Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.2, с. 105–136

УДК 517.977.8+517.977.52
ББК 22.161.8+22.18

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Дмитрий В. Хлопин*
Институт математики и механики
имени Н.Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Данная работа уточняет необходимые условия равновесия по Нэшу для игровых задач на бесконечном промежутке времени в классе программных стратегий. Для сопряженных переменных получено необходимое асимптотическое условие для равновесия, построенного на основе критерия «равномерно слабо-обгоняющее оптимальное решение». В ряде случаев (в частности, при критерии «сильное оптимальное решение») это позволяет выразить сопряженную переменную явно. С.М. Асеев, А.В. Кряжимский, В.М. Вельев использовали подобное выражение как необходимое условие оптимальности в некоторых задачах управления. Рассматривается два примера: предложенная Зоргером модель олигополии типа Ланчестера и линейная игра двух лиц с одинаковыми возможностями и противоположными интересами, имеющая однако, совершенно разные по результату равновесия по Нэшу.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, дифференциальные игры, задача на бесконечном промежутке, необходимые условия для равновесия, краевое условие на бесконечности, обгоняющее равновесие, неограниченная цена.

---

* Работа поддержана грантом РФФИ № 12-01-31172

1. Введение

Для игр в классе программных стратегий необходимые условия в виде принципа максимума Понтрягина [6] легко выписываются (см., например, [19]). Но в случае бесконечного промежутка времени, если правый конец нефиксирован, эти условия не дают «полную» систему соотношений, и, вообще говоря, требуют условия трансверсальности на бесконечности (подробнее см. [1,33,36,38-40]). Основной трудностью для построения краевого условия, дополняющего систему принципа максимума до полной, является требование выделить в линейном уравнении (для сопряженной переменной) асимптотику, которой удовлетворяет хотя бы одно, но и не все его решения. Для отдельных классов задач управления это удавалось сделать при сильных ограничениях на рост переменных, отметим [1-2,14-17,38]. В данной работе предлагается краевое условие, не требующее таких условий; его построение основано на идее, сформулированной ранее в [38].

Отметим, что в задачах на бесконечном промежутке имеется несколько критериев оптимальности [21,27,42,45,46]. В данной работе для построения понятия равновесия по Нэшу используются критерии «равномерно слабо-обгоняющее оптимальное» и «сильно оптимальное» решения. Второе гарантирует, что каждый игрок не может изменением своего управления улучшить свой результат в каждый момент из некоторой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени. Первое из определений гарантирует лишь, что выбранное управление проигрывает оптимальному для данного момента тем меньше (ближе к нулю), чем больше номер этого момента. Как в том, так и в другом варианте равновесия по Нэшу для сопряженной переменной каждого игрока в данной работе построены необходимые асимптотические условия на бесконечности. В ряде случаев эти условия подобны явному виду сопряженной переменной, полученному для некоторых задач управления в работах [1,2,14-17].

Работа строится следующим образом. Сначала вводятся все основные определения и постановки, затем выписываются соотношения принципа максимума и предлагаемое краевое условие. Формулируется основная теорема и ее следствия, затем – формулы для сопряженной переменной. В следующем разделе разобраны примеры. Последние три раздела посвящены доказательству основной теоремы и обсуждению вопросов существования таких равновесий.

2. Определения и обозначения

Конечномерное евклидовое пространство, фазовое пространство управляемой системы, будем обозначать через $\mathbb{X}$. В качестве промежутка времени будет $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Через E будем обозначать вспомогательные конечномерные евклидовы пространства, через $\mathcal{B}(E)$ – σ-алгебры их борелевских подмножеств.

Пусть имеется m игроков, каждому из которых соответствует свое конечномерное евклидовое пространство $\mathbb{U}_i$ и многозначное отображение $U_i : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{U}_i$. Введем отображение $U_{all} : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{U}_{all}$ правилом: для всех $t \in \mathbb{T}$ $U_{all}(t) \triangleq (U_1(t), \ldots, U_m(t))$, где $\mathbb{U}_{all} \triangleq \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \cdots \times \mathbb{U}_m$.

Будем рассматривать игру в рамках программных управлений. Под множеством всевозможных допустимых управлений $\mathfrak{U}_i$ каждого игрока будем понимать множество всех измеримых по Борелю локально ограниченных селекторов многозначного отображения U_i. Топологию на $\mathfrak{U}_i$ зададим в силу вложения $\mathfrak{U}_i \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{U}_i)$.

Заменяя в последнем определении «i» на «all» получаем топологическое пространство $\mathfrak{U}_{all}$ всевозможных наборов допустимых управлений игроков, легко видеть, что оно является произведением топологических пространств $\mathfrak{U}_i$ по всем i. Теперь для всякого набора $u \triangleq (u_1, \ldots, u_m) \in \mathfrak{U}_{all}$, для всякого управления $\bar{u}_i \in \mathfrak{U}_i$ игрока i введем обозначение $u|\bar{u}_i \triangleq (u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \bar{u}_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)$; тогда множество $\{u_1\} \times \cdots \times \{u_{i-1}\} \times \mathfrak{U}_i \times \{u_{i+1}\} \times \cdots \times \{u_m\} \subset \mathfrak{U}_{all}$ можно обозначить как $u|\mathfrak{U}_i$.

Всюду далее предполагается, что:

Условие (**u**) : для каждого игрока компактнозначное отображение U_i интегрально ограничено на компактах и имеет измеримый график $Gr\,U_i$ $(Gr\,U_i \in \mathcal{B}(\mathbb{T} \times \mathbb{U}_i))$.

Условие (**fg**) : динамика системы $f : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \times \mathbb{U}_{all} \mapsto \mathbb{X}$ и целевые функции всех игроков $g_i : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \times \mathbb{U}_{all} \mapsto \mathbb{R}$, вместе со своими производными по x, – локально липшицевые интегрально ограниченные на компактах отображения Каратеодори, кроме того f удовлетворяет условию подлинейного роста по x.

Пусть дана управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_*, \quad t \in \mathbb{T}, \quad x \in \mathbb{X}, \quad u \in U_{all}(t). \qquad (2.1a)$$

Теперь всякому реализовавшемуся управлению $u \in \mathfrak{U}_{all}$ можно сопоставить решение уравнения (2.1a), это решение единственным образом может быть продолжено на все $\mathbb{T}$, обозначим его через $x(u;\cdot)$. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений [4] это отображение непрерывно отображает $\mathfrak{U}_{all}$ в $C_{loc}(\mathbb{T},\mathbb{X})$.

Пусть всякий игрок i желает максимизировать на траекториях системы (2.1a) при достаточно больших T функционал

$$J_i(u;T) \triangleq \int_{[0,T]} g_i\big(t, x(u;t), u(t)\big)dt \to \max. \tag{2.1b}$$

Отметим, что вообще говоря, данный интеграл не обязан ни для всех допустимых управлений игроков, ни для каких-либо управлений, при $T \to \infty$ сходиться ни к конечному числу, ни к бесконечности. В этом случае требуется формализовать, что понимать под оптимальностью значения этого интеграла при сколь угодно больших T.

В задачах управления на бесконечном промежутке предложено несколько серий таких определений оптимальности [20,21,27,42]. Нас интересует прежде всего оптимальность на основе понятия «обгоняющее» (overtaking), а именно «равномерно слабо-обгоняющее» (weakly uniformly overtaking); см. [34], историю вопроса в [21,26,34]. В работах [23-25] было сформулировано понятие «обгоняющее равновесие по Нэшу» (Nash overtaking-equilibrium). Построим подобное определение на основе критерия «равномерно слабо-обгоняющее» ("weakly uniformly overtaking"; см., например, [21,27]):

Определение 2.1. *Будем говорить, что управление $u^0 \in \mathfrak{U}_{all}$ является равновесием по Нэшу, если для каждого игрока i, найдутся сходящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел α_n, а также неограниченно возрастающая последовательность моментов времени τ_i^n такие, что при всех $\bar{u}_i \in \mathfrak{U}_i$ и при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$J_i(u^0;\tau_i^n) > J_i(u^0|\bar{u}_i;\tau_i^n) - \alpha_n. \tag{2.2}$$

Отметим, что в этом определении для всякого игрока i имеется неограниченная последовательность $\tau_i \triangleq (\tau_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ моментов времени τ_i^n, вдоль которой этот игрок собственно и оптимизирует свой показатель качества; таким образом для каждого такого равновесия имеется набор неограниченно возрастающих последовательностей $\tau \stackrel{\triangle}{=} (\tau_1, \ldots, \tau_m)$. Как следствие, в том случае, когда нам нужно уточнить какой именно набор τ использовался в определении равновесия по Нэшу, мы будем говорить о τ-равновесии. Всюду далее будем предполагать, что для некоторого набора τ такое τ-равновесие $u^0 \in \mathfrak{U}_{all}$ существует. Вопрос существования такого равновесия рассматривается в конце раздела 7.

Предыдущее определение можно усилить, возьмем за основу критерий "strongly optimal"(см., например, [21,27]):

Определение 2.2. *Будем говорить, что для игрока i τ-равновесие по Нэшу сильное, если $J_i(u^0; \tau_i^n) \geq J_i(u^0|\bar{u}_i; \tau_i^n)$ при всех $\bar{u}_i \in \mathfrak{U}_i$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.*

Отметим также, что можно было бы строить равновесие по Нэшу, требуя существование пределов $J_i(u; t)$ при $t \to \infty$. В задачах управления такие определения оптимальности нередки, например в [20] это одно из требований допустимости управления, а в [21,27] существование такого предела – дополнительное требование для сильно оптимального управления. Однако такое требование, хотя бы и для управления, доставляющего равновесие по Нэшу, может значительно снизить возможности игры, оставляя, как в примере 6.1, каждому игроку лишь самое невыгодное равновесие.

3. Соотношения принципа максимума

Для динамических игр в классе программных стратегий можно записать необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума. Для задач на конечном промежутке это достаточно подробно описано, например в монографии [19].

Определим для всякого игрока i функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}_i : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \times U_{all} \times \mathbb{T} \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ правилом: $\mathcal{H}_i(x, t, u, \lambda, \psi) \stackrel{\triangle}{=} \psi f\big(t, x, u\big) + \lambda g_i\big(t, x, u\big)$. Введем соотношения

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big); \tag{3.1a}$$
$$-\dot{\psi}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}\big(x(t), t, u(t), \lambda, \psi_i(t)\big); \tag{3.1b}$$
$$\sup_{p_i \in U_i(t)} \mathcal{H}_i\big(x(t), t, u(t)|p_i, \lambda, \psi_i(t)\big) = \mathcal{H}_i\big(x(t), t, u(t), \lambda, \psi_i(t)\big); \tag{3.1c}$$
$$||\psi(0)||_{\mathbb{X}} + \lambda = 1. \tag{3.1d}$$

Легко видеть, что для всех $u \in \mathfrak{U}_{all}$, при любых начальных условиях система $(3.1a)$,$(3.1b)$ имеет локальное решение, и всякое решение этих соотношений продолжимо на все $\mathbb{T}$.

