а затем к операции нахождения *внешнего максимума*

$$x_1^g \; = \; \arg\max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, y(x_1)), \quad f_1^g \; = \; f_1(x_1^g, y(x_1^g)).$$

Уточним «экстремальный смысл» приведенных двух понятий.

Во-первых, из $f_1^g = \min\limits_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^g, y)$ следует

$$f_1^g \; \leqslant \; f_1(x_1^g, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y},$$

то есть ЛПР, используя стратегию x_1^g, «обеспечит себе» исход f_1^g при любых неопределенностях $y \in \mathrm{Y}$.

Во-вторых, из $f_1[x_1] = \min\limits_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y) = f_1(x_1, y(x_1))$ получаем, что, выбирая любое $x_1 \in \mathrm{X}_1$, ЛПР гарантирует себе исход (гарантию)

$$f_1[x_1] \; \leqslant \; f_1(x_1, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y},$$

а гарантия f_1^g будет *самой большой*, ибо

$$f_1^g \; = \; f_1(x_1^g, y(x_1^g)) \; \geqslant \; f_1[x_1] \; = \; f_1(x_1, y(x_1)) \quad \forall x_1 \in \mathrm{X}_1.$$

На модификации перечисленных двух свойств максимина и основывается предлагаемое здесь определение сильно гарантированного решения уже для игры (2.1). Модификация в том, что вместо операции внутреннего минимума используются N скалярных минимумов

$$\min_{y\in \mathrm{Y}} f_i(x,y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \ \ \forall x \in \mathrm{X} \ \ (i \in \mathbf{N}),$$

а вместо операции внешнего максимума используется концепция равновесности по Нэшу

$$\max_{x_i\in \mathrm{X}_i} f_i[x^e||x_i] = f_i[x^e] \ \ (i\in \mathbf{N})$$

(с обозначением $[x^e||x_i] = [x_1^e, \ldots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \ldots, x_N^e]$).

Саму формализацию сильно гарантированного (по Слейтеру) равновесия проведем в три этапа:

Этап 1. Каждой ситуации $x\in\mathrm{X}$ и каждому игроку $i\in\mathbf{N}$ поставим в соответствие единственную непрерывную на X вектор–функцию $y^{(i)}(x)$ такую, что

$$f_i(x, y^{(i)}(x)) = \min_{y\in\mathrm{Y}} f_i(x,y) = f_i[x] \quad (i\in\mathbf{N}). \tag{2.2}$$

Этап 2. Игре (2.1) сопоставим бескоалиционную игру N лиц (без неопределенностей), названную нами «игрой гарантий»,

$$\langle \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbf{N}}\rangle, \tag{2.3}$$

и найдем для нее ситуацию равновесия по Нэшу $x^e \in \mathrm{X}$; напомним, что такие ситуации определяются равенствами

$$\max_{x_i\in\mathrm{X}_i} f_i[x^e||\, x_i] = f_i[x^e] \quad (i\in\mathbf{N}). \tag{2.4}$$

Этап 3. Среди множества всех ситуаций равновесия по Нэшу $\{x^e\}$ выбрать максимальное $\bar{x}^e$ («в векторном смысле»), то есть найти, например, максимальную по Слейтеру альтернативу $\bar{x}^e$ в N-критериальной задаче

$$\langle\ \{x^e\}, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbf{N}}\ \rangle.$$

В случае максимума по Слейтеру достаточно здесь определить $\bar{x}^e$ из условия [26, с. 68-69]

$$\max_{x\in\{x^e\}} \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i f_i[x] \ = \ \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i \bar{f}_i[\bar{x}^e],$$

где все постоянные $\alpha_i \geqslant 0$ $(i \in \mathbf{N}) \ \wedge \ \sum\limits_{i \in \mathbf{N}} \alpha_i > 0$.

Наконец, в заключение строим N-вектор

$$\bar{f}[\bar{x}^e] = \left(\bar{f}_1[\bar{x}^e], \ldots, \bar{f}_N[\bar{x}^e]\right).$$

Полученную в результате пару $(\bar{x}^e, \bar{f}[\bar{x}^e]) \in \mathrm{X} \times \mathbf{R}^N$ назовем *сильно гарантированным (по Слейтеру) равновесием* игры (2.1), при этом $\bar{x}^e$ есть *сильно гарантирующая равновесная ситуация* игры (2.1), а $\bar{f}_i[\bar{x}^e]$ *сильно гарантированный выигрыш игрока* $i \in \mathbf{N}$.

«Игровой смысл» предлагаемого решения состоит в следующем. Если игроки выбрали стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ $(i \in \mathbf{N})$, образующие ситуацию $x = (x_1, \ldots, x_N)$, то каждый i-ый из них «обеспечивает» себе выигрыш $f_i(x, y)$, не меньший $f_i[x]$ из (2.2), при реализации любых неопределенностей $y \in \mathrm{Y}$ (данный факт следует из последнего равенства в (2.2), представленного в виде

$$f_i[x] \ \leqslant \ f_i(x, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y},$$

то есть $f_i[x]$ есть гарантия для игрока i при использовании всеми игроками своих стратегий из ситуации $x \in \mathrm{X}$ и появлении (независимо от их выбора) любой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$.

Далее, согласно этапу 2 (из определения), вместо игры при неопределенности (2.1) рассматривается «игра гарантий» (2.3), (2.2) (без неопределенностей), в которой «роль» функций выигрыша игроков «выполняют» уже их гарантии $f_i[x]$ $(i \in \mathbf{N})$, а ситуация равновесия (по Нэшу) для игры (2.3) определяется с помощью того же принципа равновесности, но примененного уже к «новым» функциям выигрыша, именно, к гарантиям $f_i[x]$ $(i \in \mathbf{N})$ функций выигрыша $f_i(x, y)$.

Устойчивость введенного сильно гарантированного равновесия в том, что при выборе игроками своих стратегий из ситуации $x^e = (x_1^e, \ldots, x_N^e)$ участники конфликта,

во-первых, «обеспечивают» себе (при любых неопределенностях $y \in \mathrm{Y}$) выигрыши $f_i(x^e, y) \geqslant f_i[x^e] = f_i^e$ $(i \in \mathbf{N})$ (которые не меньше их гарантий);

во-вторых, при отклонении, например, первого игрока от x_1^e (то есть выбрав стратегию $\tilde{x}_1 \in \mathrm{X}$ и $\tilde{x}_1 \neq x_1^e$) этот игрок «обеспечит себе» выигрыш $f_1(x^e || \tilde{x}_1, y)$, у которого гарантия $f_1[x^e || \tilde{x}_1]$ не превосходит гарантию $f_1[x^e]$ в ситуации равновесия x^e (игра при неопределенности (2.1) оценивается игрой (2.3) – «игрой гарантий»).

2.2. Существование

Далее для сокращения записей ограничимся игрой (2.1) только двух лиц, то есть в (2.1) $\mathbf{N} = \{1, 2\}$.

Пусть множества X_i $(i = 1, 2)$ суть компакты. Определим борелевскую σ-алгебру подмножеств множества X_i (подробно об этом в [14]) и в качестве расширения множества (чистых) стратегий $x_i \in \mathrm{X}_i$ игрока i будем рассматривать его смешанные стратегии $\mu_i(\cdot)$ – вероятностные меры на компакте X_i, то есть неотрицательные скалярные функции множеств $\mu_i(\cdot)$, заданных на борелевской σ-алгебре подмножеств множества X_i (на σ-алгебре борелевских подмножеств компакта X_i), счетно аддитивные и нормированные на X_i единицей. Множество смешанных стратегий игрока i обозначим через $\{\mu_i\}$ $(i = 1, 2)$. Заметим, что мера вида $\delta(x_i - x_i^*)(dx_i)$, где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака, также является смешанной стратегией игрока i. Меры–произведения $\mu(dx_1, dx_2)$, понимаемые в соответствии с определениями [24, с. 271] и обозначениями [20, с. 284]

$$\mu(dx_1, dx_2) \;=\; \mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2),$$

также являются вероятностными мерами на произведении компактов $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. Напомним, что при построении меры–произведения $\mu(dx_1, dx_2)$ в качестве σ-алгебры подмножеств множества $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ выбирается наименьшая борелевская σ-алгебра, содержащая все произведения $Q_1 \times Q_2$, где Q_i – элемент борелевской σ-алгебры подмножеств компакта X_i $(i = 1, 2)$.

Если функции выигрыша $f_i[x_1, x_2]$ непрерывны на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, то можно определить следующие интегралы (математические ожидания)

$$f_i[\mu_1, x_2] = \int\limits_{\mathrm{X}_1} f_i[x_1, x_2]\mu_1(dx_1), \qquad f_i[x_1, \mu_2] = \int\limits_{\mathrm{X}_2} f_i[x_1, x_2]\mu_2(dx_2).$$

Так как функции $f_i[x_1, x_2]$ непрерывны на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, то [5, с. 113] интегралы $f_i[\mu_1, x_2]$ и $f_i[x_1, \mu_2]$ являются также непрерывными функционалами на X_2 и X_1 соответственно. Тогда существуют и двойные интегралы

$$f_i[\mu_1,\mu_2]=\int\limits_{X_2} f_i[\mu_1,x_2]\mu_2(dx_2)=\int\limits_{X_2}\int\limits_{X_1} f_i[x_1,x_2]\mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2),$$

$$\int\limits_{X_1} f_i[x_1,\mu_2]\mu_1(dx_1)=\int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} f_i[x_1,x_2]\mu_2(dx_2)\mu_1(dx_1),$$

кроме того (по теореме Фубини) эти интегралы равны.

Перейдем теперь к смешанному расширению игры (2.3) при $\mathbf{N} = \{1,2\}$, именно, к бескоалиционной игре

$$\tilde{\Gamma}_2=\langle\{1,2\},\{\mu_i\}_{i=1,2},\{f_i[\mu_1,\mu_2]\}_{i=1,2}\rangle,$$

где $\{\mu_i\}$ – множество смешанных стратегий i-го игрока $\mu_i(\cdot)$, которые являются вероятностными мерами на компакте X_i, математическое ожидание

$$f_i[\mu_1,\mu_2] \;=\int\limits_{X_1\times X_2} f_i[x_1,x_2]\mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$$

есть *смешанное расширение функции выигрыша* $f_i[x_1,x_2]$ $(i=1,2)$.

Пара смешанных стратегий $(\mu_1^e(\cdot),\mu_2^e(\cdot))\in\{\mu_1\}\times\{\mu_2\}$ образует *ситуацию равновесия* (по Нэшу) *в игре* $\tilde{\Gamma}_2$, если

$$\begin{aligned} f_1[\mu_1,\mu_2^e]&\leqslant f_1[\mu_1^e,\mu_2^e] \quad \forall\mu_1(\cdot)\in\{\mu_1\},\\ f_2[\mu_1^e,\mu_2]&\leqslant f_2[\mu_1^e,\mu_2^e] \quad \forall\mu_2(\cdot)\in\{\mu_2\}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, что множество выигрышей $f[\mu^e]=(f_1[\mu^e],f_2[\mu^e])$ на множестве всех ситуаций равновесия по Нэшу $\{\mu^e(\cdot)=\mu_1^e(\cdot)\mu_2^e(\cdot)\}$ является компактом в $\mathbf{R}^2$ (что следует из доказанного ниже утверждения 2.1).

