Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.4, с. 3–13

УДК 519.83
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЯ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОЗИЦИОННЫХ ИГРАХ НА ГРАФАХ И ИХ ПОИСК*

Ирина А. Башлаева
Волгоградский Государственный Университет
400062, Волгоград, Университетский проспект, 100
e-mail: iraina15@yandex.ru

В работе выделены некоторые случаи наличия стационарного равновесия в неантагонистических играх на ориентированных графах с терминальным выигрышем по траектории. Из доказательства наличия стационарных равновесий следуют степенные алгоритмы их поиска.

Ключевые слова: позиционные игры, стационарные равновесия по Нэшу, ацикличность Курно, степенной алгоритм.

1. Введение

Рассмотрим следующую динамическую игру k лиц, которая определяется ориентированным графом G с множеством вершин V и множеством ориентированных ребер E. Вершины разбиты на множества хода $1, \ldots, k$ игроков $V = V_1, \ldots, V_k$. Ход заключается в передвижении фишки из текущей вершины по одному из исходящих ребер в очередную вершину.

В вершинах заданы векторы выигрышей игроков $p_1, \ldots, p_k$, где $p_i(v)$ – выигрыш i-го $(i = 1, \ldots, k)$ игрока в вершине v.

* Работа поддержана РФФИ-р-Поволжье (грант N 14-01-97002-а)

Некоторые вершины остановочные. То есть игрок в текущей остановочной вершине может остановить игру, и тогда выигрыши игроков определяются вектором платежей в данной вершине. Заметим, что если в игре возникает цикл, то игроки получают бесконечные положительные платежи. Цель каждого игрока – минимизация платежа, поэтому цикл не благоприятен. Игру будем обозначать $(V : V_1, \ldots, V_k; E; p)$. В дальнейшем будем рассматривать некоторые подграфы начальной игры, функция выигрышей и разбиение на множества перехода хода переносятся на остаточные вершины непосредственно (функцию выигрышей и разбиение на множества хода игроков в обозначениях игры будем опускать).

Когда граф игры ациклический, то обратной индукцией по дереву игры доказывается теорема Цермело-Куна о наличии равновесия по Нэшу в таких играх [2]. Когда граф общей структуры, ситуация усложняется. В случае почти ациклических игр, когда повторение вершины есть самый неблагоприятный исход для всех игроков, наличие равновесия остается открытой проблемой. В работе [4] проведен анализ таких игр в контексте наличия равновесия в стационарных стратегиях. Доказано наличие стационарного, неравномерного (зависимого от начала) равновесия в некоторых частных ситуациях: для игр двух лиц, для игр с единственной контролирующей вершиной каждого игрока, для игр с не более тремя конечными вершинами. Важной техникой обоснования утверждений о наличии равновесия по Нэшу является ацикличность Курно. Неформально говоря, рассматривается последовательность ситуаций, когда текущую ситуацию улучшает для себя некоторый игрок при фиксированных стратегиях противников. Если в любой такой последовательности улучшений ситуации не повторяются, то в случае конечного множества стратегий мы обязательно придем в ситуацию равновесия по Нэшу. В работе [4] проведен анализ, когда ацикличность Курно имеет место. В работе [5] вводятся специальные ограничения на изменение стратегии в ситуации, в результате получены некоторые интересные критерии наличия ацикличности Курно. Мы доказываем наличие стационарных равновесий в следующих случаях:

1) В любой бинарной, позиционной игре $(V, E; p)$ (платежи из множества $\{0, 1\}$) существует стационарное, равномерное (независящее

от начальной вершины) равновесие.

2) В любой игре с циклическим графом существует стационарное, неравномерное в общем случае (зависящее от начала) равновесие. Циклическим графом называют граф, вершины которого разбиты на множества $V = H_1, \ldots, H_t$. Каждое множество вершин $H_1, \ldots, H_t$ целиком принадлежит множеству права хода одного и того же игрока. Локальная структура графа $G(H_i, H_{i+1})$, $i = 1, \ldots, t$ полна. То есть игрок в любой вершине множества H_i, $i = 1, \ldots, t-1$ имеет возможность перевести игру в любую вершину множества $H_{i+1}, i = 1, \ldots, t-1$, и только в эту компоненту. В вершинах множества H_t – в вершины множества H_1.