Обозначим через $\mathfrak{Y}_i$ семейство всевозможных решений $(x, u^0|u_i, \lambda, \psi_i) \in C_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{X}) \times u^0|\mathfrak{U}_i \times [0,1] \times C_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$ системы $(3.1a)$,$(3.1b)$,$(3.1d)$ на $\mathbb{T}$, через $\mathfrak{Z}_i$ – семейство тех решений из $\mathfrak{Y}_i$, для которых почти всюду на $\mathbb{T}$ выполнено также $(3.1c)$.

Соотношения принципа максимума, выписанные выше, хорошо известны, их необходимость для задачи управления показана прежде всего в [6,33], для игровых задач отметим [19,23-25], историю вопроса можно посмотреть например в [19,§6.9]. Заметим, однако, что и в задачах управления на бесконечном промежутке эти соотношения не полны, и, в общем случае, требуют дополнительного условия, краевого условия на бесконечности (подробнее см. [1,33,36,38-40]). При построении таких условий основной трудностью является не обилие различных критериев оптимальности, а требование выделить в линейном уравнении (для ψ) асимптотику, которой удовлетворяет хотя бы одно, но и не все ее решения (см. [1, § 6 и § 16],[33,38]).

В качестве такого условия для задач управления со свободным правым концом в работах [38,39] было предложено следующее: пусть решение принципа максимума будет поточечным пределом решений той же системы, сопряженная переменная которых зануляется во все более поздние моменты времени.

Определение 3.1. *Будем говорить, что нетривиальное решение $(x^0, \lambda^0, \psi_i^0)$ соотношений принципа максимума $(3.1a)$–$(3.1d)$ τ-исчезающее (или просто исчезающее), если существует сходящаяся к $(x^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ равномерно на всяком компакте последовательность* *решений* $(x_i^n, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ *системы*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(t, x(t), u^0(t)\big); && (3.2\mathrm{a}) \\ \dot{\lambda}_i(t) &= 0; && (3.2\mathrm{b}) \\ -\dot{\psi}_i(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}\big(x(t), t, u^0(t), \lambda_i, \psi_i(t)\big) && (3.2\mathrm{c}) \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\psi_i^n(\tau_i'^n) = 0 \qquad (3.2\mathrm{d})$$

для некоторой подпоследовательности τ_i' *последовательности* τ_i.

Далее будет показано, что существование для каждого игрока τ_i-исчезающего решения принципа максимума необходимо для τ-равновесия по Нэшу. Для сильного равновесия по Нэшу можно ввести более сильное необходимое условие.

Будем говорить, что решение $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi_i^0)$ строго τ-исчезающее, если в предыдущем определении можно принять $x_i^n \equiv x^0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, потребовав также, чтобы соотношение $(3.1c)$ было выполнено для каждого $(x^0, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ $(n \in \mathbb{N})$ почти всюду на $[0, \tau_i^n]$.

4. Необходимое краевое условие принципа максимума

Теорема 4.1. *В условиях* $(\mathbf{fg}), (\mathbf{u})$ *для всякого* τ*-равновесия по Нэшу* $(u_1^0, \ldots, u_m^0) \in C_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{X}) \times \mathfrak{U}_{all}$ *и соответствующей ему траектории* x^0*, для всякого игрока* i *найдутся такие* $\lambda_i^0 \in [0,1], \psi_i^0 \in C(\mathbb{T}, \mathbb{X})$*, что*

1) $(x^0, u^0, \lambda_i^0, \psi_i^0) \in \mathfrak{Z}_i$*, то есть этот кортеж удовлетворяет всем соотношениям принципа максимума* $(3.1a)$*-*$(3.1d)$*;*

2) $(x^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ *–* τ*-исчезающее решение, то есть для некоторой подпоследовательности* $\tau_i' \subset \tau_i$ *тройка* $(x^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ *является равномерным на всяком компакте пределом решений* $(x_i^n, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ *системы* $(3.2a)$*–*$(3.2c)$ *с краевым условием* $(3.2d)$*.*

Следствие 4.1. *Если для игрока* i *данное равновесие сильное, то для него существует строгое* τ*-исчезающее решение* $(x^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ *соотношений принципа максимума* $(3.1a)$*-*$(3.1d)$*, то есть для него можно дополнительно считать, что* $x^n \equiv x^0$*, и все* $(x^0, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ *удовлетворяют* $(3.1c)$ *почти всюду на* $[0, \tau_i^n]$*.*

Доказательство теоремы 4.1 вынесено в разделы 7–9. Очертим здесь лишь его основной ход. Показывается (см. раздел 8) существование интегральных показателей, малость которых гарантирует нахождение траектории управляемой системы внутри заданной интегральной воронки, порожденной управлением u^0. Для каждого игрока i рассматривается последовательность задач оптимизации на промежутках вида $[0, \tau_i^n]$, при этом в функционал (2.1b) добавляется в качестве штрафа построенный ранее зависящий лишь от t и u_i интегральный показатель. В рамках обобщенных управлений (раздел 7) эти задачи имеют оптимальные решения, для них выписываются соответствующие соотношения принципа максимума. Переходом к подпоследовательности находится как предел таких решений, так и выполняющиеся для него соотношения принципа максимума. Из определения равновесия будет следовать малость штрафа, откуда предельное решение будет обязано порождаться лишь доставляющим равновесие управлением u^0, в частности $(x^0, u^0, \lambda^0, \psi^0)$ обязано удовлетворять принципу максимума. Чтобы доказать, что оно также является τ-исчезающим, из правых концов оптимальных на отрезках $[0, \tau_i^n]$ обобщенных решений, в обратном времени, выпускаются порожденные оптимальным управлением u^0 решения $(x_i^n, \lambda_i^n, \psi_i^n)$. Они содержатся в порожденной u^0 интегральной воронке траекторий вокруг (x^0, λ^0, ψ^0); в силу так построенного штрафа ширина воронки в начальный момент времени может быть сделана сколь угодно малой, следовательно построенная последовательность в начальный момент времени сходится к $(x^0(0), \lambda^0, \psi^0(0))$. Теперь из теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений отсюда следует требуемая сходимость и на каждом конечном промежутке.

Отметим также, что ключевые вспомогательные утверждения (предложение 7.1 и лемма 8.1), показанные в [35], для полноты изложения приведены здесь вместе с доказательствами.

5. Формулы для исчезающего решения

Для всякого начального условия $\xi \in \mathbb{X}$ будем обозначать порожденное управлением $u \in \mathfrak{U}$ решение x уравнения (3.2a) с условием $x(0) = \xi$ через $x(\xi, u; \cdot)$.

Воспользуемся тем, что система (3.2b)–(3.2c) линейна, рассмотрим решение задачи Коши:

$$\frac{dA(\xi;t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, x(\xi, u^0; t), u^0(t)\big)A(\xi;t), \quad A(\xi;0) = 1_{\mathbb{L}}.$$

Введем для всякого i векторнозначную функцию I_i времени правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$

$$I_i(\xi;T) \overset{\triangle}{=} \int_0^T \frac{\partial g_i}{\partial x}\big(t, x(\xi, u^0; t), u^0(t)\big)\, A(\xi;t)\, dt.$$

Теперь для любого решения (x, ψ_i, λ_i) системы (3.2a)–(3.2c) для всех $t \in \mathbb{T}$ выполнена формула Коши

$$\psi_i(t) = (\psi_i(0) - \lambda I_i(x(0);t))A^{-1}(x(0);t). \tag{5.1}$$

Предложение 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть для игрока i имеется τ-исчезающее решение $(x^0, \lambda^0, \psi_i^0)$ всех соотношений принципа максимума.*

Тогда для некоторой подпоследовательности $\tau_i' \subset \tau_i$ и сходящейся к x_* последовательности начальных условий ξ, с точностью до положительного множителя,

$$\textit{либо} \quad \lambda^0 = 1, \quad \psi_i^0(0) = \lim_{n\to\infty} I_i(\xi^n; \tau_i'^n), \tag{5.2a}$$

причем последовательность из $I_i(\xi^n; \tau_i'^n)$ имеет конечный предел,

$$\textit{либо} \quad \lambda^0 = 0, \quad \psi_i^0(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{I_i(\xi^n; \tau_i'^n)}{||I_i(\xi^n; \tau_i'^n)||_{\mathbb{X}}}, \tag{5.2b}$$

данный предел корректно определен, а последовательность из $||I_i(\xi^n; \tau_i'^n)||_{\mathbb{X}}$ неограниченно возрастает.

Доказательство. Пусть некоторое решение (λ^0, ψ_i^0) является τ-исчезающим решением; тогда $(x^0, \lambda^0, \psi_i^0)$ является пределом решений (x^n, λ^n, ψ^n) системы (3.2a)–(3.2c) , причем $\psi^n(\tau_i'^n) = 0$ для некоторой подпоследовательности $\tau_i' \subset \tau_i$. Примем $\xi^n \overset{\triangle}{=} x^n(0)$; теперь $x^n(\cdot) = x(\xi^n, u^0; \cdot)$.

По формуле Коши (5.1) при $t = \tau_i'^n$ в силу $\psi^n(\tau_i'^n) = 0$ имеем $\psi^n(0) = \lambda^n I_i(\xi^n; \tau_i'^n)$, отсюда

$$\psi_i^0(0) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n I_i(\xi^n; \tau_i'^n).$$

В случае $\lambda^0 \neq 0$ фактически показано равенство $\psi^0(0) = = \lambda^0 \lim_{n\to\infty} I_i(\xi^n;\tau_i'^n)$. Если же $\lambda^0 = 0$; то, поскольку исчезающее решение нетривиально, имеем, $\psi_i^0(0) \neq 0$. Поделив выражение на его же норму, получим

$$\frac{\psi_i^0(0)}{||\psi_i^0(0)||_{\mathbb{X}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{I_i(\xi^n;\tau_i'^n)}{||I_i(\xi^n;\tau_i'^n)||_{\mathbb{X}}}.$$

Осталось воспользоваться положительной однородностью соотношений (3.2b)–(3.2c). $\square$

Для случая $I_i(\xi;\cdot) \equiv I_i(x_*;\cdot)$, мы получаем точные формулы:

Замечание 5.1. Пусть в условиях теоремы 4.1 для игрока i или управление u^0 – сильное равновесие по Нэшу, или f и g_i линейны по x.