Согласно [4, с. 117-119]: *если в игре* $\tilde{\Gamma}_2$ *функции выигрыша* $f_i[x_1,x_2]$ *непрерывны на* $X_1\times X_2$*, а множества* X_i *суть компакты* $(i=1,2)$*, то в игре* $\tilde{\Gamma}_2$ *существует ситуация равновесия* $(\mu_1^e(\cdot),\mu_2^e(\cdot))\in\{\mu_1\}\times\times\{\mu_2\}$.

Эту ситуацию называют иногда *ситуацией равновесия в смешанных стратегиях для игры* (2.3)*, где* $\mathbf{N}=\{1,2\}$.

Утверждение 2.1. *Если в игре* (2.3) (*при* $\mathbf{N}=\{1,2\}$) *множества* X_i $(i=1,2)$ *суть компакты, а* $f_i[x_1,x_2]$ *непрерывны на* $X_1\times X_2$, *то множество равновесных выигрышей* $\mathcal{F}^e = \{f_1[\mu_1^e, \mu_2^e], f_2[\mu_1^e, \mu_2^e]\}$ *в игре* $\tilde{\Gamma}_2$ *является непустым компактом (то есть замкнутым и ограниченным подмножеством в* $\mathbf{R}^2$*).*

Доказательство. Из известных свойств вероятностных мер [6, с. 288; 24, с. 254] вытекает, что множество всех возможных мер–произведений вида $\mu(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$ является множеством *слабо замкнутым и слабо компактным в себе* [24, с. 212,254; 27, с. 48,49]. Это означает, что из всякой последовательности

$$\{\mu^{(k)}(dx) = \mu_1^{(k)}(dx_1)\mu_2^{(k)}(dx_2)\} \ \ (k = 1, 2, \ldots)$$

можно выбрать подпоследовательность

$$\{\mu^{(k_j)}(dx) = \mu_1^{(k_j)}(dx_1)\mu_2^{(k_j)}(dx_2)\} \ \ (j = 1, 2, \ldots),$$

которая *сходится слабо* [24, с. 212,254; 19, с. 199] к функции $\mu(\cdot) \in \in \{\mu\}$, то есть при всяком выборе непрерывной на X скалярной функции $\varphi[x_1, x_2]$ будет выполняться предельное равенство

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi[x_1, x_2]\mu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_{\mathrm{X}} \varphi[x_1, x_2]\mu(dx).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^e$ – множество ситуаций равновесия $\mu^e(dx) = = \mu_1^e(dx_1)\mu_2^e(dx_2)$ (определенных соотношениями (2.5)). Множество $\mathfrak{M}^e \neq \emptyset$ вследствие [4, с. 117-119]. Возьмем теперь произвольную бесконечную последовательность таких ситуаций равновесия $\mu^{(k)}(\cdot) \in \in \mathfrak{M}^e$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Из указанной выше слабой компактности в себе множества вероятностных мер, найдется подпоследовательность мер $\mu^{(k_j)}(\cdot) \in \mathfrak{M}^e$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и вероятностная мера $\mu^{(o)}(\cdot) \in \{\mu\}$ такие, что для непрерывной на X функции $f_i[x] = f_i[x_1, x_2]$ будет

$$\lim_{j\to\infty} f_i[\mu^{(k_j)}] = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathrm{X}} f_i[x]\mu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i[x]\mu^{(o)}(dx) = f_i[\mu^{(o)}].$$

Докажем, что «предельная» мера $\mu^{(o)}(\cdot) = \mu_1^{(o)}(\cdot)\mu_2^{(o)}(\cdot)$ также является ситуацией равновесия, то есть

$$\begin{aligned} f_1[\mu_1, \mu_2^{(o)}] &\leqslant f_1[\mu^{(o)}] \quad \forall \mu_1(\cdot) \in \{\mu_1\}, \\ f_2[\mu_1^{(o)}, \mu_2] &\leqslant f_2[\mu^{(o)}] \quad \forall \mu_2(\cdot) \in \{\mu_2\}. \end{aligned}$$

Предположим противное. Тогда либо существует мера $\bar{\mu}_1(\cdot) \in \{\mu_1\}$, либо $\bar{\mu}_2(\cdot) \in \{\mu_2\}$ такие, что соответственно

$$f_1[\bar{\mu}_1, \mu_2^{(o)}] > f_1[\mu^{(o)}], \quad f_2[\mu_1^{(o)}, \bar{\mu}_2] > f_2[\mu^{(o)}].$$

Пусть, например, имеет место

$$f_1[\bar{\mu}_1, \mu_2^{(o)}] > f_1[\mu^{(o)}]$$

или

$$\int\limits_{\mathrm{X}} f_1[x]\bar{\mu}_1(dx_1)\mu_2^{(o)}(dx_2) > \int\limits_{\mathrm{X}} f_1[x]\mu^{(o)}(dx).$$

Но тогда при «достаточно больших» j будет

$$\int\limits_{\mathrm{X}} f_1[x]\bar{\mu}_1(dx_1)\mu_2^{(k_j)}(dx_2) > \int\limits_{\mathrm{X}} f_1[x]\mu^{(k_j)}(dx),$$

что противоречит включению $\mu^{(k_j)}(\cdot) \in \mathfrak{M}^e$, то есть равновесности (по Нэшу) каждой ситуации в смешанных стратегиях $\mu^{(k_j)}(\cdot) \in \mathfrak{M}^e$ в игре $\widetilde{\Gamma}_2$. Отсюда сразу получаем компактность в $\mathbf{R}^2$ множества $\mathcal{F}^e = \{f_1[\mu^e], f_2[\mu^e] \mid \forall \mu^e(\cdot) \in \mathfrak{M}^e\}$. □

Перейдем к определению сильно гарантированного равновесия для этой игры в смешанных стратегиях, используя приведенные выше этапы 1–3.

Итак, пусть в игре (2.1), где $N = 2$, множества X_i $(i = 1, 2)$ и Y суть компакты, а функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ $(i = 1, 2)$ непрерывны на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \mathrm{Y}$.

Четверку $(\bar{\mu}_1^e(\cdot), \bar{\mu}_2^e(\cdot), \bar{f}_1^e, \bar{f}_2^e) \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\} \times \mathbf{R}^2$ назовем *сильно гарантированным равновесием* (по Нэшу) *игры* (2.1) (*при* $N = 2$) *в смешанных стратегиях*, если существуют единственные для каждого i непрерывные m-вектор–функции $y^{(i)}(x) : \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \to \mathrm{Y}$ $(i = 1, 2)$ такие, что для функции $f_i[\mu_1, \mu_2]$ $(i = 1, 2)$ имеют место неравенства (2.5), а мера–произведение $\bar{\mu}^e(\cdot) = \bar{\mu}_1^e(\cdot)\bar{\mu}_2^e(\cdot)$ реализует максимум по Слейтеру в двухкритериальной задаче

$$\langle \{\mu^e\}, \{f_i[\mu]\}_{i=1,2} \rangle.$$

Здесь $f_i[\mu] = f_i[\mu_1, \mu_2] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i[x]\mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2)$, $f_i[x] = f_i(x, y^{(i)}(x)) = \min\limits_y f_i(x, y)$, смешанная стратегия i-го игрока $\bar{\mu}_i^e(\cdot) \in \{\mu_i\}$, его гарантированный выигрыш $\bar{f}_i^e = \bar{f}_i[\mu_1^e, \mu_2^e]$ $(i = 1, 2)$.

Теорема 2.1. *Пусть в бескоалиционной игре двух лиц при неопределенности*

$$\Gamma_2 = \langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x_1,x_2,y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

1^0) *множество* $\mathrm{X}_i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ *чистых стратегий* x_i *для* i*-го игрока есть компакт* ($i = 1,2$), *а множество* $\mathrm{Y} \subset \mathbf{R}^m$ *неопределенных факторов* y *суть выпуклый компакт;*

2^0) *функция* $f_i(x,y)$ *у* i*-го игрока* ($i = 1,2$) *непрерывна на произведении* $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \mathrm{Y}$ *и строго выпукла по* $y \in \mathrm{Y}$ *при каждом* $(x_1,x_2) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$.

Тогда в игре Γ_2 *существует сильно гарантированное равновесие в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Согласно компактности X_i ($i = 1,2$) и Y, выпуклости Y, а также из непрерывности $f_i(x_1,x_2,y)$ на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \mathrm{Y}$ и строгой выпуклости этих функций по $y \in \mathrm{Y}$ при каждом $x = (x_1,x_2) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, получаем (из [1, с. 54]) существование двух непрерывных на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ m-вектор–функций $y^{(i)}(x_1,x_2)$ таких, что

$$\min_{y \in \mathrm{Y}} f_i(x_1,x_2,y) = f_i(x_1,x_2,y^{(i)}(x_1,x_2)) = f_i[x_1,x_2] \quad (i = 1,2)$$

при любых $(x_1,x_2) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. Функции

$$f_i(x_1,x_2,y^{(i)}(x_1,x_2)) = f_i[x_1,x_2] \quad (i = 1,2)$$

непрерывны на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ (как суперпозиции непрерывных функций $f_i(x_1,x_2,y)$ и $y = y^{(i)}(x_1,x_2)$).

Составим затем бескоалиционную игру двух лиц – «игру гарантий» [8-10]

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x_1,x_2]\}_{i=1,2} \rangle. \tag{2.6}$$

В ней, как установлено выше, функция выигрыша i-го игрока $f_i[x_1,x_2]$ ($i = 1,2$) непрерывна на произведении компактов $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. Тогда, по [4, с. 117-119], существует ситуация равновесия $(\mu_1^e(\cdot),\mu_2^e(\cdot)) \in \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\}$ в смешанных стратегиях (для этой ситуации имеют место неравенства (2.5)). Затем следует построить пару

$$f_i[\mu^e] = f_i[\mu_1^e,\mu_2^e] = \int\limits_{\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2} f_i[x_1,x_2]\mu_1^e(dx_1)\mu_2^e(dx_2) \quad (i = 1,2),$$

как упоминалось выше, множество $\{f_i[\mu^e]{=}f_i[\mu_1^e, \mu_2^e]\}$ образует (утверждение 2.1) компакт в $\mathbf{R}^2$ [31,33,34], причем $\mathfrak{M}^e$ множество ситуаций равновесия по Нэшу $\mu^e(\cdot){=}\mu_1^e(\cdot)\mu_2^e(\cdot)$ (для каждой из них справедливы неравенства (2.5)). Этот компакт не пуст вследствие [4, с. 117-119]. Обозначим его через $\mathcal{F}^e$. На построенном компакте $\mathcal{F}^e$ определим [12,13] непрерывную функцию $\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i f_i$ (где $\alpha_i = const > 0$, $i \in \mathbf{N} = \{1,2\}$). По теореме Вейерштрасса существует вектор $\bar{f}^e = (\bar{f}_1^e, \bar{f}_2^e) \in \mathcal{F}^e$ такой, что

$$\max_{f\in\mathcal{F}^e}\sum_{i=1}^{2}\alpha_i f_i = \sum_{i=1}^{2}\alpha_i \bar{f}_i^e,$$

а затем найдем меру–произведение $\bar{\mu}^e(\cdot) = \bar{\mu}_1^e(\cdot)\bar{\mu}_2^e(\cdot)$ исходя из равенств $\bar{f}_i^e = f_i[\bar{\mu}^e]$ $(i = 1,2)$.