Для первого случая показана ацикличность Курно лексикографическим возрастанием потенциальных наборов, связанных с последовательностью улучшений ситуаций. Сходимость такой последовательности экспоненциальная. Далее дан более детальный анализ позиционных игр. Неформально говоря, мы проводим обратную индукцию по структуре ациклического графа сильносвязных компонент позиционного графа начальной игры, начиная с тупиковых. Из доказательства следует степенной алгоритм решения таких игр.

2. Стационарные равновесия в бинарных, позиционных играх

Определение 2.1. *Стационарной стратегией игрока называется набор ребер, не более одного в каждой вершине рассматриваемого игрока (если в вершине нет выбранного ребра, то в этой вершине игрок останавливает игру, в противном случае – передвигает фишку по выбранному ребру).*

Теорема 2.1. *В любой бинарной позиционной игре* $(V, E; p)$ *существует равномерное стационарное равновесие по Нэшу.*

Примечание 2.1. Граф, задаваемый набором стационарных стратегий игроков $s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_k$, разбивается на компоненты связности с множеством вершин $V_1, \ldots, V_l$ – деревья с остановочными, корневыми вершинами соответственно $w_1, \ldots, w_l$, или циклические графы с одним исходящим ребром в каждой вершине.

Дадим вначале доказательство, используя конечность процедуры улучшения ситуации (ацикличность Курно).

Рассмотрим две последовательные ситуации s и s'. Каждой ситуации поставим в соответствие числовую последовательность следующем образом. Ситуация стационарных стратегий s – есть набор деревьев $D_1, \ldots, D_k$ с корневыми вершинами $v_1, \ldots, v_k$ и циклических компонент $C_1, \ldots, C_t$. Дереву D_i поставим в соответствие целочисленную последовательность p_i. Дерево разбито на уровни, начиная от корневой вершины: $U_0^i, \ldots, U_{k_i}^i$ (единственное ребро, исходящее из некорневой вершины, ведет в вершину соседнего нижнего уровня). Вершины уровня U_j^i, $j = 0, \ldots, k(i)$ разобьем на два непересекающихся множества: A_j^i – победители рассматриваемого уровня (платеж в корневой вершине такого игрока равен 0) и B_j^i – проигравшие (платеж в корневой вершине равен 1). Тогда числовая последовательность имеет вид

$|A_0^i|, -|B_0^i|, \ldots, |A_{k(i)}^i|, -|B_{k(i)}^i|.$

Для циклических компонент $C_i, i = 1, \ldots, t$ поставим в соответствие число $-|C_1| - \ldots - |C_t|$. Таким образом, каждой ситуации будет поставлен в соответствие упорядоченный набор $n+1, n = |V|$ последовательностей, по одной для каждого возможного дерева в корневой вершине (последовательности отсутствующей корневой вершины пустые), и числа с отрицательным знаком вершин в циклической компоненте. Набор последовательностей для ситуации s обозначим $p : p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$, набор последовательностей для очередной ситуации s' обозначим $p' : p'_1, \ldots, p'_n, p'_{n+1}$. Если для текущей ситуации s есть лучшая равномерная стационарная стратегия (не ухудшающая положение игрока для всех начальных вершин, и улучшающая хотя бы для одной начальной вершины), то есть лучшая локальная стратегия, отличающаяся от начальной только заменой одного ребра на другое в некоторой единственной вершине. Это следует из примечания 2.1 (если есть путь из компоненты, где игрок проиграл, в компоненту, где он выиграл, то есть и ребро с тем же свойством). Если улучшение невозможно для всех игроков, то пришли в равновесную по Нэшу ситуацию. Скажем, что упорядоченный набор $p : p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$ меньше набора $p' : p'_1, \ldots, p'_n, p'_{n+1}$, если для всех $s = 1, \ldots, n+1$ выполнено условие – последовательность p_s лексикографически не больше последовательности p'_s, и хотя бы для одного $s = 1, \dots, n+1$ последовательность p_s лексикографически меньше последовательности p'_s. Справедливо следующее утверждение монотонности: упорядоченный набор $p : p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$ меньше набора $p' : p'_1, \dots, p'_n, p'_{n+1}$. Действительно локальное улучшение переведет некоторую вершину из дерева, где проигрыш в корневой вершине D_i, в дерево с выигрышем в корневой вершине D_j. Поэтому первое изменение в последовательности p_i будет связано с сокращением некоторого множества B^i_r, и первое изменение в последовательности p_j связано с увеличением множества $A^i_{r'}$. Остальные деревья или циклические компоненты не изменятся. Если вершина перешла из циклической компоненты в древесную, то также происходит увеличение двух компонент.