Тогда соотношениям (3.1a)–(3.1c) принципа максимума удовлетворяет

$$\text{либо} \quad \lambda_i^0 = 1, \quad \psi_i^0(0) = \lim_{n\to\infty} I_i(x_*;\tau_i'^n), \tag{5.3a}$$

причем последовательность из $I_i(x_*;\tau_i'^n)$ имеет конечный предел;

$$\text{либо} \quad \lambda_i^0 = 0, \quad \psi_i^0(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{I_i(x_*;\tau_i'^n)}{||I_i(x_*;\tau_i'^n)||_{\mathbb{X}}}, \tag{5.3b}$$

предел существует, а последовательность из $I_i(x_*;\tau_i'^n)$ неограничена.

Иногда можно показать и большее, что показанные выше формулы указывают на единственное τ_i-исчезающее решение, например,

Следствие 5.1. *Пусть в условиях теоремы 4.1 управление u^0 доставляет τ-равновесие по Нэшу и для игрока i последовательность τ_i такова, что существует конечный предел*

$$I_i^* \triangleq \lim_{n\to\infty,\xi\to x_*} I(\xi,\tau_i^n).$$

Тогда у этого игрока существует единственное τ-исчезающее решение принципа максимума, и (с точностью до положительного множителя) оно имеет вид $(1,\psi_i^0)$, где ψ_i^0 для всех $T \in \mathbb{T}$ задается формулой

$$\psi_i^0(T) = \Big(I_i^* - \int_0^T \frac{\partial g_i}{\partial x}\big(t, x^0(t), u^0(t)\big)\, A(x_*;t)\, dt\Big) A^{-1}(x_*,T). \tag{5.4a}$$

В случае, если I_i^* не зависит от выбора последовательности τ_i, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty,\xi\to x_*} I_i(\xi;t)$, последняя формула упрощается до

$$\psi_i^0(T) = \int_T^\infty \frac{\partial g_i}{\partial x}\big(t, x^0(t), u^0(t)\big)\, A(x_*;t)\, dt\, A^{-1}(x_*, T), \tag{5.4b}$$

где несобственный интеграл понимается в смысле Римана.

Отметим, что формула (5.4b) как явное выражение для сопряженной переменной в задачах оптимизации на бесконечном промежутке со свободным правым концом достаточно известна. Для некоторых классов линейных задач она была получена уже в работе [17]. На часть стационарных задач эта формула распространена С.М. Асеевым, А.В. Кряжимским в работах [1,2,14]; для ряда нестационарных систем управления С.М. Асеев, V.M. Veliov показали ее необходимость в работах [15,16]. Отметим также, что при сделанных в этих работах предположениях несобственный интеграл в (5.4b) будет обязан сходиться по Лебегу.

Кроме вышеперечисленных работ, условия, достаточные для применимости (5.4b), рассмотрены автором в [10,35]. Там же есть условия для применимости формул (5.4a), (5.3b) и различные примеры.

Заметим, что формула (5.4a) использует информацию о последовательности τ. Полезность этого при поиске равновесий по Нэшу демонстрируется игрой из 6.1. В этой, кажущейся антагонистической, линейной игре, выбор того или иного равновесия сводится к выбору игроками последовательностей τ_i.

В [9] для строго оптимального критерия построены дополнительные соотношения для τ и значений функции g на оптимальной траектории. Этого достаточно, чтобы найти τ вместе с оптимальным управлением, однако в случае $\dim \mathbb{X} > 1$, полученная система переопределена. Например, при строго выпуклой динамике строгому для всех τ управлению соответствует $\psi_i \equiv 0$. Именно этим, по-видимому, можно объяснить редкость сильно оптимальных решений.

6. Примеры

Пример 6.1. Рассмотрим одну линейную игру на основе системы математического маятника (для одного игрока она рассматривалась в

[42]). Эта игра интересна тем, что имеет континуум равновесий по Нэшу с существенно различными результатами игроков, хотя поначалу производит впечатление антагонистической.

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + u_1 - u_2, \quad x(0) = y(0) = 0, \quad u_1, u_2 \in [-1, 1],$$
$$J_1(T) = -\int_0^T y dt \to \max, \quad J_2(T) = \int_0^T y dt \to \max .$$

Поищем всевозможные пары (u_1^0, u_2^0), доставляющие равновесие по Нэшу вдоль пары каких-либо последовательностей τ_1, τ_2. Поскольку система линейна, то отображения $A(\xi; t)$ и $I_i(\xi; t)$ не зависят от начальной позиции, и символ ξ, можно в них опустить, более того, подойдет одна из формул следствия 5.1. Для всех $t, T \in \mathbb{T}$ имеем

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad I_i(T) = (-1)^i \left(\cos T - 1, \sin T\right),$$
$$I_i(t)A^{-1}(T) = (-1)^i \Big(\cos(t - T) - \cos T, \sin(t - T) + \sin T \Big).$$

В силу ограниченности I_i применять можно формулу (5.3a). Поскольку I_i 2π-периодичны, можно для последовательностей τ_i сразу выделить такие числа $\varsigma_i \in [0, 2\pi]$ и их подпоследовательности τ_i', что $I_i(\tau_i'^n) \to I_i(\varsigma_i)$ при $n \to \infty$. Поскольку вдоль этих подпоследовательностей также должно иметь место равновесие по Нэшу, из (5.4a) получаем

$$\psi_i^0(T) = (-1)^i (I_i(\varsigma_i) - I_i(T)) A^{-1}(T) = (\cos(\varsigma_i - T) - 1, \sin(\varsigma_i - T));$$

теперь из условия (3.1c) максимума гамильтониана имеем

$$u_i^0(T) = arg \min_{u\in[-1,1]} (\cos(\varsigma_i - T) - 1, \sin(\varsigma_i - T)) \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = arg \min_{u\in[-1,1]} \sin(\varsigma_i - T) u,$$

таким образом вдоль (τ_1', τ_2') равновесие по Нэшу может реализовать лишь управление

$$u_i^0(T) = sign \sin(T - \varsigma_i) \qquad \forall T \in \mathbb{T}. \tag{6.1a}$$

Поскольку эта пара управлений, по условию, реализует равновесие вдоль пары последовательностей τ_i, а не только вдоль их подпоследовательностей τ_i', то и управление не должно меняться от выбора этих подпоследовательностей. Следовательно $I_i(\tau_i^n) \to I_i(\varsigma_i)$ при $n \to \infty$. Таким образом, τ_i и ς_i должны быть связаны соотношением:

$$\frac{\varsigma_i}{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\tau_i^n}{2\pi} \right\}, \tag{6.1b}$$

где через $\{\cdot\}$ обозначена дробная часть числа. Итак, для того, чтобы пара управлений (u_1^0, u_2^0) реализовала τ-равновесие по Нэшу, необходимо, чтобы пределы в $(6.1b)$ существовали, а управления игроков u_i^0 были заданы правилом $(6.1a)$.

Можно показать, что правил $(6.1a)$,$(6.1b)$ достаточно. Действительно, рассмотрим две идентичные задачи управления:

$$\dot{z}_i = w_i,\ \dot{w}_i = -z_i + u_i,\ z_i(0) = w_i(0) = 0, \quad u_i \in [-1, 1],$$

$$J_i'(T) = -\int_0^T w_i dt \to \max .$$

Легко видеть, что тогда $x = z_1 - z_2; w = y_1 - y_2$, $J_1(T) = J_1'(T) - J_2'(T)$, $J_2(T) = J_2'(T) - J_1'(T)$. Поскольку значение $J_i'(T)$ зависит лишь от действий i-го игрока, то оптимизация J_i сводится к оптимизации J_i', в частности наилучший ответ каждого игрока не зависит от выбора управления другим игроком. То, что этот ответ равномерно слабо-обгоняющий (а на самом деле и сильно оптимальный) легко проверяется непосредственно, в частности в [42] проверено для $\varsigma = 0$. Следовательно эти ответы образуют равновесие по Нэшу. Итак, для того, чтобы пара управлений (u_1^0, u_2^0) реализовала τ-равновесие по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы для τ_i пределы в $(6.1b)$ существовали, а управления игроков u_i^0 задавались правилом $(6.1a)$.

Отметим, что равновесия (у каждой пары $(\varsigma_1, \varsigma_2)$ из $[0, 2\pi)^2$ – свое) существенно различны по доставляемому игрокам результату. Например в случае, если $\varsigma_1 = \varsigma_2$, то оптимальные значения $J_i(\tau_i^n)$ тождественно равны 0; если же $|\varsigma_1 - \varsigma_2| = \pi$, то оптимальные значения $J_i(\tau_i^n)$ в асимптотике ведут себя как $\sim \frac{8}{\pi}\tau_i^n$, то есть как линейно зависящая от момента τ_i^n возрастающая функция. Естественно, последнее равновесие существенно лучше с точки зрения каждого игрока.

Это, в свою очередь, видимо означает, что при формализации игры на бесконечном промежутке, последовательность τ_i, вдоль которой оптимизирует игрок i свой функционал, является фактически неотъемлемой частью этого целевого функционала. В частности, для того чтобы игра, рассмотренная в данном примере, могла называться антагонистической, необходимо обеспечить условие $\varsigma_1 = \varsigma_2$, то есть игроки обязаны оптимизировать свои функционалы вдоль близких (в пределе) последовательностей.

Конечно, можно было бы считать последовательность τ_i аналогом момента выхода i-го игрока из игры, пусть и в бесконечности, и превратить его в еще один ресурс для максимизации целевого функционала. В подобной постановке, в задаче для простейшего интегрального показателя на потенциально бесконечном промежутке времени, но с конечными моментами выхода из игры, в [3] построены необходимые условия для оптимальности набора пар (u_i, τ_i). Однако в случае, когда момент выхода фактически неограниченно откладывается, подобная постановка требует тщательной формализации.

Приведем пример игры, в которой для поиска исчезающего решения формулы (5.3a)–(5.3b) напрямую применять неудобно.

Пример 6.2. Рассмотрим предложенную в [41] нелинейную модификацию модели Ланчестера взаимодействия двух конкурирующих фирм. Для некоторых $r_1, r_2, q_1, q_2, x_{*1}, x_{*2} > 0$ со свойством $x_{*1} + x_{*2} = 1$ рассмотрим игру:

$$\dot{x}_i = u_i\sqrt{1 - x_i} - u_j\sqrt{x_i}, \quad x_i(0) = x_{*i}, \quad u_i, u_j \in [-1, 1], \tag{6.2a}$$
$$J_i(T) = \int_0^T e^{-r_i t}\big[q_i x_i - \frac{1}{4}u_i^2\big]\,dt \to \max \quad \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Найдем для $r_1, r_2 > 0$ всевозможные пары (u_1^0, u_2^0), доставляющие равновесие по Нэшу вдоль пары каких-либо последовательностей τ_1, τ_2. Простые соображения оптимальности показывают, что равновесные траектории отделены от линий $x_i = 1, x_i = 0$, а в силу стационарной динамики, отделены равномерно на все $\mathbb{T}$. Следовательно можно считать, что условия $(\mathbf{fg}), (\mathbf{u})$ выполнены. Теперь по теореме 4.1 у всякого игрока i найдется τ_i-исчезающее решение $(x_i^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$. Для последнего, в свою очередь, найдутся, сходящиеся к нему, решения $(x_i^n, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ системы (3.2a)–(3.2c) с краевым условием (3.2d).