Полученная в результате тройка $(\bar{\mu}^e(\cdot), \bar{f}_1^e, \bar{f}_2^e)$ как раз и является (согласно определению) сильно гарантированным равновесием в смешанных стратегиях для игры (2.1), где $\mathbf{N} = \{1,2\}$. $\square$

Замечание 2.1. *Во-первых*, требования теоремы 2.1 можно значительно ослабить, потребовав лишь компактности X_i $(i{=}1,2)$, Y и непрерывности $f_i(x,y)$ на $\mathrm{X}_1{\times}\mathrm{X}_2{\times}\mathrm{Y}$ (смотри установленную далее теорему 3.1). Сама теорема 2.1 помещена здесь лишь потому, что в ней впервые акцентирован метод доказательства теорем существования гарантированных равновесий.

Во-вторых, теорема 2.1 сразу обобщается на случай игры $N > 2$ лиц. Здесь уже в определении сильно гарантированного равновесия вектор $f[x] = (f_1[x], \ldots, f_N[x])$ является векторной гарантией, ибо для каждого $x \in \mathrm{X}$ и при $\forall\, y \in \mathrm{Y}$ значение $f_i(x,y)$ не может стать меньше $f_i[x]$ $(i \in \mathbf{N})$ (согласно (2.2)). Причем эта векторная гарантия самая «нижняя» из всех других векторных гарантий $f^S[x]$ (гарантий по Слейтеру – см. раздел 3), ибо $f_i^S[x] \geqslant f_i[x]$ $\forall\, x \in \mathrm{X}$, $i \in \mathbf{N}$ (здесь $f^S[x] = f(x, y_S(x))$ и $y_S(x)$ реализует минимум по Слейтеру в N-критериальной задаче $\langle \mathrm{Y}, f(x,y)\rangle$ при каждом «замороженном» $x \in \mathrm{X}$). Этим фактом как раз и вызван термин «сильно» гарантированное равновесие. Следует однако иметь в виду, что игроки стремятся к возможно *бóльшим* гарантиям.

Замечание 2.2. Остановимся еще раз на «игровом смысле» и достоинствах определения сильно гарантированного равновесия – они состоят в следующем.

Во-первых, согласно требованию (2.2) с каждой ситуацией $x \in \mathrm{X}$ связывается векторная гарантия $f[x] = (f_1[x], \ldots, f_N[x])$, ибо в силу $f_i(x, y) \geqslant f_i[x]$ $\forall y \in \mathrm{Y}$ $(i \in \mathbf{N})$ выигрыши $f_i(x, y)$ не могут стать меньше $f_i[x]$ $(i \in \mathbf{N})$ для всех $y \in \mathrm{Y}$. Действительно выбором своей стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ игрок i «обеспечит себе» выигрыш $f_i(x, y)$ не меньший $f_i[x]$ какая бы неопределенность $y \in \mathrm{Y}$ не реализовалась. Таким образом, переход к одной и той же для всех $y \in \mathrm{Y}$ игре гарантий (2.3) позволяет игрокам «забыть о неопределенности» и руководствоваться лишь увеличением своей гарантии (которая, подчеркнем особо, зависит только от выбранной игроками ситуации x).

Во-вторых, стремление возможно увеличить «свою гарантию» $f_i[x]$ для игрока $i \in \mathbf{N}$ приводит также к построению равновесной по Нэшу ситуации (аналога внешнего максимума в бескоалиционной «игре гарантий» (2.3)). Ситуация x^e, благодаря «нэшевости» приобретает свойство устойчивости к отклонению от $x^e = (x_1^e, \ldots, x_N^e)$ отдельного (только одного!) игрока. В самом деле, если, например игрок 1, отклонился от x_1^e выбрав $x_1 \neq x_1^e$, то его гарантия $f_1[x^e \| x_1]$ в ситуации $[x^e \| x_1] = [x_1, x_2^e, \ldots, x_N^e]$ не может (в силу (2.4)) стать больше $f_1[x^e]$, но может и уменьшится (а ведь каждый игрок стремится к возможно большим гарантиям!). Таким образом «нэшевость» x^e, в отличии от балансовых равновесий из [14], сохраняется при всех неопределенностях $y \in \mathrm{Y}$ (подчеркнем еще раз, что гарантии $f_i[x]$ от y не зависят).

В-третьих, множество ситуаций равновесия по Нэшу $\{x^e\} = \mathrm{X}^e$ игры (2.3) *внутренне неустойчиво* (см. пример 2.1 из [14]). Избежать эту неприятность позволяет максимальность по Слейтеру выбранной в качестве решения $\bar{x}^e$.

Тогда под сильно гарантированным равновесием $(\bar{x}^e, \bar{f}^e)$ в БИН (2.1) предлагается понимать пару $(\bar{x}^e, f[\bar{x}^e])$ ситуацию равновесия по Нэшу в игре гарантий, которую игрокам желательно использовать, и векторную гарантию $f[\bar{x}^e]$, которая обеспечивается игрокам при таком действии.

Замечание 2.3. Как уже следует из замечания 2.2, аналогом операции внутреннего минимума в определении максимина является требование этапа 1 из понятия сильно гарантированного равновесия. Этапы 2 и 3 этого определения соответствуют операции внешнего максимума (в понятии максимина). Действительно, покажем, что каждая векторная гарантия в чистых стратегиях

$$f[x] \;=\; (f_1(x, y^{(1)}(x)) = f_1[x], \ldots, f_N(x, y^{(N)}(x)) = f_N[x])$$

порождает векторную гарантию

$$f[\mu] \;=\; (f_1[\mu], \ldots, f_N[\mu])$$

в смешанных стратегиях, где

$$f_i[\mu] \;=\; \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y^{(i)}(x))\mu(dx), \quad i \in \mathbf{N}.$$

В самом деле, из (2.2) для каждого $x \in \mathrm{X}$ следует N неравенств

$$f_i[x] \;\leqslant\; f_i(x, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y}.$$

Интегрируя затем обе части этих неравенств с произвольной ситуацией $\mu(\cdot)$ (в смешанных стратегиях) в качестве интегрируемой меры, получаем

$$f_i[\mu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y^{(i)}(x))\mu(dx) \leqslant \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y)\mu(dx) = f_i[\mu, y] \quad \forall y \in \mathrm{Y}\ (i \in \mathbf{N}),$$

или, что эквивалентно: любая ситуация $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ в смешанных стратегиях игры

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mu_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \mathrm{Y}, \{f_i[\mu, y]\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle$$

порождает векторную гарантию $f[\mu] = (f_1[\mu], \ldots, f_N[\mu])$ (ибо при любых $y \in \mathrm{Y}$ не могут стать выигрыши $f_i[\mu, y]$ меньше соответствующих $f_i[\mu]$).

Затем уже, согласно этапам 2 и 3 определения сильно гарантированного равновесия в игре (2.1) со смешанными стратегиями игроков, строятся векторные гарантии $f[\mu^e]$, достигаемые на всех равновесных по Нэшу ситуациях в смешанных стратегиях $\mu^e(\cdot) \in \{\mu\}$. Наконец, из них выделяется «самая большая» (максимальная по Слейтеру) ситуация $\bar{\mu}^e(\cdot)$.

2.3. Линейно–квадратичный вариант игры

Здесь рассматриваем игру (2.1) в которой $\mathbf{N} = \{1, 2\}$, множества $\mathrm{X}_i = \mathbf{R}^n$, $\mathrm{Y} = \mathbf{R}^m$ (задача без ограничений), а функции выигрыша линейно–квадратичны по x_i, y и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x_1'A_1x_1 + 2x_1'x_2 + 2x_1'C_1y + y'D_1y + 2a_1'x_1, \\ f_2(x,y) &= x_2'A_2x_2 - 2x_2'x_1 + 2x_2'C_2y + y'D_2y + 2a_2'x_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где x_1, x_2 – n-вектора (столбцы), y – m-вектор-столбец, штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные векторы a_i и матрицы A_i, C_i, D_i соответствующих размерностей, причем A_i и D_i – симметричны $(i = 1, 2)$; далее, напомним, $A_i < 0$ $(D_i > 0)$ означает, что квадратичная форма $x'A_ix$ $\;(y'D_iy)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна), а $K \leqslant 0$ означает, что квадратичная форма $x'Kx \leqslant 0 \;\; \forall x \in \mathbf{R}^n$; 0_n – нулевой n-вектор.

Итак, далее рассматриваем бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности

$$\langle \{1, 2\}, \{\mathrm{X}_i = \mathbf{R}^n\}_{i=1,2}, \mathrm{Y} = \mathbf{R}^m, \{f_i(x_1, x_2, y)\}_{i=1,2} \rangle, \tag{2.8}$$

здесь функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ определены в (2.7), стратегиями i-го игрока являются n-вектора-столбцы $x_i \in \mathbf{R}^n$, неопределенности $y \in \mathbf{R}^m$; специальный вид (2.7) функций выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ вызван желанием охватить все слагаемые (линейные и квадратичные), содержащие x_i, учет других возможных слагаемых, не вызывая принципиальных затруднений, приведет лишь к громоздким записям.

Утверждение 2.2. *Если в игре* (2.8) *матрицы*

$$A_i < 0, \;\; D_i > 0 \;\;\; (i = 1, 2), \tag{2.9}$$

то сильно гарантированное равновесие $(x_1^e, x_2^e, f_1^e, f_2^e)$ *имеет вид:*

$$\begin{aligned} x_1^e &= \left[\left(A_2 - C_2D_2^{-1}C_2'\right)^{-1} + \left(A_1 - C_1D_1^{-1}C_1'\right)\right]^{-1} \times \\ &\qquad \times \left[\left(A_2 - C_2D_2^{-1}C_2'\right)^{-1} a_2 - a_1\right], \\ x_2^e &= -\left[\left(A_1 - C_1D_1^{-1}C_1'\right)^{-1} + \left(A_2 - C_2D_2^{-1}C_2'\right)\right]^{-1} \times \\ &\qquad \times \left[\left(A_1 - C_1D_1^{-1}C_1'\right)^{-1} a_1 + a_2\right], \\ f_1^e &= -[x_1^e]'[A_1 - C_1D_1^{-1}C_1']x_1^e, \\ f_2^e &= -[x_2^e]'[A_2 - C_2D_2^{-1}C_2']x_2^e. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Доказательство. Из (2.9) и [3] следует справедливость цепочек импликаций:

$$\begin{gathered} D_i > 0 \Rightarrow detD_i \neq 0 \Rightarrow \exists D_i^{-1}, \\ D_i > 0 \Rightarrow D_i^{-1} > 0 \Rightarrow C_i D_i^{-1} C_i' \geqslant 0 \Rightarrow -C_i D_i^{-1} C_i' \leqslant 0, \\ A_i < 0 \wedge -C_i D_i^{-1} C_i' \leqslant 0 \Rightarrow A_i - C_i D_i^{-1} C_i' < 0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

Далее доказательство проведем по этапам 1, 2 из определения сильно гарантированного равновесия игры (2.1) при $\mathbf{N} = \{1, 2\}$.