На рис. 1 приведен пример игры двух лиц: белых и черных. Рассмотрен переход белой вершины из дерева, где был проигрыш в корневой вершине D_i, в дерево с выигрышем в корневой вершине D_j (платеж белых – первая компонента, платеж черных – вторая компонента). Сплошные линии – ребра стационарных стратегий ситуации, пунктиром обозначено ребро белых, которое и дало улучшение ситуации белых. Даны числовые последовательности $p_i, p_j; p'_i, p'_j$, лексикографическое увеличение которых и можно проверить.

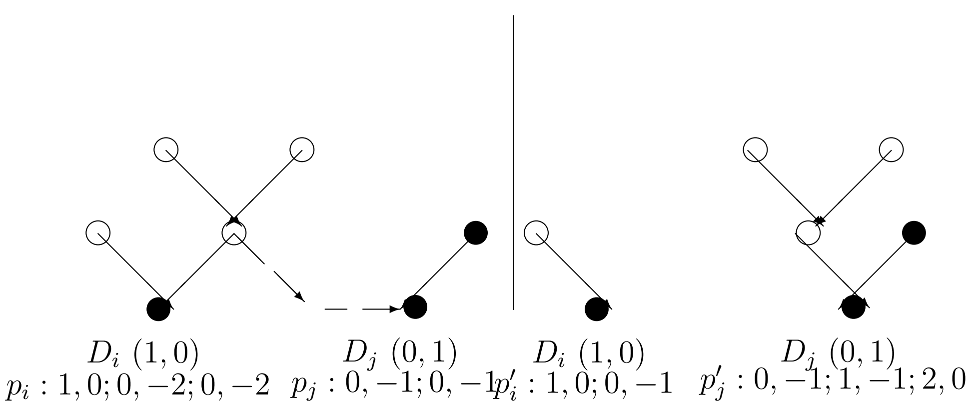

Рисунок 1.

Замечание 2.1. Для {0,1,2} выигрышей последовательность улучшений может содержать цикл. Пример представлен в работе [3].

Замечание 2.2. Сложность сходимости такой конструкции экспоненциальна в худшем случае. Примеры можно извлечь из экспоненциальной оценки алгоритма потенциальных преобразований работы [1].

Теперь дадим доказательство данного утверждения, из которого следует степенной алгоритм поиска равновесной, равномерной ситуации.

Будем предполагать, что все вершины остановочные. Доказательство утверждения проведем индукцией по числу вершин в графе игры. Рассмотрим максимальную по включению компоненту сильной связности графа игры, из которой нет переходов в непустое дополнение этой компоненты. Тогда равновесие в таком тупике позволяет провести индуктивный переход. Действительно, если игра началась в тупиковой компоненте, то она при любой ситуации и завершится в ней. После того, как будет найдена равновесная ситуация в тупике, нужно подправить дополнение вершинами, в которых существуют благоприятные переходы в тупик, и вершинами, из которых все переходы неблагоприятны и ведут в тупик. Тогда переходы из остатка в тупик возможны только неблагоприятные. После этого можно провести индуктивный шаг к остатку дополнения. Проигравшие в остатке не улучшат своего положения переходом в тупиковую компоненту.