Теперь $\mathcal{H}_i = \psi_i\big[u_i\sqrt{1 - x_i} - u_j\sqrt{x_i}\big] + \lambda_i e^{-rt}\big[q_i x_i - \frac{u_i^2}{4}\big]$. Из (3.2$c$)

имеем

$$\dot{\psi}_i = \frac{\psi_i u_i^0}{2\sqrt{1-x_i^0}} - \frac{\psi_i u_j^0}{2\sqrt{x_i^0}} - \lambda_i e^{-r_i t} q_i. \tag{6.2b}$$

Отсюда при $\psi_i^n(T) = 0$ получаем $\dot{\psi}_i^n(T) = -\lambda_i^n e^{-r_i T} q_i$ что, в силу $(3.1d)$ и $\lambda_i^n > 0$, обеспечит $\dot{\psi}_i^n(t) < 0$ в некоторой окрестности точки T, в частности множество позиций $\{\psi_i \,|\, \psi_i < 0\}$ не выпускает, захватывает решения $(6.2b)$ при $\lambda > 0$. Поскольку выполнено $(3.2d)$, то траектория ψ_i^n в момент τ_n' еще не захвачена, отсюда $\psi_i^n(t) > 0$ при $t < \tau_n$. Теперь, переходя к пределу, $\psi_i^0 \geq 0$. Покажем, что

$$(\psi_i^0 = \sup_n \psi_i^n > 0 \text{ и } \lambda_i^0 > 0) \text{ или } (\lambda_i^0 = 0 \text{ и } u_i^0 \equiv 1). \tag{6.2c}$$

Прореживая последовательность τ_n можно было всегда считать, что последовательность из чисел $\psi_i^n(0)$ монотонна. Тогда и последовательность решений ψ_i^n скалярной системы тоже монотонна. Если она была бы убывающей, то $\psi_i^0 \equiv 0$, что является решением $(6.2b)$ лишь при $\lambda_i^0 = 0$, отсюда $u_i^0 \equiv 1$. Если же она возрастает, то для каждого t при некотором n $\psi_i^0(t) > \psi_i^n(t) > \psi_i^n(\tau_n')$, из $(6.2b)$ и $\lambda_i^0 > 0$.

В случае $\lambda^0 = 0$ легко проверить, что управление $u_i^0 \equiv 1$ при $r_i > 0$ не может быть оптимальным при любом u_j.

Теперь можно считать, что $\lambda_i^n \equiv 1$ Введем ϕ_i^0, ϕ_i^n правилами $\phi_i^0(t) \stackrel{\triangle}{=} \psi_i^0(t)e^{r_i t}$, $\phi_i^n(t) \stackrel{\triangle}{=} \psi_i^n(t)e^{r_i t}$. Теперь из $(3.1c)$ получаем $u_i^0(t) = {}$ $= 2\psi_i^0 e^{r_i t}\sqrt{1-x_i^0} = 2\phi_i^0\sqrt{1-x_i^0}$, тогда $(6.2b)$ можно переписать как

$$\dot{\phi}_i = r_i\phi_i - q_i + \phi_i\left[\frac{u_i^0}{2\sqrt{1-x_i^0}} - \frac{u_j^0}{2\sqrt{x_i^0}}\right] = r_i\phi_i - q_i + \phi_i(\phi_i^0 + \phi_j^0),$$

в частности пара (ϕ_1^0, ϕ_2^0) – решение системы

$$\dot{y}_i = r_i y_i - q_i + y_i(y_i + y_j) \qquad \{i,j\} = \{1,2\}. \tag{6.2d}$$

Заметим, что решения (y_1^n, y_2^n) этой же системы с начальными условиями $(\phi_1^n, \phi_2^n)(0)$ равномерно на каждом отрезке сходится к (ϕ_1^0, ϕ_2^0); поскольку в силу $(6.2c)$ из теорем сравнения для y_i^n, ϕ_i^0 выполнено $y_i^n \leq \phi_i^n$, то каждое $y_i^n(t)$ отрицательно при достаточно больших t.

Таким образом, у автономной системы $(6.2d)$ к решению (ϕ_1^0, ϕ_2^0) с положительными компонентами сходятся решения с отрицательными компонентами при больших временах. Тогда (ϕ_1^0, ϕ_2^0) – это неустойчивая особая точка этой системы, а именно, положительное решение системы алгебраических уравнений $r_i z_i - q_i + z_i(z_i + z_j) = 0$. Сделанных предположений на коэффициенты достаточно для существования таких корней.

Зная корни ϕ_i^0, а значит и управление $u_i^0 = 2\phi_i^0\sqrt{1 - x_i^0}$, траектории x_1^0, x_2^0 найдем, решая линейное уравнение $\dot{x}_i = 2\phi_i^0(1 - x_i) - 2\phi_j^0 x_i$.

Для $r_i > 0$ эти управления порождают общее для всех τ равновесие. Действительно, поскольку x, u ограничены, множитель $e^{-r_i t}$ гарантирует выполнение условий предложения 7.2. Замечания 7.1, 7.2 также выполнены, поэтому у τ есть общее τ-равновесие, тогда это найденные выше $u_i^0(t) = 2\phi_i^0\sqrt{1 - x_i^0}$.

В случае, когда хотя бы один из r_i равен нулю, повторяя все те же выкладки, замечаем, что или $r_i = 0$, $\lambda_i^0 = 0$, $u_i^0 \equiv 1$, или же $\lambda_i^0 = 1$, $u_i^0(t) = 2\phi_i^0\sqrt{1 - x_i^0}$ для $\phi_i^0 \overset{\triangle}{=} q_i/\sqrt{q_1 + q_2}$. Второе решение, по-видимому, как предел регулярных решений при $r_i > 0$, является нэшевским равновесием в силу равномерной тауберовой теоремы из [37]. Случай же, когда хотя бы для одного из игроков имеет место $r_i = 0$, $\lambda_i^0 = 0$, $u_i^0 \equiv 1$ требует отдельного исследования.

Отметим, что в [41] рассматривались положительные r_i, существование равновесия по Нэшу считалось очевидным, а его поиск сводился к проверке на оптимальность в каждом из случаев $\psi \to \to \infty, \psi < 0, \psi = const$; случай $\lambda = 0$ там не рассматривался.

В данном примере можно было воспользоваться монотонностью, например [2, Теорема 5] (для $r_i > 0$) или [35, Corollary 7] ($\forall r_i$) сразу гарантирует (6.2c). В силу [2, Теорема 5] из автономности системы при $r_i > 0$ следует также $\lambda^0 > 0$. Воспользовавшись непрерывностью управления u^0 от позиции, можно свести задачу к случаю $I_i(\xi; \cdot) \equiv I_i(x_*; \cdot)$, что даст результат замечания 5.1. Теперь из положительности q_i при $r_i > 0$ для сопряженной переменной верна формула (5.4b). Это означает, что все ψ_i^n также являются решениями (6.2d), то сводит поиск τ-исчезающего решения к исследованию фазового портрета (6.2d). Но выше так и сделано, только пришлось начинать с портрета более сложной системы (6.2a)–(6.2b).

7. Обобщенная задача

С этого раздела начинается доказательство основного результата – теоремы 4.1. В данном разделе строятся основные используемые в этом доказательстве топологические пространства, а в конце обсуждается существование τ-равновесия в обобщенной задаче.

Пусть задано некоторое евклидовое пространство $\mathbb{V}$ и компактозначное отображение $V : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{V}$. Пусть выполнено

Условие $(\mathbf{v})$: компактозначное отображение $V : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{V}$ интегрально ограничено и имеет измеримый по Борелю график.

Обозначим для всех $u \in \mathbb{V}$ через $\widetilde{\delta}(u)$ вероятностную меру, сосредоточенную в точке u. Введем $\mathfrak{V}$ – множество всех измеримых по Борелю ограниченных селекторов многозначного отображения V; топологию на $\mathfrak{V}$ зададим вложением $\mathfrak{V} \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{V})$. (Например в качестве тройки $(\mathbb{V}, V, \mathfrak{V})$ годятся $(\mathbb{U}_i, U_i, \mathfrak{U}_i)$, $(\mathbb{U}_{all}, U_{all}, \mathfrak{U}_{all})$, $(\mathbb{U}_{all}, u^0|U_i, u^0|\mathfrak{U}_i)$.)

Определим $\widetilde{\mathfrak{V}}_n$ как семейство всех слабо измеримых отображений μ из $[0, n]$ в множество вероятностных мер Радона над $\mathbb{V}$ таких, что $\displaystyle\int_{V(t)} d\eta(t) = 1$ для почти всех $t \in [0, n]$. Оснастим это множество топологией *-слабой сходимости, полученное топологическое пространство – компакт [4,IV.3.11], а множество $\mathfrak{V}_n \stackrel{\triangle}{=} \{v|_{[0,n]} \,|\, v \in \mathfrak{V}\}$ всюду плотно вкладывается в $\widetilde{\mathfrak{V}}_n$ [4, IV.3.10] отображением $u \mapsto \widetilde{\delta} \circ u$.

Введем теперь $\widetilde{\mathfrak{V}}$ – семейство таких отображений η из $\mathbb{T}$ в множество вероятностных мер Радона над $\mathbb{V}$, что $\eta|_{[0,n]} \in \widetilde{\mathfrak{V}}_n$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Определим сквозные проекции $\widetilde{\pi}_n : \widetilde{\mathfrak{V}} \to \widetilde{\mathfrak{V}}_n$ правилом $\widetilde{\pi}_n(\eta) \stackrel{\triangle}{=} \eta|_{[0,n]}$ для всех $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}, n \in \mathbb{N}$. Топологию на $\widetilde{\mathfrak{V}}$ определим как слабейшую топологию, в которой все эти проекции непрерывны. Элементы из $\widetilde{\mathfrak{V}}$ будем далее называть обобщенными управлениями.

Пусть для отображения $a : \mathbb{T} \times E \times \mathbb{V} \mapsto E$ выполнено:

Условие $(\mathbf{a})$: динамика $a : \mathbb{T} \times E \times \mathbb{V} \mapsto E-$ локально липшицевое интегрально ограниченное на отрезках отображение Каратеодори, удовлетворяющее условию продолжимости всех локальных решений на все $\mathbb{T}$, например удовлетворяет условию подлинейного роста по фазовой переменной.