Этап 1. Найдем $y^{(i)}(x_1, x_2)$ согласно условию

$$f_i(x_1, x_2, y^{(i)}(x_1, x_2)) = \min_y f_i(x_1, x_2, y). \tag{2.12}$$

При отсутствии ограничений ($x_i \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$, ситуации $x = (x_1, x_2) \in \in \mathbf{R}^{2n}$) достаточные условия реализации минимума в (2.12) на m-вектор–фунции $y^{(i)}(x)$ сводятся (с учетом $D_i > 0$ из (2.9)) к

$$\begin{gathered} grad_y f_i(x, y^{(i)}(x)) = \left.\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y}\right|_{y^{(i)}(x)} = 2D_i y^{(i)}(x) + 2C_i' x_i = 0_m, \\ \left.\frac{\partial^2 f_i(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y^{(i)}(x)} = 2D_i > 0 \quad (i = 1, 2), \end{gathered} \tag{2.13}$$

где $\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}$ – гессиан для $f_i(x, y)$ по компонентам m-вектора y; при построении градиента $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ использованы равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}(y' L x) = Lx, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x' K y) = K' x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y' D y) = 2Dy$$

из [3, с. 106]. Согласно (2.13)

$$y^{(i)}(x) \ = \ -D_i^{-1} C_i' x_i \quad (i = 1, 2). \tag{2.14}$$

Из (2.14) также получаем тождество (при $\forall x \in \mathbf{R}^{2n}$)

$$[y^{(i)}(x)]' D_i y^{(i)}(x) + 2x_i' C_i y^{(i)}(x) = -[y^{(i)}(x)]' D_i y^{(i)}(x) \quad (i = 1, 2). \tag{2.15}$$

С помощью (2.14) и (2.15) найдем

$$\begin{gathered} f_1[x_1, x_2] = f_1(x_1, x_2, y^{(1)}(x)) = x_1' A_1 x_1 + 2x_1' x_2 - \\ -[y^{(1)}(x)]' D_1 y^{(1)}(x) + 2a_1' x_1 = \\ = x_1' \left[A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'\right] x_1 + 2x_1' x_2 + 2a_1' x_1, \\ f_2[x_1, x_2] = f_2(x_1, x_2, y^{(2)}(x)) = \\ = x_2' \left[A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'\right] x_2 - 2x_2' x_1 + 2a_2' x_2, \end{gathered} \tag{2.16}$$

причем, согласно (2.11),

$$A_i - C_i D_i^{-1} C_i' < 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.17}$$

Этап 2. Для построения ситуации (x_1^e, x_2^e), реализующей максимумы в (2.12) снова используем достаточные условия в виде

$$\begin{array}{c}
\left.\frac{\partial f_1[x_1, x_2^e]}{\partial x_1}\right|_{x_1^e} = 2[A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'] x_1^e + 2x_2^e + 2a_1 = 0_n, \\
\left.\frac{\partial f_2[x_1^e, x_2]}{\partial x_2}\right|_{x_2^e} = -2x_1^e + 2[A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'] x_2^e + 2a_2 = 0_n, \\
\left.\frac{\partial^2 f_1[x_1, x_2^e]}{\partial x_1^2}\right|_{x_1^e} = 2[A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'] < 0, \\
\left.\frac{\partial^2 f_2[x_1^e, x_2]}{\partial x_2^2}\right|_{x_2^e} = 2[A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'] < 0.
\end{array} \tag{2.18}$$

Приведем специальное *замечание.* Отметим, что первые два равенства из (2.18) при $A_i < 0$, $D_i > 0$ являются необходимыми условиями существования ситуации равновесия (x_1^e, x_2^e) и, вследствие единственности решений этой системы уравнений, ситуация равновесия (найденная с их помощью) тоже будет единственной.

Справедливость последних двух соотношений в (2.18) сразу получаем из (2.17), а с помощью первых двух равенств приходим к системе из двух линейных алгебраических уравнений с двумя векторными неизвестными x_1^e и x_2^e:

$$\begin{cases} (A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1') x_1^e + x_2^e = -a_1, \\ -x_1^e + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2') x_2^e = -a_2. \end{cases} \tag{2.19}$$

Умножая слева первое из них на обратную к невырожденной (см. (2.17)) матрице $A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'$ и складывая по столбцам, получаем

$$\begin{gathered} \left[(A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')^{-1} + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')\right] x_2^e = \\ = -\left[(A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')^{-1} a_1 + a_2\right]. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Аналогично, умножая слева второе из (2.19) на взятую со знаком «минус» обратную к невырожденной матрице $A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'$ и снова складывая по столбцам, приходим к

$$\begin{gathered} \left[(A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')^{-1} + (A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')\right] x_1^e = \\ = (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')^{-1} a_2 - a_1. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Из (2.17) имеет место

$$(A_i - C_i D_i^{-1} C_i')^{-1} < 0 \quad (i = 1, 2),$$

и, с учетом (2.17), матрицы

$$\begin{gathered}(A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')^{-1} + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2') < 0,\\ (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')^{-1} + (A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1') < 0,\end{gathered}$$

откуда, в частности, следует невырожденность этих матриц и, следовательно, существование обратных к этим двум матрицам.

Тогда из (2.20) и (2.21) сразу получаем справедливость первых двух формул в (2.10).

Для построения $f_i^e = f_i[x_1^e, x_2^e]$ $(i = 1, 2)$ снова воспользуемся первыми двумя равенствами из (2.18), откуда, в частности, следует

$$\begin{gathered}f_1^e = f_[x_1^e, x_2^e] = [x_1^e]'[A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1']x_1^e + 2[x_1^e]'x_2^e + 2a_1' x_1^e =\\ = -[x_1^e]'[A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1']x_1^e,\end{gathered}$$

аналогично

$$f_2^e = -[x_2^e]'[A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2']x_2^e.$$

Этап 3. Вследствие строгой выпуклости $f_i(x, y)$ из (2.17) по y при каждом $x \in \mathbf{R}^{2n}$, требований (2.9) и приведенного на предыдущем этапе 2 *замечания* четверка $(x_1^e, x_2^e, f_1^e, f_2^e)$ единственна. □

3. Гарантированные (по Слейтеру) равновесия

Предлагается центральное понятие этой статьи – определение гарантированного решения в конфликте (бескоалиционной игре N лиц при неопределенности), основанное на подходящей модификации максимина. Выявлены свойства такого решения и условия существования в смешанных стратегиях.

3.1. Определение и свойства

Чтобы применить прием – «аналог максимина» для формализации гарантированного решения игры

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle. \tag{3.1}$$

Снова рассмотрим (для полноты изложения) антагонистическую игру со скалярной функцией выигрыша $f(x,y)$:

$$\langle\, \{1,2\}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, f(x,y)\,\rangle, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{X} \subseteq \mathbf{R}^n$ – множество стратегий x игрока 1, а $\mathrm{Y}^{\mathrm{X}} = \{y(x) | \mathrm{X} \to \mathrm{Y}\}$ есть множество контрстратегий $y(x)$ игрока 2. В (3.2) игрок 1 стремится подходящим выбором своей стратегии $x \in \mathrm{X}$ *максимизировать скалярную* функцию выигрыша $f(x,y)$, причем предполагается *информационная дискриминация* игрока 1: делая первый ход в игре (3.2), он передает сведения игроку 2 о намеченных им к выбору стратегиях $x \in \mathrm{X}$. Игрок 2, используя эту информацию, формирует контрстратегию $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ с целью *минимизировать* $f(x,y)$ (при $y = y(x)$). Далее игрок 2 делает второй ход – он сообщает первому о своем выборе $y(\cdot) \in \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}$. Наконец, окончательное решение принимает игрок 1: он конструирует свою стратегию $x^g \in \mathrm{X}$ таким образом, чтобы максимизировать $f(x, y(x))$, то есть находит

$$x^g = \arg\max_{x \in \mathrm{X}} f(x, y(x)).$$

В результате первый игрок гарантированно получает выигрыш $f^g = f(x^g, y(x^g))$, ибо, согласно построению контрстратегии $y(x^g) = \arg\min\limits_{y \in \mathrm{Y}} f(x^g, y)$, будет

$$f(x^g, y(x^g)) \ \leqslant\ f(x^g, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y}. \tag{3.3}$$

Итак, при формализации максимина f^g и максиминной стратегии x^g приходится последовательно совершить две операции.

Во–первых, операцию построения *внутреннего минимума*: для $\forall x \in \mathrm{X}$ найти констратегию $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ такую, что

$$\min_{y \in \mathrm{Y}} f(x,y) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in \mathrm{X}. \tag{3.4}$$

Во–вторых, нахождение *внешнего максимума*:

$$\max_{x \in \mathrm{X}} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{3.5}$$

Ибо, согласно (3.4) при $x = x^g$ имеет место неравенство (3.3), то есть выбором $x = x^g$ игрок 1 гарантирует себе выигрыш $f^g \leqslant f(x^g, y)$

$\forall y \in \mathrm{Y}$. Причем эта гарантия f^g будет, согласно (3.5), наибольшей из всех гарантий $f(x, y(x))$ (при любых стратегиях $x \in \mathrm{X}$ первого игрока), поскольку по (3.5)

$$f(x, y(x)) \leqslant f(x^g, y(x^g)) = f^g \quad \forall x \in \mathrm{X}.$$

Перейдем теперь к понятию *гарантированного по Слейтеру равновесия* (ГРС) для бескоалиционной игры (3.1), применяя подходящую модификацию максимина, именно, заменив,

во–первых, операцию нахождения внутреннего минимума на построение *минимума векторного* (здесь ограничимся *минимумом по Слейтеру*),

и, *во–вторых*, операцию внешнего максимума, *в первую очередь*, на построение множества ситуаций равновесия по Нэшу; *затем*, на последующее нахождение векторного максимума на множестве построенных всех ситуаций равновесия (здесь также ограничимся лишь *максимумом по Слейтеру на множестве всех ситуаций равновесия*).