Дадим формальное представление доказательства. Для игры с одной вершиной – утверждение очевидно.

Пусть утверждение справедливо для любых игр с числом вершин n в графе игры. Рассмотрим игру $(V; E; p)$, $|V| = n + 1$.

Рассмотрим случай, когда допускаются вершины W, остановка в которых дает выигрыш игроку вершины. Рассмотрим замыкание W' множества вершин W. Начальные деревья – изолированные вершины $W : \{w_1, \ldots, w_l\}$. Если в вершине $v \in \{V - W\}$ есть переход в корневое дерево с выигрышем игрока v в корневой вершине этого дерева, то добавляем эту вершину к соответствующему дереву вместе с рассмотренным ребром. Если в вершине $v \in \{V - W\}$ все переходы игрока v ведут в корневые деревья с проигрышем в корневых вершинах, то добавляем эту вершину вместе с любым ребром к дереву, куда ведет это ребро. Этот процесс замыкания проводим до тех пор, пока можно добавить новую вершину. Множество полученных деревьев, и множество отмеченных ребер обозначим как $W'_1, \ldots, W'_l$,

$S(W')$. Пополненное множество вершин обозначим W'. Полученные деревья удовлетворяют условию запрета. Если вершина в дереве с проигрышем в корневой вершине, то и любые переходы для данного игрока ведут в деревья с проигрышем этого игрока в корневой вершине (остановка в вершинах отличных от корневых $W : \{w_1, \ldots, w_l\}$ – также проигрыш игрока вершины). Если $W' = V$, утверждение доказано. Ситуация стационарных стратегий $S(W')$ искомая, в силу условия запрета. Пусть $H = V - W'$ не пусто.

Для подграфа на множестве вершин H применим предположение индукции.

Рассмотрим равновесную, равномерную ситуацию $S(H)$ в графе H.

Тогда объединение стратегий $S(H)$ и $S(W')$ – искомая, равномерная ситуация стационарных стратегий в силу сформулированных условий запрета. У проигравших для игры на вершинах H отсутствуют переходы в деревья из множества $W'_1, \ldots, W'_l$ с их выигрышем в корневой вершине, поэтому остаются переходы только в деревья из множества $W'_1, \ldots, W'_l$ с проигрышем в корневых вершинах; у проигравших для игры на вершинах W' вообще отсутствуют переходы в вершины H. Поэтому либо игра все время будет проходить в вершинах H (с проигрышем рассматриваемого игрока), либо на некотором шаге перейдет в граф W' и останется до окончания партии опять же с проигрышем игрока.

Поэтому считаем, что остановка дает проигрыш останавливающему игроку во всех вершинах.

Определение 2.2. *Тупиком W ориентированного графа $(V; E)$ назовем сильно связный граф, из которого нет переходов в дополнение вершин $V - W$: $E(W, V - W) = \emptyset$ (здесь $E(R, T)$ – множество ребер, ведущих из множества R в множество T).*

Например, отдельная вершина, из которой нет выходящих вершин – есть тупик. Весь граф, когда он сильно связный – есть тупик.

Утверждение 2.1. *В любом ориентированном графе есть тупик. Вычисление тупика осуществляется за степенное время поиском в ширину.*

Утверждение очевидно. Достаточно рассмотреть структуру из максимальных по включению сильно связных компонент. Каждой компоненте ставим в соответствие вершину. Из одной вершины-компоненты переводим ребро в другую компоненту, если в начальном графе есть соответствующий путь. Получится ациклический граф, тупиковая вершина которой соответствует тупику в начальном графе.