Зафиксируем множество начальных позиций $\Xi \subset E$, а с ним и для каждого обычного управления $u \in \mathfrak{V}$ дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = a(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = \xi \in \Xi, \quad t \in \mathbb{T}, \quad u \in \mathfrak{V}. \tag{7.1}$$

Тогда каждому обобщенному управлению $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}$ можно сопоставить уравнение

$$\dot{y} = \int_{V(t)} a(t, y(t), u)\, d\eta(t), \quad y(0) \in \Xi, \quad t \in \mathbb{T}, \quad \eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}. \qquad (7.2)$$

Его локальные решения продолжимы на все $\mathbb{T}$; семейство всех таких решений $y \in C_{loc}(\mathbb{T}, E)$ системы (7.2) обозначим через $\widetilde{\mathfrak{A}}[\eta]$.

Предложение 7.1. *Пусть выполнено* (**a**), (**v**), *тогда*

1) пространство $\widetilde{\mathfrak{V}}$ – метрический компакт, а $\widetilde{\delta}(\mathfrak{V})$ всюду плотно в нем;

2) для всякого компакта $\Xi \in (comp)(E)$ отображение $\widetilde{\mathfrak{A}} : \widetilde{\mathfrak{V}} \to \to C_{loc}(\mathbb{T}, E)$ непрерывно, при этом образ множества $\widetilde{\delta} \circ \mathfrak{V}$ (допустимые траектории) всюду плотен в компактном образе множества $\widetilde{\mathfrak{U}}$ (обобщенные траектории).

Приведем для полноты изложения его доказательство (см. [35]).

Доказательство. Введем для краткости $\widetilde{\Pi} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathfrak{V}}_n$, снабдим произведение тихоновской топологией. Определим отображение $\widetilde{\Delta} : \widetilde{\mathfrak{V}} \to \to \widetilde{\Pi}$ правилом: $\widetilde{\Delta}(\eta) \stackrel{\triangle}{=} \big(\widetilde{\pi}_n(\eta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ для всех $\eta \in \widetilde{\mathfrak{U}}$. Оно непрерывно в силу непрерывности $\widetilde{\pi}_n$; оно имеет обратное, непрерывное в силу непрерывности отображений $\widetilde{\pi}_n \circ \widetilde{\Delta}^{-1}$. Следовательно $\widetilde{\Delta}$ – гомеоморфизм.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}, (n > k)$. Тогда пространство $\widetilde{\mathfrak{V}}_n$ вкладывается в $\widetilde{\mathfrak{V}}_k$ отображением $\widetilde{\pi}^n_k(\eta) \stackrel{\triangle}{=} \eta|_{[0,k]}$ для всех $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}_n$. Поскольку при этом $\widetilde{\pi}^n_k \circ \widetilde{\pi}^k_i = \widetilde{\pi}^n_i$, $n, k, i \in \mathbb{N}, (n > k > i)$, то мы имеем проективную последовательность топологических пространств $\{\widetilde{\mathfrak{U}}_n, \widetilde{\pi}^n_k\}$, и можно определить обратный предел [7, III.1.5],[12, 2.5.1],в наших обозначениях его можно записать $\lim\limits_{\leftarrow}\{\widetilde{\mathfrak{V}}_n, \widetilde{\pi}^n_k\} \stackrel{\triangle}{=} \widetilde{\Delta}(\widetilde{\mathfrak{V}}) \subset \widetilde{\Pi}$. Как показано выше, $\widetilde{\Delta}$ – гомеоморфизм, поэтому $\widetilde{\mathfrak{V}}$ гомеоморфно $\widetilde{\Delta}(\widetilde{\mathfrak{V}})$. Теперь в силу теоремы Куроша [7,III.1.13] обратный предел $\widetilde{\Delta}(\widetilde{\mathfrak{V}})$ компактов $\widetilde{\mathfrak{V}}_n$ – компакт, но тогда и само $\widetilde{\mathfrak{V}}$ также компакт. Аналогично, из [7, 4.2.5], оно также и метризуемо.

Сославшись на [12, 3.4.11] и [12, 2.5.6], (или повторив предыдущие рассуждения без знака "~") получим $\mathfrak{V} \cong \lim\limits_{\leftarrow}\{\mathfrak{V}_n, \pi^n_k\} \stackrel{\triangle}{=} \Delta(\mathfrak{V}) \subset \Pi$.

Введем отображение $e_n : \mathfrak{V}_n \to \widetilde{\mathfrak{V}}_n$ правилом $e_n(u)(t) \stackrel{\triangle}{=} (\widetilde{\delta} \circ u)(t) = = \widetilde{\delta}_{u(t)}$ для всех $n \in \mathbb{N}, t \in [0, n], u \in \mathfrak{V}_n$. Поскольку для всех $n, k \in$

$\in \mathbb{N}, n > k$ выполнено $e_n \circ \pi_k^n = e_k$, то имеем проективную систему $\{e_n, \pi_k^n\}$; переходя к обратному пределу, получаем непрерывное отображение $e_\Delta : \Delta(\mathfrak{V}) \to \widetilde{\Delta}(\widetilde{\mathfrak{V}})$; при этом из $e_n \circ \pi_n = \widetilde{\pi}_n \circ \widetilde{\delta}$ получаем $e_\Delta \circ \Delta = \widetilde{\Delta} \circ \widetilde{\delta}$, а из показанного в [4] свойства $\widetilde{\mathfrak{V}}_n = cl\, e_n(\mathfrak{V}_n)$ имеем $\widetilde{\Delta}(\widetilde{\mathfrak{V}}) = cl\, e_\Delta\big(\Delta(\mathfrak{V})\big) = cl\,(\widetilde{\Delta} \circ \widetilde{\delta})(\mathfrak{V})$; теперь, в силу непрерывности $\widetilde{\Delta}^{-1}$, получаем $\widetilde{\mathfrak{V}} = cl\, \widetilde{\delta}(\mathfrak{V})$.

Отображение $\widetilde{\mathfrak{A}}[\eta]$ непрерывно, например, в силу [43, 3.5.6] (достаточно проверить липшицевость правой части), множество $\widetilde{\mathfrak{A}}[\widetilde{\mathfrak{V}}]$ компактно как непрерывный образ компакта, для доказательства всюду плотного вложения образов достаточно воспользоваться непрерывностью и уже показанным $\widetilde{\mathfrak{V}} = cl\, \widetilde{\delta}(\mathfrak{V})$. □

Отметим, что погружение исходного пространства в пространство, оснащенное более удобной топологией, – достаточно известный, восходящий еще к Гильберту, прием; для задач управления, например, [4,5,13], для задач на бесконечном промежутке [1,Sect. 8],[22,31]. В дифференциальных играх переход к обобщенным управлениям не менее эффективен, см. подробнее [11,28]. Для игр на бесконечном промежутке еще более общая, чем рассмотренная здесь, конструкция для обобщенных программ рассмотрена автором в [8].

Построенную выше конструкцию можно применить как к допустимым управлениям каждого из игроков (при $V = U_i$), так и к множеству их совместных управлений U_{all}. Вследствие этого можно считать построенными множества $\widetilde{\mathfrak{U}}_i, \widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$, а также функции-вложения $\widetilde{\delta}_i : \mathfrak{U}_i \to \widetilde{\mathfrak{U}}_i, \widetilde{\delta}_{all} : \mathfrak{U}_{all} \to \widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$. В частности, поскольку в категории топологических пространств обратный предел и произведение перестановочны, то $\widetilde{\mathfrak{U}}_{all} = \widetilde{\mathfrak{U}}_1 \times \widetilde{\mathfrak{U}}_i \times \dots \times \widetilde{\mathfrak{U}}_m$ и $\widetilde{\delta}_{all} = (\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2, \dots, \widetilde{\delta}_m)$.

Вследствие этого мы будем работать с допустимым управлением, как с обобщенным, допуская записи $\mathfrak{U}_i \subset \widetilde{\mathfrak{U}}_i$, $\mathfrak{U}_{all} \subset \widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$; будем также распостранять по непрерывности операции с допустимых на обобщенные, например писать $u^0|\eta_i$ при подмене в u^0 его i-той компоненты на обобщенное управление, или даже сразу $u^0|\widetilde{\mathfrak{U}}_i$. Мы также будем считать заданными пучки траекторий $\widetilde{\mathfrak{A}}[\eta]$, если уже ранее введены пучки допустимых траекторий. Например, подставим в предложение 7.1 в качестве a, V, Ξ соответственно $\{(f,g)\}$, U_{all}, $\{x_*\}$, получим непрерывные по η отображения $x(x_*, \eta; \cdot)$, $J(\eta; \cdot)$ и всюду плотные (в компактно-открытой топологии) вложения допустимых траекторий системы (2.1a) в пучок, порожденный обобщенными траекториями. В частности это означает, что если u^0 реализует τ-равновесие по Нэшу в классе допустимых управлений, то оно реализует его и в классе обобщенных, то есть (2.2) выполнено и для всех $\bar{\eta}_i \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i$.

Введем $\widetilde{\mathfrak{Y}}_i, \widetilde{\mathfrak{Z}}_i$ как замыкания $\mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i$ в $C_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{X}) \times \widetilde{\mathfrak{U}} \times [0,1] \times C_{loc}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$. Тогда по показанному выше $\widetilde{\mathfrak{Y}}_i$ – компакт, а каждый его элемент является решением системы (3.1a)-(3.1b) при некотором $u^0|\eta_i \in \mathfrak{U}_{all}|\widetilde{\mathfrak{U}}_i$. Но тогда и $(x, u^0|\eta_i, \lambda_i, \psi_i) \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_i$ выполнено

$$\sup_{p_i \in U_i(t)} \mathcal{H}_i\big(x(t), t, u^0|p_i, \lambda_i, \psi_i(t)\big) = \mathcal{H}_i\big(x(t), t, u^0|\eta_i(t), \lambda_i, \psi_i(t)\big) \quad (7.3)$$

почти всюду на $\mathbb{T}$. Таким образом $\widetilde{\mathfrak{Z}}_i$ – это решения системы принципа максимума, порожденные уже обобщенными элементами из $u^0|\widetilde{\mathfrak{U}}_i$.

Применим предложение 7.1 для получения условий существования τ-равновесия:

Предложение 7.2. *Пусть у каждого i функции $J_i(\cdot, \tau_i^n)$ равномерно на $\mathfrak{U}_{all}$ сходятся к некоторой ограниченной функции $J_i^\infty \in C(\mathfrak{U}_{all}, \mathbb{R})$.*

Тогда существует обобщенное управление $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0) \in \in \widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$, являющееся τ-равновесием по Нэшу в обобщенной задаче, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \big[\widetilde{J}_i(\eta^0, \tau_i^n) - \max\limits_{\eta_i \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i} \widetilde{J}_i(\eta^0|\eta_i, \tau_i^n)\big] = 0$.

Доказательство. Поскольку отображения $J_i(\cdot, \tau_i^n)$ равномерно сходятся к $J_i^\infty(\cdot)$, то, как непрерывные продолжения на компактной области, $\widetilde{J}_i(\cdot, \tau_i^n)$ также равномерно сходится к некоторой $\widetilde{J}_i^\infty(\cdot)$.