Определение 3.1. *Пару* $(\bar{x}^e, \bar{f}^S) \in \mathrm{X} \times \mathbf{R}^N$ *назовем гарантированным* (*по Слейтеру*) *равновесием* (*ГРС*) *в игре* (3.1), *если существует неопределенность* $y_S(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *такая, что*

1) $\bar{f}^S = (\bar{f}_1^S, \ldots, \bar{f}_N^S) = f(\bar{x}^e, y_S(\bar{x}^e))$, *то есть*

$$\bar{f}_i^S \; = \; f_i(\bar{x}^e, y_S(\bar{x}^e)) \quad (i \in \mathbf{N});$$

2) *при каждом* $x \in \mathrm{X}$ *неопределенность* $y_S(x)$ *минимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче* $\langle \mathrm{Y}, f(x, y) \rangle$, *то есть для любой ситуации* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_N = \mathrm{X}$ *несовместна система из* N *строгих неравенств*

$$f_i[x] = f_i(x, y_S(x)) \; < \; f_i(x, y) \quad \forall y \in \mathrm{Y} \quad (i \in \mathbf{N}); \tag{3.6}$$

3) *ситуации* $x^e \in \mathrm{X}$ *равновесны по Нэшу в бескоалиционной игре*

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x, y_S(x))\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle, \tag{3.7}$$

то есть

$$\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i(x^e || x_i, y_S(x^e || x_i)) = f_i[x^e], \quad i \in \mathbf{N}, \tag{3.8}$$

где $(x^e||x_i) = (x_1^e, \ldots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \ldots, x_N^e)$*, множество таких равновесных ситуаций обозначим* X^e*;*

4) *ситуация* $\bar{x}^e \in \mathrm{X}^e$ *максимальна по Слейтеру [17] в* N*-критериальной задаче*

$$\langle\, \mathrm{X}^e, \{f_i(x, y_S(x))\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle\,,$$

то есть при всех $x \in \mathrm{X}^e$ *несовместна система строгих неравенств*

$$\bar{f}_i^S = f_i(\bar{x}^e, y_S(\bar{x}^e)) < f_i(x, y_S(x)), \quad i \in \mathbf{N}. \tag{3.9}$$

Замечание 3.1. *a*) Из несовместности неравенств (3.6) (при $x = \bar{x}^e$) следует, что N-вектор $\bar{f}^S$ является слейтеровской гарантией, ибо при использовании игроками своих стратегий из ситуации $\bar{x}^e$ никаким выбором $y \in \mathrm{Y}$ нельзя одновременно уменьшить все выигрыши $\bar{f}_i^S$ $(i \in \mathbf{N})$ (так как невозможны при $\forall y \in \mathrm{Y}$ неравенства $f_i(\bar{x}^e, y) <$ $< f_i(\bar{x}^e, y_S(\bar{x}^e)) = \bar{f}_i^S,\ i \in \mathbf{N})$.

b) Из (3.7) и (3.8) получаем, что каждая ситуация $x^e \in \mathrm{X}^e$ равновесна по Нэшу в бескоалиционной игре (3.7), а значит и устойчива к отклонению от нее отдельного игрока.

c) Из несовместности (3.9) имеем, что векторная гарантия $\bar{f}^S =$ $= (\bar{f}_1^S, \ldots, \bar{f}_N^S)$ самая большая (в векторном смысле!) из всех гарантий $f(x^e, y_S(x^e))$ $\forall x^e \in \mathrm{X}^e$.

Следовательно, игроки, следуя своим стратегиям $\bar{x}_i^e$ $(i \in \mathbf{N})$ из ситуации равновесия $\bar{x}^e = (\bar{x}_1^e, \ldots, \bar{x}_N^e)$, *во–первых*, «обеспечат» (при $\forall y \in \mathrm{Y}$) себе векторную гарантию $\bar{f}^S$, и, *во–вторых*, эта гарантия будет наибольшая (максимальная по Слейтеру, см. (3.9)) из всех гарантий, которые «обеспечили бы» себе игроки, следуя своим стратегиям x_i^e $(i \in \mathbf{N})$ из других ситуаций равновесия $x^e \in \mathrm{X}^e$. (Заметим, что в примере 2.1 из [14] множество гарантированных (по Слейтеру) равновесий $(\bar{x}^e, \bar{f}^e) = ((1;1), (1-\cos\beta, 1-\sin\beta)|\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]))$.

3.2. Существование ГР в смешанных стратегиях

Здесь будет установлено существование гарантированного по Слейтеру равновесия в бескоалиционной игре при неопределенности в случае, когда игроки могут использовать и смешанные стратегии. Существование доказывается при обычных для математической теории игр ограничениях.

Постановка задачи и вспомогательные сведения. Будем рассматривать бескоалиционную игру N лиц при неопределенности, заданную упорядоченной четверкой

$$\Gamma = \langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle. \tag{3.10}$$

Напомним, что в игре Γ
$\mathbf{N} = \{1,\ldots,N\}$ – множество порядковых номеров игроков, предполагаем обычно, что целое число $N \geqslant 2$;
$\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество *чистых стратегий* x_i у i-го игрока ($i \in \mathbf{N}$);
$\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество неопределенных факторов y.

В Γ игроки, не имея возможности объединятся в коалиции, выбирают свои чистые стратегии x_i ($i \in \mathbf{N}$), в результате образуется *ситуация* $x = (x_1,\ldots,x_N)$ игры Γ в *чистых стратегиях*, причем $x \in \mathrm{X} = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i$.

По аналогии с операцией внутреннего минимума в определении максимина, будем предполагать *информационную дискриминацию игроков*, то есть они сообщают ЛПР, отвечающему за формирование неопределенностей, выбранные стратегии x_i, точнее, сложившуюся в результате такого выбора ситуацию $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathrm{X}$. Указанный ЛПР формирует неопределенность в виде контрситуации $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $y(\cdot) \in \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}$. Итак, неопределенность в игре Γ будем отождествлять с m-вектор-функцией $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ (определенной на X со значениями в Y). Заметим, что формирующий неопределенность ЛПР выбирает $y(x) = y_S(x)$ таким образом, чтобы обеспечить минимум по Слейтеру $f(x, y_S(x))$ в N-критериальной задаче

$$\Gamma(x) = \langle\, \mathrm{Y}, \{f(x,y) = (f_1(x,y),\ldots,f_N(x,y)\}\,\rangle \tag{3.11}$$

для каждого $x \in \mathrm{X}$, то есть должна при каждом $x \in \mathrm{X}$ быть несовместной система строгих неравенств

$$f_i(x,y) \;<\; f_i(x, y_S(x)) \quad \forall y \in \mathrm{Y},\ i \in \mathbf{N}.$$

Будем использовать здесь следующее

Утверждение 3.1. *Пусть в игре* Γ

а) множества X_i ($i \in \mathbf{N}$) *и* Y *суть непустые компакты и* Y – *– выпукло;*

b) скалярные функции $f_i(x,y)$ $(i \in \mathbf{N})$ непрерывны на $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ и существует, по крайней мере, один номер $j \in \mathbf{N}$ такой, что функция $f_j(x,y)$ при каждом $x \in \mathrm{X}$ строго выпукла по $y \in \mathrm{Y}$ (то есть для любых $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathrm{Y}$ и чисел $\lambda \in (0,1)$ имеет место

$$f_j(x, \lambda y^{(1)} + (1-\lambda)y^{(2)}) \ < \ \lambda f_j(x, y^{(1)}) + (1-\lambda) f_j(x, y^{(2)})).$$

Тогда в игре Γ существует непрерывная (по $x \in \mathrm{X}$) и минимальная по Слейтеру неопределенность $y_S(x)$.

Доказательство. Если $\alpha_i = const \geqslant 0$ $(i \in \mathbf{N})$ и $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i > 0$, то минимизатор

$$y_S(x) = \arg\min_{y \in \mathrm{Y}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x,y) \tag{3.12}$$

будет [26, с. 68-69] минимальной по Слейтеру неопределенностью [15,16] в (3.11) (для каждого $x \in \mathrm{X}$). Наконец, при выполнении условий утверждения 3.1, положив $\alpha_j = const > 0$, $\alpha_k = 0$ $(k \neq j,\ k \in \mathbf{N})$ из (3.12) и [1, с. 54] получаем справедливость утверждения 3.1. $\square$

Итак напомним, что в рассматриваемой игре Γ *первый ход* за игроками – они сообщают свои чистые стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ (то есть ситуацию $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X}$) ЛПРу, ведающему конструированием неопределенности $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. Следующий, *второй ход* за указанным ЛПР – он сообщает каждому из N игроков сформированную им минимальную по Слейтеру неопределенность $y(x) = y_S(x)$. Тогда (*третий ход* опять–таки за игроками) в «появившейся» в результате бескоалиционной игре (без неопределенности)

$$\Gamma_b = \langle\ \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x, y_S(x))\}_{i \in \mathbf{N}}\ \rangle \tag{3.13}$$

игроки находят ситуацию равновесия по Нэшу $x^e \in \mathrm{X}$, именно, из условий

$$\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i(x^e || x_i, y_S(x^e || x_i)) = f_i(x^e, y_S(x^e)) \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{3.14}$$

Однако в этот момент развития игры возникают трудности, связанные с существованием в игре (3.13) ситуации равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, \ldots, x_N^e)$ в чистых стратегиях (она удовлетворяет системе из N равенств (3.14)). Ведь, несмотря на непрерывность $f_i[x] =$

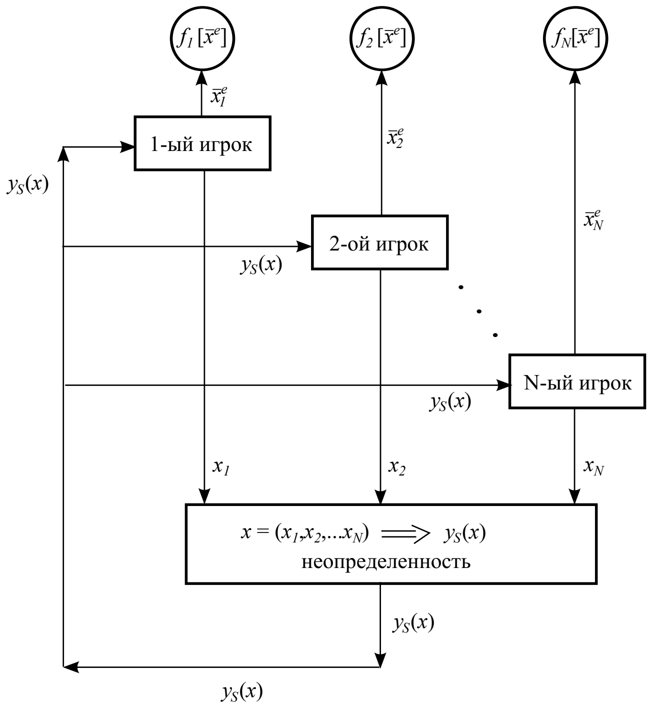

Рисунок 3. Порядок принятия ГРС в игре (3.1)

$= f_i(x, y_S(x))$ $(i \in \mathbf{N})$, имеются многочисленные примеры, когда x^e отсутствует. Поэтому, следуя традиционному подходу из математической теории игр, будем вместо игры (3.13) рассматривать ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}_b = \langle\, \mathbf{N}, \{\mu_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i[\mu]\}_{i \in \mathbf{N}}\, \rangle, \tag{3.15}$$