Примечание 2.2. Пусть множество вершин W задает тупик в графе G. Тогда в игре, задаваемой множеством вершин W, любое стационарное, равномерное равновесие, дополненное произвольным набором стратегий в $V - W$, есть равновесие в исходной игре (когда игра начинается в любой вершине тупика). Это примечание очевидно в силу того, что переходов из тупика в дополнение нет, поэтому дополнение не влияет на игру, которая началась в центре.

Рассмотрим тупик W в графе игры. Рассмотрим вектор выигрышей $p(v)$ в какой-либо вершине $v \in W$. Множество игроков-победителей этого множества обозначим A, проигравших B. Рассмотрим любой ациклический набор стратегий достижимости вершины v и остановки в вершине v- $S(W)$ в графе тупика. Набор таких стратегий дает искомое дерево с корневой вершиной v в силу того, что у проигравших B вообще нет корневых вершин, где они имеют выигрыш 0 (остановка на своем ходе также дает проигрыш игрока).

Если дополнение $V_1 = V - W$ пусто, то утверждение доказано. Набор стратегий $S(W)$ искомый. Пусть дополнение $V_1 = V - W$ не пусто.

Подправим тупик W. Будем добавлять новые вершины из множества V_1 к дереву по процедуре замыкания. Если в вершине $v \in \{V_1\}$ есть переход в построенное дерево с выигрышем игрока v в корневой вершине этого дерева, то добавляем эту вершину к соответствующему дереву вместе с рассмотренным ребром. Если в вершине $v \in \{V_1\}$ все переходы игрока v ведут в построенное дерево с проигрышем в корневой вершине, то добавляем эту вершину вместе с любым ребром к дереву, куда ведет это ребро. Этот процесс замыкания проводим до тех пор, пока можно добавить новую вершину. Полученное дерево и множество отмеченных ребер – стационарных стратегий, обозначим как S_2 . Пополненное множество вершин обозначим V_2. На рис. 2 дана иллюстрация процесса замыкания. Черными обозначены победители в корневой вершине основного дерева W, белыми – проигравшие. Для победителей достаточно одного ребра, для проигравших все ребра должны вести в дерево с проигрышем в корневой вершине.

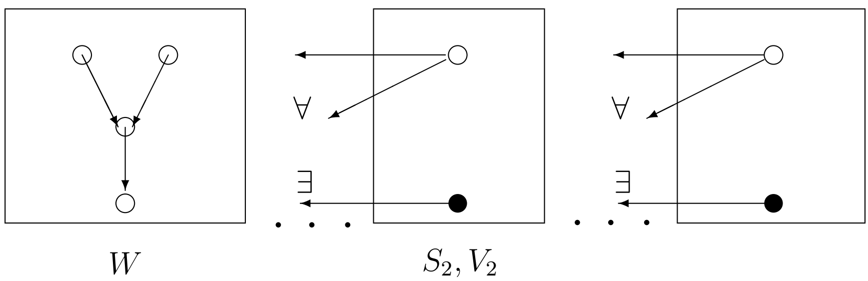

Рисунок 2.

Если вершина v игрока принадлежит построенному дереву с проигрышем в корневой вершине, то у такого игрока все переходы ведут в построенное дерево с проигрышем этого игрока. Поэтому у этого игрока нет возможности перейти в дополнение $V_3 = V - V_2$. Для начального множества это верно, так как это – тупик. Пусть $v \in V_3$. Тогда для игрока v нет возможности перевести игру в корневое дерево с его выигрышем в корневой вершине этого дерева. Поэтому, применяя предположение индукции для игры с графом на вершинах V_3, получаем искомое утверждение. Проигравшие компоненты V_3 не улучшат своего положения, если переведут игру в V_2, а проигравшие игроки вершин V_2 не имеют возможности перевести игру в V_3. Для победителей нет смысла менять свою стратегию.

Примечание 2.3. Сложность алгоритма из приведенного доказательства степенная по числу вершин графа переходов – один раз применяется предположение индукции.