Поскольку множества $\widetilde{\mathfrak{U}}_{all}|\eta_i$ выпуклы и компактны в метрическом компакте $\widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$, а функции $\widetilde{J}_i^\infty(\eta_i, \tau_i^n)$ непрерывны, то для задачи максимизации каждым игроком $\widetilde{J}_i^\infty(\eta_i, \tau_i^n)$ в силу [32] найдется равновесие по Нэшу $\eta^0 = (\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_m^0) \in \widetilde{\mathfrak{U}}_{all}$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{J}_i(\eta^0, \tau_i^n) = \max_{\eta_i \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i} \lim_{n\to\infty} \widetilde{J}_i(\eta^0|\eta_i, \tau_i^n) = \lim_{n\to\infty} \max_{\eta_i \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i} \widetilde{J}_i(\eta^0|\eta_i, \tau_i^n)$$

что и требовалось. □

Замечание 7.1. Условия предложения выполнены для всех τ, если $\big|J_i(u_i, T_1) - J_i(u_i, T_2)\big| \to 0$ (равномерно по $u_i \in \mathfrak{U}_\mathrm{i}$) при $T_1, T_2 \to \to \infty$ (см., например, [2,(A3)]). Более того, построенное в предложении равновесие общее для всех τ.

Есть достаточно много условий, при которых обобщенные управления дают тот же пучок, что и обычные; см., например, [4,5].

Замечание 7.2. Если множества $\big\{\big(f(t,x^0(t),u),z\big)\,\big|\,z\le g_i(t,x^0(t),u)\big\}$ для всех $(t,x,u)\in\mathbb{T}\times\mathbb{X}\times\mathbb{U}_{all}$ выпуклы, то всякое равновесие в обобщенной задаче может быть порождено и обычными управлениями.

Наложенные в предложении и замечаниях условия – очень сильные. Во-первых фактически требуется ограниченность функционала, во-вторых – малость его вариации на больших временах. Впрочем легко привести примеры, показывающие их существенность уже в задачах управления, см. например [33]. Кроме того, аналогичные условия накладываются достаточно часто; см., например [2, (A2),(A3)].

Существование равновесия, близкого к рассматриваемому (критерий "overtaking optimal"), в игре двух лиц исследовалось в работах [23-25]. При этом [23, Theorem 3.1], [25, Theorem 6] во-первых предполагалось наличие аттрактора для траекторий, совместимых с условиями принципа максимума ("good programms"), более того, рассматривался лишь автономный случай, а у (3.1a)–(3.1c) предполагалась стационарная точка. Во-вторых, существенно более строгие чем в замечании 7.1 условия обеспечивали решениям принципа максимума оптимальность во вспомогательных линейных задачах.

С другой стороны, хотя в общих постановках равновесие по Нэшу существует даже в разрывных играх, для случая неограниченной цены вопрос существования даже не рассматривается, см. например, [18]. Возможно, какие-либо не зависящие от асимптотик результаты можно получить для класса с монотонными целевыми функционалами на основе теоремы Тарского; см., в этой связи, [44].

8. Вспомогательная лемма

Пусть в $\mathfrak{V}$ задано некоторое выделенное допустимое управление v^0. Для всякой позиции $(\tau^*,y^*)\in\mathbb{T}\times E$ существует единственное продолжимое на все $\mathbb{T}$ решение z уравнения

$$\dot z=a(t,z(t),v^0(t)),\quad y(\tau^*)=y^*,\quad \tau^*\in\mathbb{T};\tag{8.1}$$

оно (как элемент $C_{loc}(\mathbb{T},E)$) непрерывно зависит от $(\tau^*,y^*)\in\mathbb{T}\times E$. Обозначим его позицию $z(0)$ через $\varkappa(\tau^*,y^*)$.

Пусть дано интегрально ограниченное на отрезках отображение Каратеодори $w : \mathbb{T} \times \mathbb{V} \to \mathbb{T}$. Для любых $\tau \in \mathbb{T}$, $\eta \in \widetilde{\mathfrak{U}}$ введем

$$\mathfrak{L}_w[\eta](\tau) \stackrel{\triangle}{=} \int_{[0,\tau]} \int_{V(t)} w(t,u) d\eta(t) dt \in \mathbb{T} \cup \{\infty\}.$$

Пусть вес w таков, что $\mathfrak{L}_w[\widetilde{v}^0] \equiv 0$, и если для каких-то $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}$, $T \in \mathbb{T}$ имеет место $\mathfrak{L}_w[\eta](T) = 0$, то η почти всюду на $[0,T]$ равна $\widetilde{v}^0$. Множество таких w обозначим через $(Null)(v^0, \mathfrak{V})$.

Для системы (8.1) можно найти вес, позволяющий оценивать расхождение ее траекторий. Соответствующую лемму, для полноты изложения, приведем вместе с доказательством (см. [35]).

Лемма 8.1. *Пусть выполнены условия* $(\mathbf{v}), (\mathbf{a})$. *Тогда найдется такой вес* $w^0 \in (Null)(v^0, \mathfrak{V})$, *что для произвольных* $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}$, $T \in \mathbb{T}$ *для каждого решения* $y \in \mathfrak{A}[\eta]$ *уравнения* (7.1) *выполнено*

$$||\varkappa(T, y(T)) - y(0)||_E \leq \mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T).$$

Доказательство. Напомним, что $\mathfrak{A}[\eta]$ – пучок решений (7.1) при управлении η с началом из Ξ. Для всякой функции y через $Gr\, y$ будем обозначать ее график.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. В силу $(\mathbf{a})$ всякому $(t^*, y^*) \in [0,n] \times E$ найдется позиция $\varkappa(t^*, y^*)$, из теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных это отображение непрерывно, в частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ компактно $G_n \stackrel{\triangle}{=} \big\{ y(t) \,\big|\, \forall y \in \widetilde{\mathfrak{A}}[\eta], \eta \in \mathfrak{V}, t \in [0,n] \big\}$. Теперь компактно и множество $\varkappa([0,n] \times G_n)$ всех начальных позиций траекторий системы (7.1), порожденных управлением v^0 на отрезке $[0,n]$, графики которых имеют общую точку с $[0,n] \times G_n$. Следовательно компактным будет и множество всех позиций $y(t) \in E$, заметаемых этими траекториями вплоть до момента n. Обозначим последнее множество через $\bar{G}_n$. На множестве $[0,t] \times \bar{G}_n$ функция $a(t, y, v^0(t))$ липшицева по y для некоторой измеримой функции $L_n \in \mathcal{L}^1([0,n], \mathbb{T})$. Примем для всех $T \in [0,n]$ $M_n(T) = \displaystyle\int_{[0,T]} L_n(t) dt$. Отметим, что эта функция – абсолютно непрерывная и монотонно неубывающая.

Перейдем к построению искомого веса. Рассмотрим для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [n-1, n), u \in \mathbb{V}$ число

$$R(t,u) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{y \in \bar{G}_n} \big|\big| a(t,y,u) - a(t,y,v^0(t)) \big|\big|_E.$$

Заметим, что норма внутри – непрерывное по y и u отображение, y пробегает компактное множество, теперь для всякого $u \in \mathbb{V}$ супремум достигает максимума при подстановке некоторой функции $y_{max}[u]$, в силу [30, Theorem 3.7] $y_{max}[u] \in \mathcal{L}^1([n, n-1), \bar{G}_n)$, тогда и $R(t,u)$ измерима по t при всяком $u \in \mathbb{V}$. Зафиксируем $t \in [n-1, n)$, из непрерывности $a(t,\cdot,\cdot)$ на компакте $\bar{G}_n \times V(t)$ следует, что найдется непрерывная функция $\omega^t \in C(\mathbb{T}, \mathbb{T})$ для которой $\omega(0) = 0$ и

$$\Big|\, \big|\big|a(t,y,u'') - a(t,y,u^0(t))\big|\big| - \big|\big|a(t,y,u') - a\big(t,y,u^0(t)\big)\big|\big| \,\Big| < \omega^t\big(||u' - u''||\big) \tag{8.2}$$

выполнено при любых $y \in \bar{G}_n, u', u'' \in V(t)\,(u' \neq u'')$. Рассмотрим произвольные различные $u', u'' \in V(t)$, без ограничения общности считаем $R(t,u') < R(t,u'')$. Теперь по определению $R(t,u') \geq$ $\geq \big|\big|a(t,y,u') - a(t,y,u^0(t))\big|\big|$ и подставляя $y \overset{\triangle}{=} y_{max}(u'')(t)$ в (8.2) имеем $0 < R(t,u'') - R(t,u') \leq \omega^t(||u' - u''||)$, то есть R непрерывна на $GrV|_{[n-1,n)}$ по переменной u.

Таким образом функция $R : GrV|_{[n-1,n)} \to \mathbb{T}$ является функцией Каратеодори. Заметим, что, пробегая $n \in \mathbb{N}$, мы определим функцию Каратеодори R на всем GrV. Более того, $R(t, v^0(t)) \equiv 0$ по построению. Тогда корректно построить вес $w^0 \in (Null)(v^0, \widetilde{\mathfrak{V}})$ правилом:

$$w^0(t,u) \overset{\triangle}{=} ||u - v^0(t)|| + e^{M_n(t)} R(t,u) \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in [n-1, n), u \in V,$$

Оценим расхождение между траекториями, порожденными v^0.

Рассмотрим произвольные $n \in \mathbb{N}$, $T^* \in [0,n]$, $(T^*, y_1^*), (T^*, y_2^*) \in$ $\in G_n$. Найдутся порожденые v^0 решения y_1, y_2 уравнения (8.1) с условиями $y_i(T^*) = y_i^*$, при этом автоматически $y_i(t) \in \bar{G}_n$ при $t \in [0,n]$. Введем на $[0,n]$ функции

$$r(t) \overset{\triangle}{=} y_1(t) - y_2(t),\ W_+(t) \overset{\triangle}{=} e^{M_n(t)} ||r(t)||_E \quad \forall t \in [0,n].$$

Липшицевость правой части (8.1) на $\bar{G}_n$ эквивалентна условию $||\dot{r}(t)||_E \leq L_n(t)||r(t)||_E$, откуда $|r(t)\dot{r}(t)| \leq L_n(t)||r(t)||_E^2$, теперь

$$\frac{dW_+^2(t)}{dt} = 2L_n(t)W_+^2(t) + 2e^{2M_n(t)} r(t)\dot{r}(t) \geq 2L_n(t)W_+^2(t) - 2L_n(t)W_+^2(t) = 0.$$

Тогда W_+ не убывает, и для всех $(T^*, y_1^*), (T^*, y_2^*) \in G_n$ выполнено

$$||\varkappa(T^*, y_1^*) - \varkappa(T^*, y_2^*)||_E = W_+(0) \leq W_+(T^*) = e^{M_n(T^*)} ||y_1^* - y_2^*||_E. \tag{8.3}$$

Оценим изменение $\varkappa$ вдоль произвольной траектории.