а тогда непрерывности $f_i(x, y_S(x)) = f_i[x]$ по $x \in \mathrm{X}$ $(i \in \mathbf{N})$ достаточно [4, с. 117-119] для существования ситуаций равновесия $\mu^e(\cdot) \in \{\mu\}$ игры (3.15), которые также определяются N равенствами

$$\max_{\mu_i(\cdot) \in \{\mu_i\}} f_i[\mu^e || \mu_i] = f_i[\mu^e] \quad (i \in \mathbf{N}). \tag{3.16}$$

В (3.15) и (3.16)

$\mathbf{N} = \{1, \ldots, N\}$ – снова множество порядковых номеров игроков; затем для каждого компакта X_i строим борелевскую σ-алгебру подмножеств множества X_i и в качестве смешанной стратегии $\mu_i(\cdot)$ применяем неотрицательную скалярную функцию $\mu_i(\cdot)$, заданную на борелевской σ-алгебре подмножеств множества X_i, счетно–аддитивную и нормированную на X_i единицей. Обозначим множество таких смешанных стратегий через $\{\mu_i\}$. Определяем меру–произведение $\mu(dx) = \mu_1(dx_1)\dots\mu_N(dx_N)$ и множество $\{\mu\}$ так же как ранее. Наконец, в (3.15) и (3.16) математические ожидания – функции выигрыша игроков

$$f_i[\mu] \;=\; \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y_S(x))\mu(dx) \quad (i \in \mathbf{N}).$$

А [4, с. 117-119] «обеспечивает» существование меры–произведения $\mu^e(\cdot)\in\{\mu\}$, удовлетворяющей условиям (3.16). Более того, множество таких равновесных по Нэшу мер $\{\mu^e\}$ будет слабо компактным в себе [20, с. 125].

Центральный результат. Итак, рассматриваем игру (3.1) и ставим ей в соответствие *квазисмешанное расширение*

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i[\mu]\}_{i\in\mathbf{N}} \,\rangle, \tag{3.17}$$

где $\mathbf{N} = \{1, \dots, N\}$,
$\mathrm{X} = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i$ – множество ситуаций $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathrm{X}$ игры (3.1) в чистых стратегиях;
$\{\mu_i\}$ – множество смешанных стратегий $\mu_i(\cdot)$ игрока $i \in \mathbf{N}$; ситуация в смешанных стратегиях $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot)\cdot\ldots\cdot\mu_N(\cdot)$ – мера–произведение;
Y^{X} – множество неопределенностей – контрситуаций $y(x):\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$;
$f_i[\mu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y(x))\mu(dx)$ – функция выигрыша игрока i в игре (3.17), причем $f_i[\mu]$ является математическим ожиданием от функции выигрыша $f_i(x, y) = f_i(x, y(x))$ в игре (3.1), если реализуются ситуация $x\in\mathrm{X}$ и непрерывная (по x) неопределенность $y(\cdot)\in C(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Определение 3.2. *Пару* $(\bar{\mu}^e(\cdot), \widetilde{f}^S) \in \{\mu\} \times \mathbf{R}^N$ *назовем гарантированным по Слейтеру равновесием в смешанных стратегиях для игры* (3.1), *если существует неопределенность – контрситуация* $y_S(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *такая, что*

1^o) *неопределенность* $y_S(x)$ *минимальна по Слейтеру для каждой ситуации* $x \in \mathrm{X}$ *в* N*-критериальной задаче*

$$\Gamma(x) = \langle\, \mathrm{Y}, \{f(x, y)\}\,\rangle,$$

то есть для каждого $x \in \mathrm{X}$ *несовместна система неравенств*

$$f_i(x, y) \ < \ f_i(x, y_S(x)) \quad \forall y \in \mathrm{Y},\ i \in \mathbf{N};$$

2^o) *ситуация в смешанных стратегиях* $\mu^e(\cdot) \in \{\mu\}$ *в смешанном расширении*

$$\langle\ \mathbf{N}, \{\mu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i[\mu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y_S(x))\mu(dx)\}_{i\in\mathbf{N}}\ \rangle$$

бескоалиционной игры (*без неопределенностей*)

$$\langle\ \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x, y_S(x)) = f_i[x]\}_{i\in\mathbf{N}}\ \rangle$$

равновесна по Нэшу, то есть для $\mu^e(\cdot)$ *выполняются все* N *равенств* (3.16)*; множество* $\mu^e(\cdot)$ *обозначим* $\{\mu^e\}$*;*

3^o) $\bar{\mu}^e(\cdot) \in \{\mu^e\}$ *максимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче*

$$\langle\ \{\mu^e\}, \{f_i[\mu]\}_{i\in\mathbf{N}}\ \rangle, \tag{3.18}$$

то есть при любых $\mu(\cdot) \in \{\mu^e\}$ *несовместна система* N *строгих неравенств*

$$f_i[\mu] \ > \ f_i[\bar{\mu}^e] \quad (i \in \mathbf{N});$$

4^o) *для компонент* $\widetilde{f}_i^S$ $(i \in \mathbf{N})$ *вектора* $\widetilde{f}^S = (\widetilde{f}_1^S, \ldots, \widetilde{f}_N^S)$ *справедливы равенства* $\widetilde{f}_i^S = f_i[\bar{\mu}^e]$ $(i \in \mathbf{N})$.

Терема существования. Перейдем к центральному результату данного раздела: установим существование гарантированного по Слейтеру равновесия в смешанных стратегиях для игры (3.1) при «привычных» для математической теории игр ограничениях.

Теорема 3.1. *Пусть в игре* (3.1)

1^o) *множества* X_i $(i\in\mathbf{N})$, *а также* Y – *компакты и* Y – *выпукло;*

2^o) *функции выигрыша* $f_i(x, y)$ $(i \in \mathbf{N})$ *непрерывны на* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *и найдется, по крайней мере, один номер* $j \in \mathbf{N}$ *такой, что* $f_j(x, y)$ *строго выпукла по* $y \in \mathrm{Y}$ *при каждом* $x \in \mathrm{X}$.

Тогда в игре (3.1) *существует гарантированное по Слейтеру равновесие в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Из требований 1^o и 2^o теоремы 3.1 и утверждения 3.1 следует существование непрерывной на X неопределенности $y_S(x)\colon \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, минимальной по Слейтеру (при каждом $x\in\mathrm{X}$) в N-критериальной задаче $\Gamma(x)$ (3.11). Затем построим бескоалиционную игру N лиц (3.13) (без неопределенностей). В ней функции выигрыша $f_i(x, y_S(x))$ непрерывны на X (как суперпозиции непрерывных функций $f_i(x,y)$ и $y_S(x)$). Тогда в смешанном расширении (3.15) игры (3.13) существует ситуация равновесия по Нэшу $\mu^e(\cdot)\in\{\mu\}$. Обозначим множество всех $\mu^e(\cdot)$ через $\{\mu^e\}$. Данное множество слабо замкнуто в себе и слабо компактно (что следует из этих двух «слабых» свойств для $\{\mu\}$ и (3.16)). Но тогда компактным в $\mathbf{R}^N$ будет множество $\mathcal{F}^e=\{f[\mu^e]|\mu^e(\cdot)\in\{\mu^e\}\}$, причем компакт $\mathcal{F}^e\subset\mathcal{F}=$ $=\{f[\mu]|\,\mu(\cdot)\in\{\mu\}\}$.

Рассмотрим заданную на $\mathcal{F}^e$ линейную свертку $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}}\alpha_i f_i$, где $\alpha_i=$ $=const>0$ $(i\in\mathbf{N})$. Согласно непрерывности на $\mathcal{F}^e$ и компактности $\mathcal{F}^e$ существует N-вектор $\widetilde{f}^S=(\widetilde{f}_1^S,\ldots,\widetilde{f}_N^S)\in\mathcal{F}^e$ такой, что

$$\max_{f\in\mathcal{F}^e}\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_i f_i \;=\; \sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_i\widetilde{f}_i^S.$$

А уже затем по $\widetilde{f}^S$ находим ситуацию в смешанных стратегиях $\bar{\mu}^e(\cdot)\in$ $\in\{\mu^e\}$, для которой

$$\widetilde{f}_i^S \;=\; f_i[\bar{\mu}^e] \quad (i\in\mathbf{N}).$$

Указанная $\bar{\mu}^e(\cdot)$ максимальна по Слейтеру в N-критериальной задаче (3.18). Итак, полученная пара $(\bar{\mu}^e(\cdot),\widetilde{f}^S)\in\{\mu\}\times\mathbf{R}^N$, согласно определению 3.2, как раз и будет гарантированным по Слейтеру равновесием в смешанных стратегиях для игры (3.1). □

Замечание 3.2. Перейдем к «игровому смыслу» определения 3.2; здесь, напомним, используем N-вектор $f=(f_1,\ldots,f_N)$.

Во-первых, согласно требования 2^o этого определения любая ситуация $x\in\mathrm{X}$ «порождает» векторную гарантию в чистых стратегиях $f(x,y_S(x))$, ибо для $\forall\,y\in\mathrm{Y}$ не могут все выигрыши $f_i(x,y)$ стать одновременно меньше $f_i(x,y_S(x))$ соответственно $(i\in\mathbf{N})$ – в этом аналог операции внутреннего минимума из определения максимина.

Во-вторых, из (3.16) будут следовать неравенства

$$f_i[\mu^e\|x_i] \;\leqslant\; f_i[\mu^e] \quad \forall x_i\in\mathrm{X}_i\ (i\in\mathbf{N}),$$

ибо δ-функция Дирака $\delta(x_i - \bar{x}_i)(d\bar{x}_i)$ является вероятностной мерой из $\{\mu_i\}$ и поэтому [4, с. 125]

$$f_i[\mu^e||\delta(x_i - \bar{x}_i)(d\bar{x}_i)] \;=\; f_i[\mu^e||x_i] \;\leqslant\; f_i[\mu^e].$$

Таким образом, ситуация равновесия по Нэшу $\mu^e(\cdot)$ в смешанных стратегиях устойчива к отклонению от нее (в чистых стратегиях) для отдельного игрока – к отклонению только одного.

В-третьих, каждая векторная гарантия $f(x, y_S(x))$ в чистых стратегиях (минимум по Слейтеру в $\Gamma(x) = \langle \mathrm{Y}, \{f(x,y)\}\rangle$) «порождает» векторную гарантию $f[\mu]$ в смешанных стратегиях, ибо несовместность при $\forall x \in \mathrm{X}$ системы неравенств

$$f_i^e[x] = f_i(x, y_S(x)) \;>\; f_i(x,y) \quad \forall\, y = const \in \mathrm{Y},\; i \in \mathbf{N}, \tag{3.19}$$

эквивалентна существованию для каждых $x \in \mathrm{X}$ и $y \in \mathrm{Y}$ «своего» номера $j(x,y) = j \in \mathbf{N}$ такого, что

$$f_j(x, y_S(x)) \;\leqslant\; f_j(x,y).$$

Интегрируя по x обе части последнего неравенства с произвольной смешанной ситуацией $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ в качестве интегрируемой меры, получаем

$$f_j^S[\mu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_j(x, y_S(x))\mu(dx) \leqslant \int\limits_{\mathrm{X}} f_j(x,y)\mu(dx) = f_j[\mu, y] \quad \forall\, y = const \in \mathrm{Y}$$

или, что эквивалентно: любая ситуация в смешанных стратегиях $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ порождает векторную гарантию $f^S[\mu] = (f_1^S[\mu], \ldots, f_N^S[\mu])$, ибо для любых $y \in \mathrm{Y}$ не могут все выигрыши $f_i[\mu, y]$ стать (одновременно) покомпонентно меньше $f_i^S[\mu]$ соответственно.