За степенное время избавляемся от вершин с выигрышем останавливающих игроков. За степенное время находим тупик, строим его замыкание и применяем рекурсивный шаг к остатку. Действительно, обозначим $f(n)$ число элементарных операций на графе игры с n вершинами. Тогда первый шаг построения замыкания на множестве выигрывающих остановочных вершин составит степенное время (сложность поиска в ширину не превысит числа ребер в графе).

Второй шаг построения сильно связных компонент и, следовательно, тупика также не превысит степенного времени. После этого применяется замыкание тупика степенной сложности. После остается шаг рекурсии. Обратный шаг рекурсии – объединение стратегий, линеен по числу вершин. Поэтому функция временной сложности удовлетворяет соотношению $f(n) \leq cn^{const} + f(n-1)$. Очевидно, решение этой рекурсии – степенная функция.

3. Стационарные равновесия в играх с циклической структурой позиционного графа переходов

Определение 3.1. *Циклическим графом называют граф* $V = V_1 \cup \ldots. \cup V_t, E = V_1 * V_2 \cup V_2 * V_3 \cup, \ldots, \cup V_t * V_1$. *Здесь* $V = V_1 \cup \ldots. \cup V_t$ *непересекающиеся множества вершин, каждое множество целиком принадлежит праву одного и того же игрока. Из всех вершин класса* V_i, $i = 1, \ldots, t-1$ *во все вершины класса* V_{i+1} *направлены ориентированные ребра (для класса* V_t *– во все вершины класса* V_1.

Предложение 3.1. *В любой игре с циклическим графом (все вершины остановочные) существует стационарное равновесие.*

В общем случае равновесие неравномерное (зависит от начала).

Доказательство. Для определенности будем считать, что начальная вершина v содержится в множестве V_1. Сведем такую игру к ациклической игре и применим теорему Цермело. Совершим следующие преобразования с графом игры. Удалим все ребра из всех вершин множества V_1 за исключением ребер вершины v. Во всех вершинах множества V_t удалим ребра в вершину v. В результате получим ациклический граф, в котором по теореме Цермело существует набор стационарных стратегий S. Набор таких стратегий составит стационарное равновесие и для начального графа. Действительно, для первого игрока добавление удаленных ребер не изменит области достижимости вершин графа из ребер стратегий S, поэтому не улучшит положение первого игрока. Использование удаленных ребер для вершин V_t приводит только к циклу. □

Примечание 3.1. Алгоритм конструкции доказательства степенной – линейный по числу ребер в графе переходов.

Благодарю рецензента за сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурвич В.А., Карзанов А.В., Хачиян Л.Г. *Циклические игры и нахождение минимаксных средних циклов в ориентированных графах* // ЖВМ МФ. 1988. Т. 28. N. 9. С. 1407–1417.

2. Кун Г.У. *Позиционные игры и проблема информации.* Позиционные игры (под редакцией Н.Н. Воробьева и И.Н. Врублевской). М.: Наука. 1967. С. 13–40.

3. Boros E., Elbassioni K., Gurvich V., Makino K. *On Nash equilibria and improvement cycles in pure positional strategies for Chess-like and Backammon-like n-person games* // Discrete Mathematics. 2012. V. 312. P. 772–788.

4. Boros E., Gurvich V. *On Nash-solvability in pure stationary strategies of finite games with perfect in formation which may have cycles* // Mathematical Social Sciences. 2003. V. 46. P. 207–224.

5. Kukushkin N.S. *Acyclicity of improvements in finite game forms* // Int. Journal of Game Theory. 2011. V. 40. P. 306–317.

A STATIONARY EQUILIBRIA IN NON-ZERO-SUM GAMES ON A POSITION GRAPH AND THEIR SEARCH

Irina A. Bashlaeva, Volgograd State University, postgraduate (iraina15@yandex.ru).

Abstract: We study existence of Nash equilibria in non-zero-sum games with terminal prize. From the proof of presence stationary equilibria algorithms search for them follow.

Keywords: positional games, stationary equilibria, polynomial algorithm.