Возьмем произвольные $\eta \in \widetilde{\mathfrak{V}}$, $y \in \mathfrak{A}[\eta]$. Для всякого $T_0 \in \mathbb{T}$ найдется $n \in \mathbb{N}$ со свойством $T_0 \in [n-1, n)$. По построению имеем $Gr\, y|_{[0,T_0]} \subset [0,n] \times G_n$. Зафиксируем произвольные точки T_1, T_2 ($T_1 < T_2$) на полуинтервале $[0, T_0)$. Существует порожденное v^0 решение y^0, удовлетворяющее условию $y^0(T_1) = y(T_1)$. Введем для него функции r, W_- правилами

$$r(t) \triangleq y^0(t) - y(t),\ W_-(t) \triangleq e^{-M_n(t)}||r(t)||_E \quad \forall t \in [T_1, T_2].$$

По построению $\bar{G}_n$ выполнено $y(t), y^0(t) \in \bar{G}_n$ при $t \in [0, n]$. Теперь

$$\frac{dW_-^2(t)}{dt} = -2L_n(t)W_-^2(t) + 2e^{-2M_n(t)}r(t)\dot{r}(t) = -2L_n(t)W_-^2(t) + \\ 2e^{-2M_n(t)}r(t)\big(\dot{y}^0(t) - a(t, y(t), u^0(t)) + a(t, y(t), u^0(t)) - \dot{y}(t)\big) \leq \\ -2L_n(t)W_-^2(t) + 2L_n(t)W_-^2(t) + 2e^{-2M_n(t)}||r(t)||_E \int_{V(t)} R(t,u)d\eta(t) \leq \\ 2e^{-M_n(t)}W_-(t) \int_{V(t)} R(t,u)d\eta(t) \leq 2e^{-2M_n(t)}W_-(t)\frac{d\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](t)}{dt}.$$

Функция W_- неотрицательна, тогда при $W_-(t) \neq 0$ имеем

$$\frac{dW_-(t)}{dt} \leq e^{-2M_n(t)}\frac{d\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](t)}{dt} \leq e^{-2M_n(T_1)}\frac{d\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](t)}{dt}.$$

Более того, теперь из $W_-(T_1) = 0$ следует

$$W_-(T_2) = W_-(T_2) - W_-(T_1) \leq e^{-2M_n(T_1)}\big(\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_2) - \mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_1)\big) \quad (8.4)$$

Тогда

$$||\varkappa(T_2, y^0(T_2)) - \varkappa(T_2, y(T_2))||_E \overset{(8.3)}{\leq} e^{M_n(T_2)}||y^0(T_2) - y(T_2)||_E = \\ e^{2M_n(T_2)}W_-(T_2) \overset{(8.4)}{\leq} e^{2M_n(T_2)-2M_n(T_1)}\big(\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_2) - \mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_1)\big).$$

Но $y^0(0) = \varkappa(T_2, y^0(T_2)) = \varkappa(T_1, y^0(T_1)) = \varkappa(T_1, y(T_1))$, отсюда

$$||\varkappa(T_2, y(T_2)) - \varkappa(T_1, y(T_1))||_E \leq e^{2M_n(T_2)-2M_n(T_1)}\big(\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_2) - \mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T_1)\big). \quad (8.5)$$

Зафиксируем произвольное $t \in [0, T_0]$. Для всякого $\varepsilon > 0$ промежуток $[0, t)$ можно разбить на интервалы вида $[T', T'')$, так чтобы

$M_n(T'') - M_n(T') = \int_{[T',T'')} L_n(t)dt < \varepsilon$. Тогда для каждого полуинтервала выполнено (8.5), то есть

$$||\varkappa(T'', y(T'')) - \varkappa(T', y(T'))||_E \leq e^{2\varepsilon}\big(\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T'') - \mathfrak{L}_{w^0}[\eta](T')\big).$$

Складывая по всем полуинтервалам, в силу $\varkappa(0, y(0)) = y(0)$ и неравенства треугольника, имеем $||\varkappa(t, y(t)) - y(0)||_E \leq e^{2\varepsilon}\mathfrak{L}_{w^0}[\eta](t)$ для всякого $t \in [0, T_0]$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма показана. $\square$

9. Собственно доказательство теоремы 4.1

Доказательство. Зафиксируем некоторого игрока i. Примем $\mathbb{V} = u^0|\mathbb{U}_i$; установим $E = \mathbb{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{X}$, $v^0 = u^0$. Возьмем в качестве Ξ шар в E вокруг $(x_*, 0, 0)$ радиуса 2. Возьмем в качестве отображения $a : \mathbb{T} \times E \times \mathbb{U}_i$ правую часть системы

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u^0(t)|u_i\big); \tag{9.1a}$$

$$\dot{\lambda}(t) = 0; \tag{9.1b}$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x}\big(x(t), t, u^0(t)|u_i, \lambda, \psi(t)\big). \tag{9.1c}$$

Заметим, что всякое решение этой системы, удовлетворяющее $(3.1d)$, автоматически имеет начальные условия из Ξ.

Из определения равновесия по Нэшу для игрока i найдется такая сходящаяся к нулю последовательность из чисел $\gamma_n \geq 0$, что для всех $u_i \in \mathfrak{U}_i$, а в силу пункта 2) предложения 7.1 и для всех $\eta \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i$, выполнено

$$J_i(u^0|\eta; \tau_i^n) \leq J_i(u^0; \tau_i^n) + \gamma_n^2. \tag{9.2}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ максимизируем по всем $\eta \in \widetilde{\mathfrak{U}}_i$ функционал

$$J^n[\eta] \stackrel{\triangle}{=} \int_{[0,\tau_i^n)} g_i(t, x(x_*, \widetilde{u}^0|\eta; t), \widetilde{u}^0|\eta)\, dt - \gamma_n \mathfrak{L}_w[\eta](\tau_i^n).$$

Функционал здесь ограничен сверху в силу (9.2), каждое слагаемое непрерывно зависит от η, пробегающего компакт $\widetilde{\mathfrak{U}}_i$, следовательно эта задача имеет в $\widetilde{\mathfrak{U}}_i$ оптимальное решение; какое-нибудь из них обозначим через η^n, а соответствующую ему траекторию через $\widetilde{x}^n$.

Введем отображение $\widetilde{\mathcal{H}}^n : \mathbb{X} \times \mathbb{T} \times U_i \times \mathbb{T} \times \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ правилом

$$\widetilde{\mathcal{H}}^n(x,t,u_i,\lambda,\psi) \stackrel{\triangle}{=} \psi f(t,x,u^0(t)|u_i) + \lambda g(t,x,u^0(t)|u_i) - \gamma_n w(t,u^0(t)|u_i).$$

Теперь из принципа максимума [29] при каких-то $(\widetilde{\lambda}^n, \widetilde{\psi}^n) \in \mathbb{T} \times C([0,n],\mathbb{X})$ выполнены (3.1d), условие трансверсальности на свободном конце: $\psi^n(\tau_n) = 0$, и для почти всех $t \in [0,\tau_i^n]$ соотношения (9.1a)–(9.1c), а также

$$\sup_{p\in U_i(t)} \widetilde{\mathcal{H}}^n\big(\widetilde{x}^n(t),t,u^0|p,\widetilde{\lambda}^n,\widetilde{\psi}^n(t)\big)=\widetilde{\mathcal{H}}^n\big(\widetilde{x}^n(t),t,u^0|\eta^n(t),\widetilde{\lambda}^n,\widetilde{\psi}^n(t)\big), \tag{9.3}$$

$$-\dot{\psi}^n(t)=\frac{\partial\widetilde{\mathcal{H}}^n}{\partial x}\big(\widetilde{x}^n(t),t,u^0|\eta^n(t),\widetilde{\lambda}^n,\widetilde{\psi}^n(t)\big).$$

Отметим, что последнее уравнение эквивалентно (9.1c), поскольку $\mathcal{H}^n$ и $\mathcal{H}_i$ отличаются на не зависящее от фазовой переменной слагаемое. Доопределим мерозначное управление η^n после момента τ_i^n правилом $\eta^n(t) = \widetilde{u}_i^0(t)$ для всех $t > \tau_i^n$; что продолжит и траектории $\widetilde{x}^n, \widetilde{\psi}^n$ как решения (9.1a),(9.1c). Введем также $\widetilde{y}^n \equiv (\widetilde{x}^n, \widetilde{\lambda}^n, \widetilde{\psi}^n)$.

Все $(\widetilde{x}^n, \eta^n, \widetilde{\lambda}^n, \widetilde{\psi}^n)$ удовлетворяют (9.1a),(3.1d),(9.1c) на всем $t \in \mathbb{T}$, то есть лежат в метрическом компакте $\widetilde{\mathfrak{Y}}_i$; тогда перейдя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что они сходятся к некоторой точке $(x^\infty, \eta^\infty, \lambda^\infty, \psi^\infty) \in \widetilde{\mathfrak{Y}}_i$ (фактически только здесь может произойти переход от τ_i к ее подпоследовательности τ_i').

Далее, из оптимальности η^n и u^0 в своих задачах, имеем

$$J_i(u^0|\eta^n;\tau_i^n) - \gamma_n \mathfrak{L}_w[\eta^n](\tau_i^n) \geq J_i(u^0;\tau_i^n) \stackrel{(9.2)}{\geq} J_i(u^0|\eta^n;\tau_i^n) - \gamma_n^2, \tag{9.4}$$

тогда

$$\mathfrak{L}_w[\eta^n](t) \leq \gamma_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{9.5}$$

показано для всех $t \in [0,\tau_i^n]$, а в силу $\eta_n|_{\tau_i^n} \equiv \widetilde{u}_i^0|_{\tau_i^n}$ и определения веса w, это выполнено и для всех $t \in \mathbb{T}$; итак, $\mathfrak{L}_w[\eta^n] \to 0$ равномерно на всем $\mathbb{T}$. Переходя для каждого $t \in \mathbb{T}$ к пределу при $n \to \infty$ имеем $\mathfrak{L}_w[\eta^\infty](t) \leq 0$, то есть $\mathfrak{L}_w[\eta^\infty] \equiv 0$. Теперь в силу определения веса w выполнено $\eta^\infty = \widetilde{u}^0$ почти всюду на $\mathbb{T}$, отсюда $x^\infty = x^0$ и $(x^0, u^0, \lambda^\infty, \psi^\infty) \in \mathfrak{Y}_i$. Отметим также, что $J_i(u^0|\eta^n;\tau_i^n) - J_i(u^0;\tau_i^n) \to +0$ при $n \to \infty$, а позиция $x^n(\tau_i'^n)$ лежит в замыкании области достижимости из точки x_* в момент $\tau_i'^n$ управлениями из $u^0|U_i$.