В-четвертых, при переходе от игры в чистых стратегиях

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i(x, y_S(x)) = f_i^e[x]\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle \tag{3.20}$$

к ее смешанному расширению

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mu_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i^e[\mu]\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle \tag{3.21}$$

мы фактически перешли от бескоалиционной игры векторных гарантий в чистых стратегиях (3.20) к ее смешанному расширению – бескоалиционной игре (3.21) векторных гарантий в смешанных стратегиях. И теперь аналогом операции внешнего максимума (в определении максимина) является последовательное применение двух операций – нахождение всех ситуации равновесия по Нэшу в игре (3.15) и построение максимальной по Слейтеру $\bar{\mu}^e(\cdot)$ из них. Итак, при выборе всеми игроками своих смешанных стратегий (образующих ситуацию $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$ в смешанных стратегиях) их выигрыши $f_i[\mu, y] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y)\mu(dx)$ не могут одновременно (для всех $i \in \mathbf{N}$) стать меньше $f_i^S[\mu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x, y_S(x))\mu(dx)$ при любых чистых неопределенностях $y \in \mathrm{Y}$. Из всех равновесных по Нэшу ситуаций $\mu^e(\cdot) \in \{\mu\}$ в качестве решения предлагается игрокам использовать максимальную по Слейтеру меру – ситуацию $\bar{\mu}^e(\cdot) \in \{\mu^e\}$, обеспечившую всем игрокам наибольший (по Слейтеру) равновесный по Нэшу векторный выигрыш $\bar{f}[\bar{\mu}^e]$. Как раз в этом и состоит аналог операции внешнего максимума в определении максимина.

4. Дуополия Курно с учетом импорта

В качестве примера, иллюстрирующего возможности применения основанных на «аналоге максимина» равновесий (как рассмотренных выше, так и других, формализованных по аналогичной схеме), приведем модификацию одной из трех классических моделей ценообразования (олигополии Курно [29], Бертрана [28], Хотеллинга [30]); а именно, дуополию Курно при учете импорта.

4.1. Математическая модель

Представим, что две фирмы (обозначенные соответственно I и II) конкурируют на рынке одного продукта. Объем произведенной ими за некоторый (заданный априори) промежуток времени продукции обозначим через q_1 и q_2 соответственно. Одновременно с этим на рынке появляется компания - импортер, о целях и объемах поставляемой им продукции руководство компаний I и II не имеют никакой информации. Они могут считать лишь, что объем поставляемого импортером товара является некоторой неотрицательной величиной $y \in [0, +\infty)$. *Издержки* производства предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной продукции q_i $(i = 1, 2)$ и могут быть представлены в виде $cq_i + d$, здесь c и d соответственно переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным – аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\bar{q} = q_1 + q_2 + y$ поступившего на продажу товара. Цену товара представляем в виде $p(\bar{q}) = a - b\bar{q}$, где $a = const > 0$ – начальная цена товара, а постоянный положительный коэффициент эластичности b показывает, на сколько «падает» цена при поступлении в продажу единицы продукции. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Пусть каждая из фирм продает все, что она производит, тогда выручка первой фирмы будет

$$p(\bar{q})q_1 = (a - b\bar{q})q_1 = [a - b\,(q_1 + q_2 + y)]\,q_1,$$

а ее *прибыль* (выручка минус издержки) составит (естественно $a > 0$, $b > 0$)

$$\begin{aligned} \psi_1(q_1, q_2, y) &= [a - b\,(q_1 + q_2 + y)]\,q_1 - (cq_1 + d) = \\ &= aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - byq_1 - cq_1 - d, \end{aligned} \tag{4.1}$$

одновременно прибыль второго

$$\begin{aligned} \psi_2(q_1, q_2, y) &= [a - b\,(q_1 + q_2 + y)]\,q_2 - (cq_2 + d) = \\ &= aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 - byq_2 - cq_2 - d. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Определяя объем производства, руководство фирмы-производителя вынуждено ориентироваться не только на «рациональный» выбор конкурента, но и на возможность реализации любого, заранее не предсказуемого значения неопределенности – объема поставленного на рынок импорта.

Следуя предложенному Ю.Б. Гермейером принципу гарантированного результата, будем считать, что при выборе объемов производства q_i $(i = 1, 2)$ i-ый производитель ориентируется на максимизацию функции

$$\Phi_i(q_1, q_2, y) = \psi_i(q_1, q_2, y) + \frac{y^2}{2}. \tag{4.3}$$

При этом первое слагаемое в (4.3) представляет собой его функцию прибыли, а второе «вынуждает» при выборе решения ориентироваться на «максимальное противодействие неопределенности».

Замечание 4.1. Появление последнего слагаемого в (4.3) можно объяснить и следующим образом. Для каждого игрока i $(= 1, 2)$ фактически рассматривается двухкритериальная задача: первый критерий – это его прибыль $\psi_i(q_1, q_2, y)$, второй связан с идеями принципа гарантированного результата: принимать i-му игроку решения рекомендуется в условиях, когда неопределенность «стремится максимально напортить жизнь» этому игроку, то есть принимает «самые большие» из возможных значений. Эта рекомендация и приводит ко второму критерию $\frac{y^2}{2}$, который i-ый игрок также стремится увеличить. Итак, в двухкритериальной задаче, возникающей для каждого игрока, у него 2 критерия, которые он желает увеличить - прибыль и $\frac{y^2}{2}$. Линейная их свертка с положительными коэффициентами (здесь единицы) и приводит к (4.3), а чтобы для оговариваемой двухкритериальной задачи добиться максимума по Слейтеру, то достаточно (утверждение 1.2) эту линейную свертку «максимизировать».

Упорядоченная четверка

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{\mathrm{X}_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \mathrm{Y} = [0, +\infty)\,, \{\Phi_i(x, y) \div (4.3)\}_{i=1,2} \rangle$$

образует бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности.

Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков; стратегии игроков $q_i \in \in \mathrm{X}_i = [0, +\infty)$. В результате выбора игроками своих стратегий складывается ситуация $x = (q_1, q_2) \in \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$. Независимо от выбора игроков реализуется некоторая неотрицательная неопределенность $y \in \mathrm{Y}$. На множестве пар $(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ определена функция выигрыша i-го игрока $\Phi_i(x, y)$ из (4.3).

Определение 4.1. *Парето–гарантированным равновесием* (*ПГР*) *игры* Γ *назовем тройку* $(x^e, \Phi_1^e, \Phi_2^e)$, *для которой существует функция* $y_P(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *такая, что,*

во-первых, для каждой ситуации $x \in \mathrm{X}$ *функция* $y_P(x)$ *является минимальной по Парето неопределенностью в двухкритериальной задаче*

$$\langle\, \mathrm{Y}, \{\Phi_i(x, y)\}_{i=1,2}\, \rangle,$$

полученной из Γ *при каждой фиксированной ситуации* $x = (q_1, q_2) \in \mathrm{X}$;

во-вторых, ситуация $x^e = (q_1^e, q_2^e)$ *является равновесной по Нэшу* *в игре (без неопределенностей)*

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \{\Phi_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2} \rangle,$$

полученной при подстановке в игру Γ *вместо неопределенности ее реализации* $y_P(x)$.

При этом x^e *назовем Парето–гарантирующей ситуацией, а* $\Phi_i^e = \Phi_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i=1,2)$ – *соответствующей ей гарантией игрока* i.

Определение 4.2. *Парето-гарантированным равновесием дуополии Курно (с учетом импорта) будем называть тройку* $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, *где Парето–гарантирующая ситуация* $x^e = (q_1^e, q_2^e)$ *та же, что и в ПГР игры* Γ, *а* $\psi_i^e = \psi_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i = 1,2)$ *есть прибыли игроков, входящие в их гарантированный выигрыш* $(\Phi_i^e = \Phi_i(q_1^e, q_2^e, y_P(q_1^e, q_2^e))$ *для* i*-ой фирмы* $(i = 1,2))$.

4.2. Алгоритм построения Парето–гарантированного равновесия

Согласно приведенному определению, при нахождении ПГР в дуополии Курно с учетом импорта применим следующую последовательность шагов.

ШАГ I. Нахождение внутреннего минимума по Парето: определяем непрерывную функцию $y_P(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, доставляющую минимум по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle\ \mathrm{Y} = [0, +\infty)\,, \{\Phi_i(x, y)\}_{i=1,2}\ \rangle \quad \forall x \in \mathrm{X}, \tag{4.4}$$

полученной из Γ при каждой фиксированной ситуации $x = (q_1, q_2) \in \mathrm{X}$;
ШАГ II. Построение ситуации равновесия по Нэшу: найдем равновесную по Нэшу ситуацию $x^e = (q_1^e, q_2^e)$ в игре (без неопределенностей)

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{\Phi_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2} \rangle, \tag{4.5}$$

данная игра (игра гарантий) получена подстановкой в Γ минимальной по Парето неопределенности $y_P = y_P(x)$;
ШАГ III. Вычисление прибылей ψ_i^e**:** определим прибыли игроков $\psi_i(q_1^e, q_2^e, y_P(q_1^e, q_2^e)) = \psi_i^e$ $(i = 1,2)$.

4.3. Нахождение внутреннего минимума по Парето

Лемма 4.1. *Если существуют числа $\alpha, \beta > 0$ и скалярная функция $y_P(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ такие, что для каждого $x \in \mathrm{X}$*

$$\min_{y \in \mathrm{Y}} \left[\alpha \Phi_1(x, y) + \beta \Phi_2(x, y)\right] = Idem\left[y \to y_P(x)\right], \tag{4.6}$$

то при каждом $x \in \mathrm{X}$ функция $y_P(x)$ будет минимальной по Парето в двухкритериальной задаче (4.4)*.*

Доказательство. Пусть утверждение леммы не имеет место. Тогда найдутся такие $\tilde{x} \in \mathrm{X}$ и $\tilde{y} \in \mathrm{Y}$, что совместна система неравенств

$$\Phi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant \Phi_1(\tilde{x}, y_P(\tilde{x})), \quad \Phi_2(\tilde{x}, \tilde{y}) \leqslant \Phi_2(\tilde{x}, y_P(\tilde{x})),$$

где хотя бы одно из неравенств строгое.