Теперь из равномерной на всем $\mathbb{T}$ сходимости $\mathfrak{L}_w[\eta^n] \to 0$ следует $\int_{\mathbb{T}} w(t, u^0(t)|\eta^n)dt \to 0$, откуда $w(t, u^0(t)|\eta^n)$ сходится к нулю почти всюду. Переходя к пределу в (9.3) получаем, что для $(x^0, u^0, \lambda^\infty, \psi^\infty)$ почти всюду выполнено (3.1c), то есть оно из $\mathfrak{Z}_i$.

Отметим также, что если равновесие для игрока i было сильным, то последнее неравенство в (9.4) превращается в $J_i(x_*, u^0; \tau_i^n) = J_i(x_*, u^0|\eta^n; \tau_i^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $\mathfrak{L}_w[\eta^n](t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}$. Но тогда $\eta^n \equiv u^0$ $x^n \equiv x^0$, а ψ^n удовлетворяет вместе с (9.1c),(9.3) также (3.2c),(3.1c), откуда ψ^∞ такое же, и теорема показана, а с ним и следствие 4.1.

Вернемся к общему случаю. Испустим из позиции $\widetilde{y}^n(\tau_i^n)$ траекторию y^n системы (8.1) в обратном времени при помощи управления u^0. Тогда $y^n(0) = \varkappa(\tau_i^n, \widetilde{y}^n(\tau_i^n))$. При этом $y^n = (x^n, \lambda^n, \psi^n)$ является решением (3.2a)–(3.2c), кроме того выполнено также $\psi^n(\tau_i^n) = \widetilde{\psi^n}(\tau_i^n) = 0$. Осталось показать, что решение $(x_i^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ всех соотношений принципа максимума является пределом (в компактно-открытой топологии) траекторий $y_n = (x^n, \lambda^n, \psi^n)$. Для этого в силу теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий нам достаточно показать, что сходимость имеет место для начального момента времени, то есть, что последовательность $\varkappa(\tau_i^n, \widetilde{y}^n(\tau_i^n))$ сходится к $(x_*, \lambda^0, \psi^0(0))$.

Поскольку в силу (3.1d) имеем $\widetilde{y}(0) = (x_*, \widetilde{\lambda}^n, \widetilde{\psi}^n(0)) \in \Xi$, то по лемме 8.1 для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}$

$$||\varkappa(t, \widetilde{y}^n(t)) - (x_*, \widetilde{\lambda}^n, \widetilde{\psi}^n(0))||_E \leq \mathfrak{L}_w[\eta^n](t) \overset{(9.5)}{\leq} \gamma_n.$$

Поскольку $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательности $\varkappa(\tau_i^n, \widetilde{y}^n(\tau_i^n))$ и $(x_*, \lambda^n, \psi^n(0))$ имеют один и тот же предел, то есть сходятся к $(x^*, \lambda_i^0, \psi_i^0(0))$, что и требовалось. $\square$

Замечание 9.1. Каждая позиция $x^n(\tau_i'^n)$ лежит в замыкании области достижимости из точки x_* в момент $\tau_i'^n$ управлениями из $u^0|\mathfrak{U}_i$.

Я благодарю Ю. В. Авербуха, без которого эта статья не была бы и начата, и анонимного рецензента, задающего очень правильные вопросы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Труды МИ РАН. 2007. Т. 257. С. 1–271.

2. Асеев С.М., Кряжимский А.В., Бесов К.О. *Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени в экономике* // УМН. 2012. Т. 67. №2(404). С. 3—64.

3. Брыкалов С.А., Головина О.Н., Кряжимский А.В. *Равновесие по Нэшу в играх многих лиц с выбором моментов времени и интегральными функционалами платы* // Современная математика и ее приложения. 2005. Т.26. С. 42–53.

4. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука. 1977.

5. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* Тбилиси: Изд-во Тбил. университета. 1977.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов* М.: Физматгиз. 1961.

7. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции.* М.: Физматлит. 2006.

8. Хлопин Д.В. *О расширении конфликтно-управляемых задач на бесконечном промежутке* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №1. С.107–112.

9. Хлопин Д.В. *Краевые условия на бесконечности для сильно оптимального управления* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. №1. С. 49–58.

10. Хлопин Д.В. *О τ-исчезающей сопряженной переменной в задачах управления на бесконечном промежутке* // Тезисы конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Владимир. 29 июня – 4 июля 2012 года, С.173–174.

11. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* Екатеринбург: УИФ "Наука". 1993.

12. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир. 1986.

13. Янг Л. *Лекции по вариационному управлению и теории оптимального управления.* М.: Мир. 1974.

14. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. *The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons* // SIAM J. Control Optim. 2004. V. 43. P. 1094—1119.

15. Aseev S.M., Veliov V.M. *Needle Variations in Infinite-Horizon Optimal Control* // IIASA Interim Rept. 2012. IR-2012-04.

16. Aseev S.M., Veliov V.M. *Maximum Principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount* // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series B. 2012. V. 19. N 1–2. P. 43–63

17. Aubin J., Clarke F. *Shadow Prices and Duality for a Class of Optimal Control Problems* // SIAM J. Control Optim. 1979. V. 17. P. 567–586.

18. Bagh A. Variational convergence: Approximation and existence of equilibria in discontinuous games // J. of Econ. Theory. 2010 V. 145. P. 1244—1268.

19. Başar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory.* SIAM. 1998.

20. Bogusz D. *On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem* // J. Optim. Theory Appl. 2013. V. 156. N 2. P. 650–682.

21. Carlson D. *Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite-horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable* // J. Optim. Theory Appl. 1990. V. 64. N 1. P. 55–69.

22. Carlson D. *Nonconvex and Relaxed Infinite-Horizon Optimal Control Problems* // J. Optim. Theory Appl. 1993. V. 78. N 3. P. 465–491.

23. Carlson D., Haurie A. *A turnpike theory for infinite horizon open-loop differential games with decoupled dynamics*. In G.J. Olsder (ed.) New Trends in Dynamic Games and Applications. Annals of the Society of Dynamic Games. 1995. V. 3. P. 353–376.

24. Carlson D., Haurie A. *Infinite horizon dynamic games with coupled state constraints* // Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. 2000. V. 5. P. 195–212.

25. Carlson D., Haurie A., Moresino F., Pourtallier O. *Equilibria in Infinite Horizon Dynamic Games* // Troisième Cycle, Romand de Recherche Opèrationnelle. Zinal. Mars. 1999

26. Carlson D., Haurie A. *Infinite horizon control and dynamic games* // in: Floudas C.A., Pardalos P.M. (Eds.) Encyclopedia of Optimization. N.Y.: Springer. 2009. P. 1598–1603.

27. Carlson D., Haurie A., Leizarowitz A. *Infinite Horizon Optimal Control. Deterministic and Stochastic Systems*. Berlin: Springer. 1991.

28. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*. Dordrecht: Kluwer. 1997.

29. Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. N.-Y.: Wiley. 1983.

30. Daniel H.W. *Survey of measurable selection theorems: an update* // in Lect.Notes Math. 794. N.-Y.: Springer. 1980. P. 176–219.

31. Davidson R., Harris R. *Nonconvexities in Continuous-Time Investment Theory* // Review of Economic Studies. 1981. V. 43. P. 235–253.

32. Glicksberg I.L. *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points* // Proc. of Amer. Math. Soc. 1952. N 3. P. 170–174.

33. Halkin H. *Necessary Conditions for Optimal Control Problems with Infinite Horizons* // Econometrica. 1974. V. 42. P.267–272.

34. Hammond P.J., Kennan J. *Uniformly Optimal Infinite Horizon Plans* // Intern. Econ. Review. 1979. V. 20. N 2. P. 283-296

35. Khlopin D.V. *Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems* // arXiv:1207.5358 33 p.

    на рецензировании в Journal of Dynamical and Control Systems

36. Michel P. *On the transversality condition in infinite horizon optimal problems* // Econometrica. 1982. V. 50. P. 975–984.

37. Oliu-Barton M., Vigeral G. *A uniform Tauberian theorem in optimal control* // Advances in Dynamic Games. Annals of the International Society of Dynamic Games. 2012. V. 12. 199–215.

38. Seierstad A. *Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems* // J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. N 1. P. 201–230.

39. Seierstad A. *Fields of extremals and infinite horizon optimal control problems* // Optim. Control Appl. Meth. 1998. V. 19. P. 377–392.

40. Seierstad A., Sydsæter K. *Optimal control theory with economic applications.* Amsterdam: North-Holland. 1987

41. Sorger G. *Competitive dynamic advertising: A modification of the Case game* // J. Economic Dynamics and Control. 1989. V. 13. P. 55–80.

42. Stern L. *Criteria of optimality in the infinite-time optimal control problem* // J. Optim. Theory Appl. 1984. V. 44. N 3. P. 497–508.

43. Tolstonogov A. *Differential inclusions in a Banach space.* Dordrecht: Kluwer. 2000.

44. Vives X. *Nash equilibrium with strategic complementarities* // Journal of Mathematical Economics. 1990. V. 19. P. 305–321.

45. Wachs A.O., Schochetman I.E., Smith R.L. *Average Optimality in Nonhomogeneous Infinite Horizon Markov Decision Processes* // Math. Oper. Res. 2011. V. 36. N 1. P. 147–164.

46. Zaslavski A., Khan M. *On locally optimal programs in the Robinson–Solow–Srinivasan model* // J. Econ. 2010. V. 99. P. 65—92.

NECESSARY CONDITIONS OF OVERTAKING EQUILIBRIUM FOR INFINITE HORIZON DIFFERENTIAL GAMES

Dmitry V. Khlopin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, PhD (khlopin@imm.uran.ru).

Abstract: This paper is devoted to refining the necessary conditions of Nash equilibrium for infinite horizon games. The right-hand endpoint of the trajectories is free; the search for equilibrium is conducted in the class of open-loop strategies. For adjoint variables of each player, the necessary asymptotic condition of overtaking Nash equilibrium is obtained. For certain cases (in particular, when the 'strictly optimal solution' criterium is employed), it allows to explicitly specify the expression for the adjoint variable. S.M. Aseev, A.V. Kryazhimskii, and V.M. Veliov used such an expression as a necessary condition of optimality for certain infinite horizon control problems. In this paper we also specify an example of linear game with the opposite objective functionals. In this game, there exist multiple Nash equilibria that depend on the choice of the sequence along which the players optimize their actions. These equilibria produce absolutely different results. Also Sorger version of the 'Lanchester-type' differential game is considered.

Keywords: dynamic optimization, differential games, infinite horizon problem, transversality condition for infinity, necessary conditions of equilibrium, overtaking equilibrium, unbounded cost.