Умножая обе части первого из неравенств на α, а второго – на β и складывая их, получаем (с учетом строгости хотя бы одного неравенства)

$$\alpha\Phi_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + \beta\Phi_2(\tilde{x}, \tilde{y}) < \alpha\Phi_1(\tilde{x}, y_P(\tilde{x})) + \beta\Phi_2(\tilde{x}, y_P(\tilde{x})),$$

что противоречит (4.6) □

Утверждение 4.1. *Неопределенность*

$$y_P(q_1, q_2) \; = \; \frac{b(q_1 + q_2)}{2}$$

минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (4.4) *для каждой ситуации $x = q = (q_1, q_2) \in [0, +\infty)^2$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(q, y) = \Phi_1(q, y) + \Phi_2(q, y) = \psi_1(q_1, q_2, y) + \psi_2(q_1, q_2, y) + y^2 =$$

$$= a(q_1 + q_2) - b(q_1 + q_2)^2 - by(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d + y^2.$$

Минимальное значение функции при каждом фиксированном $q = (q_1, q_2) \in \mathrm{X}$ достигается при $y_P(q) = \frac{b(q_1+q_2)}{2}$, так как

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y = y_P(q)} = -b(q_1 + q_2) + 2y_P(q) = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=y_P(q)} = 2 > 0.$$

Отсюда, с учетом леммы 4.1 при $\alpha = \beta = 1$, получаем, что неопределенность $y_P(q) = \frac{b(q_1+q_2)}{2}$ минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (4.4). □

4.4. Построение ситуации равновесия по Нэшу

Утверждение 4.2. *При* $b > 0$ *ситуация равновесия по Нэшу в* (4.5) *имеет вид*

$$q^e = (q_1^e, q_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right).$$

Доказательство. Подставив найденную из утверждения 4.1 неопределенность $y_P(q)$ в (4.3) и учитывая (4.1) и (4.2), получим

$$\Phi_1(q, y_P(q)) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - \frac{b^2(q_1+q_2)}{2}q_1 - cq_1 - d + \frac{b^2(q_1+q_2)^2}{8},$$

$$\Phi_2(q, y_P(q)) = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - \frac{b^2(q_1+q_2)}{2}q_2 - cq_2 - d + \frac{b^2(q_1+q_2)^2}{8}.$$

Достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу $q^e = (q_1^e, q_2^e)$ в игре (4.5) можно свести к выполнению четырех требований

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1}\right|_{q=q^e} = a - 2bq_1^e - bq_2^e - \frac{b^2}{2}(2q_1^e + q_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(q_1^e + q_2^e) = 0, \quad (4.6)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial q_1^2}\right|_{q=q^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0, \quad (4.7)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2}\right|_{q=q^e} = a - bq_1^e - 2bq_2^e - \frac{b^2}{2}(q_1^e + 2q_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(q_1^e + q_2^e) = 0, \quad (4.8)$$

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial q_2^2}\right|_{q=q^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0. \quad (4.9)$$

Условия (4.7) и (4.9) имеют место в силу $b > 0$, а равенства (4.6), (4.8) представляют собой систему из двух линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \left(2b+\frac{3b^2}{4}\right)q_1^e+\left(b+\frac{b^2}{4}\right)q_2^e=a-c, \\ \left(b+\frac{b^2}{4}\right)q_1^e+\left(2b+\frac{3b^2}{4}\right)q_2^e=a-c. \end{cases} \tag{4.10}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2b+\frac{3b^2}{4} & b+\frac{b^2}{4} \\ b+\frac{b^2}{4} & 2b+\frac{3b^2}{4} \end{vmatrix}=\left(2b+\frac{3b^2}{4}\right)^2-\left(b+\frac{b^2}{4}\right)^2=(3b+b^2)\left(b+\frac{b^2}{2}\right),$$

при этом $\Delta \neq 0$ поскольку $b > 0$.

Найдем определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a-c & b+\frac{b^2}{4} \\ a-c & 2b+\frac{3b^2}{4} \end{vmatrix}=(a-c)\begin{vmatrix} 1 & b+\frac{b^2}{4} \\ 1 & 2b+\frac{3b^2}{4} \end{vmatrix}=$$

$$=(a-c)\left(2b+\frac{3b^2}{4}-b-\frac{b^2}{4}\right)=(a-c)\left(b+\frac{b^2}{2}\right),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2b+\frac{3b^2}{4} & a-c \\ b+\frac{b^2}{4} & a-c \end{vmatrix}=(a-c)\begin{vmatrix} 2b+\frac{3b^2}{4} & 1 \\ b+\frac{b^2}{4} & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-c)\left(2b+\frac{3b^2}{4}-b-\frac{b^2}{4}\right)=(a-c)\left(b+\frac{b^2}{2}\right)$$

и получим решение системы (4.10):

$$q_1^e=q_2^e=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{(a-c)\left(b+\frac{b^2}{2}\right)}{(3b+b^2)\left(b+\frac{b^2}{2}\right)}=\frac{a-c}{b(3+b)}>0.$$

□

4.5. Вычисление прибылей ψ_i^e и гарантированных выигрышей Φ_i^e

Во-первых, непосредственной подстановкой (q_1^e, q_2^e) в $y_P(q_1,q_2) = \frac{b(q_1+q_2)}{2}$ убедимся, что $y_P(q_1^e,q_2^e)=\frac{a-c}{3+b}$.

Во-вторых, подставив

$$q^e = (q_1^e, q_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right)$$

и $y_P(q_1^e, q_2^e) = \frac{a-c}{3+b}$ в (4.1) – (4.3), определим гарантированные выигрыши игроков Φ_i^e, в которые входят

$$\psi_i^e = \psi_i(q_1^e, q_2^e, y_P(q_1^e, q_2^e)) = [a - b\,(q_1^e + q_2^e + y_P(q_1^e, q_2^e))]\,q_i^e - (cq_i^e + d) =$$

$$= \left[a - b\left(2\frac{a-c}{b(3+b)} + \frac{a-c}{3+b}\right)\right] \cdot \frac{a-c}{b(3+b)} - \left[\frac{c(a-c)}{b(3+b)} + d\right] =$$

$$= \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2),$$

а сами гарантированные выигрыши

$$\Phi_i^e = \Phi_i(q^e, y_P(q^e)) = \psi_i^e + \frac{y_P^2(q^e)}{2} = \left(\frac{a-c}{3+b}\right)^2 \frac{2+b}{2b} - d \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 4.3. *Парето-гарантированное равновесие в дуополии Курно с учетом импорта есть тройка* $(q^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, *где*

$$q^e = (q_1^e, q_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right),$$

а соответствующая прибыль i*-ой фирмы*

$$\psi_i^e = \psi_i(q_1^e, q_2^e, y_P(q_1^e, q_2^e)) = \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2).$$

Отметим, что в [23] было построено Парето–гарантированное равновесие для другой модели рынка – дуополии Хотеллинга при неопределенности.

5. Заключение

Изложенные в статье подходы лишь первые шаги в построении теории уравновешивания конфликтов при неопределенности. Изучение массы вопросов пока «остается за бортом» и ждет своих исследователей. Это концепция сильного равновесия, гарантированного по

Парето равновесия, индивидуально–оптимального равновесия [25], многошаговый и непрерывный вариант конфликта и et multa alia (и многое другое (лат.)). Кроме того, вместо внешней равновесности по Нэшу (в аналогах внешнего максимума из определения максимина) можно применять активное равновесие, равновесие угроз и контругроз [10], равновесие по Бержу–Вайсману [8]. Сама ориентация игроков на увеличение выигрышей может быть заменена на стремление уменьшить риски [13], или на одновременный учет выигрышей и рисков как равнозначных критериев [21,22]. Вот, по крайней мере, лишь малая толика вопросов, которые до сих пор не получили своего развития. Поэтому об этом направлении сказать «Acta est fabula!» (пьеса сыграна! Употребляется в значении: все кончено, конец наступил (лат.))[1] еще очень и очень рано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002.

2. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. *Математика конфликта и сотрудничества.* М.: Знание, 1973.

3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1987.

4. Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука, 1984.

5. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985.

6. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы.* Т.I. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

7. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.

[1]В античном театре такими словами зрителей оповещали о конце представления.

8. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Бержу – Вайсману.* М.: URSS, КРАСАНД, 2010.

9. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие по Равновесие по Нэшу.* М.: URSS, КРАСАНД, 2010.

10. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз.* М.: URSS, КРАСАНД, 2010.

11. Жуковский В.И. *Кооперативные игры при неопределенности и их приложения.* М.: URSS, 1999.

12. Жуковский В.И., Дочев Д.Т. *Векторная оптимизация динамических систем.* Болгария, Русе: Центр по Математике, 1981.

13. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. *Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.* М.: Эдиториал УРСС, 2004.

14. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 27–44.

15. Жуковский В.И., Молоствов В.С. *Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1990.

16. Жуковский В.И., Молоствов В.С. *Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1988.

17. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. *Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности.* Тбилиси: Мецниереба, 1991.

18. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова Думка, 1994.

19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976.

20. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

21. Кудрявцев К.Н. *О существовании гарантированных по выигрышам и рискам решений в кооперативных играх при неопределенности* // Системы управления и информационные технологии. 2010. № 1.1 (39). С. 148-152.

22. Кудрявцев К.Н. *Побочные платежи в одной кооперативной игре с учетом рисков* // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математика. Механика. Физика». 2011. № 10 (227). С. 25–28.

23. Кудрявцев К.Н., Стабулит И.С. *Гарантированное по Парето равновесие в дуополии Хотеллинга на плоскости* // Вестник ЮУрГУ, Серия «Математическое моделирование и программирование». 2012. № 40 (299), вып. 14. С. 177–181.

24. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1969.

25. Мащенко С.О. *Индивидуально–оптимальные равновесия некооперативных игр в отношениях предпочтения* // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 1. С. 171–179.

26. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Физматлит, 2007.

27. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИИЛ, 1962.

28. Bertrand J. *Book review of theorie mathematique de la richesse sociale and of recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses* // Journal de Savants. 1883. V.67. P. 499–508.

29. Cournot A. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de richesses.* Paris, 1838.

30. Hotelling H. *Stability in Competition* // Economic Journal. 1929. Vol. 39. P. 41–57.

31. Vaisbord E.M., Zhukovskiy V.I. *Introduction to Multi Player Differential Games and their Applications*. N.Y. etc.: Gordon and Breach, 1988.

32. Wald A. *Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis* // Annuals Math. Statist. 1939. V. 10. P. 299–326.

33. Zhukovskiy V.I. *Lyapunov Functions in Differential Games*. London and N.Y.: Taylor and Francis, 2003.

34. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin*. N.Y. etc.: Academic Press, 1994.

EQUILIBRATING CONFLICTS UNDER UNCERTAINTY. ANALOGUE OF A MAXIMIN

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc. (kudrk@mail333.com).

Abstract: In this paper we formalize two of the concepts of guaranteed equilibrium in a noncooperative game under uncertainty. We prove the existence of the guaranteed equilibrium in mixed strategies. We constructed the guaranteed equilibrium in Cournot duopoly with a import.

Keywords: maximin, non-cooperative game, uncertainty, mixed strategies, Nash equilibrium, vector-valued optimums.