

УДК 518.9

ББК 22.18

## ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕД К-ЯДРО\*

ЕЛЕНА Б. ЯНОВСКАЯ

Санкт-Петербургский экономико-математический  
институт РАН

191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1

e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Лексикографическим пред  $k$ -ядром кооперативной игры с трансферабельными полезностями (ТП) называется подмножество векторов выигрышей, лексикографически минимизирующих векторы максимальных превосходств одного игрока над другим. Известно, что это решение не пусто для каждой кооперативной ТП игры, эффективно, содержится в наименьшем  $s$ -ядре и в пред  $k$ -ядре и может не содержать пред  $n$ -ядра [9]. Приводится комбинаторная характеристика лексикографического пред  $k$ -ядра, которую можно рассматривать как слабый аналог известной характеристики Колберга пред  $n$ -ядра с помощью сбалансированных наборов коалиций [4]. Различие состоит в том, что в отличие от вектора эксцессов, определяющих пред  $n$ -ядро, компонентами вектора максимальных превосходств являются максимальные значения эксцессов, разделяющих пары игроков. Показано, что нахождение лексикографического пред  $k$ -ядра может быть сведено к решению конечного числа, не превосходящего числа игроков, пар оптимизационных и комбинаторных задач.

*Ключевые слова:* кооперативная игра, решение, пред  $k$ -ядро, пред  $n$ -ядро, лексикографическое пред  $k$ -ядро.

## 1. Введение

В теории решений классических кооперативных игр есть два популярные, «крайние», решения, характеризующиеся с помощью свойства макс-согласованности (т.е. в определении Дэвиса-Машлера [1]: пред  $n$ -ядро и пред  $k$ -ядро. Они не пусты для всех кооперативных игр, анонимны, ковариантны и согласованы, но пред  $n$ -ядро одно-точечно, т.е. является минимальным (хотя и неединственным минимальным [5]) по включению, а пред  $k$ -ядро – единственным максимальным, т.е. наибольшим по включению. Характеризуемое в статье решение – лексикографическое пред  $k$ -ядро [9] – имеет черты обоих упомянутых решений: оно не пусто для каждой ТП игры, содержится в пред  $k$ -ядре, и, следовательно, для каждой пары игроков уравнивает значения максимального превосходства одного из них над другим. При этом под максимальным превосходством игрока  $i$  над игроком  $j$  в условиях вектор выигрышей  $x$  называется максимальное значение эксцессов по коалициям, содержащих игрока  $i$  и не содержащих игрока  $j$ .

С другой стороны, как и пред  $n$ -ядро, лексикографическое пред  $k$ -ядро лексикографически минимизирует вектор упорядоченных значений, но не эксцессов всех коалиций, как пред  $n$ -ядро, а максимальных превосходств. Таким образом, лексикографическое пред  $k$ -ядро принимает во внимание не весь вектор эксцессов, а вектор таких эксцессов, которые обеспечивают значения максимальных превосходств. Так как размерность вектора максимальных превосходств существенно меньше размерности вектора эксцессов всех коалиций, лексикографическое пред  $k$ -ядро в общем случае многозначно. До настоящего времени о свойствах этого решения было известно очень мало: известно, что оно не пусто для каждой ТП игры, и что пред  $n$ -ядро может ему не принадлежать [9],[2].

В разделе 2 приводятся определения кооперативных игр и некоторых свойств их решений, применяемых в формулировках и доказательствах излагаемых далее результатов. Новое понятие разделяющей сбалансированности набора коалиций определяется в разделе 3. Там же формулируются и с использованием этого понятия доказываются некоторые свойства лексикографического пред  $k$ -ядра. Раздел 4 содержит характеристику лексикографического пред  $k$ -ядра с по-

мощью понятия разделяюще сбалансированных наборов множеств. Этот результат является не очевидным, но параллельным характеризации пред  $n$ -ядра, данной Колбергом [4], и, таким образом, выявляет сходства и различия этих решений, которые иллюстрированы примерами, составляющими содержание раздела 5. В Заключение (раздел 6) обсуждается отсутствие свойства согласованности у лексикографического пред  $k$ -ядра, из-за чего не удается получить его аксиоматической характеризации.

## 2. Определения

*Кооперативной игрой с трансферабельными полезностями (ТП игрой)* называется пара  $(N, v)$ , где  $N$  – конечное множество игроков,  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  – характеристическая функция игры, причем полагается  $v(\emptyset) = 0$ .

Через

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v(N)\}$$

обозначается множество *допустимых векторов выигрышей*, а через

$X^*(N, v) = \{x \in X(N, v) \mid x(N) = v(N)\}$  множество *эффективных векторов выигрышей*.

Пусть  $\mathcal{G}$  – класс ТП игр, множества игроков которых содержатся в некотором универсальном множестве  $\mathcal{U}$ . *Решением* для класса  $\mathcal{G}$  называется отображение  $\sigma$ , сопоставляющее каждой игре  $(N, v) \in \mathcal{G}$  некоторое подмножество  $\sigma(N, v) \subset X(N, v)$  допустимых векторов выигрышей.

Набор коалиций  $\mathcal{S}$  множества  $N$  называется *сбалансированным*, если существуют такие положительные числа  $\lambda_S > 0$  для  $S \in \mathcal{S}$ , что  $\sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$  для всех  $i \in N$ . Если набор коалиций  $\mathcal{S}$  одержит сбалансированный поднабор  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ , то он называется *слабо сбалансированным*.

Набор коалиций  $\mathcal{B}$  множества  $N$  называется *разделяющим*, если из существования такой коалиции  $S \in \mathcal{B}$ , что из  $i \in S, j \notin S$  следует существование коалиции  $T \in \mathcal{B}$ , такой что  $j \in T, i \notin T$ .

Очевидно, что любой сбалансированный набор коалиций является разделяющим.

Набор коалиций  $\mathcal{B}$  называется *вполне разделяющим*, если для любой пары игроков  $i, j \in N$  найдутся такие коалиции  $S, T \in \mathcal{B}$ , что  $i \in S, j \notin S, j \in T, i \notin T$ .

Для каждой игры  $(N, v)$  и каждого вектора  $x \in X(N, v)$  *эксцессом* коалиции  $S \subsetneq N$  относительно  $x$  называется разность

$$e(S, x) = v(S) - x(S),$$

а  $e(x) = \{e(S, x)\}_{S \subsetneq N}$  называется *вектором эксцессов* относительно  $x$ .

*Наименьшим  $s$ -ядром* игры  $(N, v)$  называется множество

$$LC(N, v) = \arg \min_{x \in X^*(N, v)} \left( \max_{S \subsetneq N} (v(S) - x(S)) \right). \quad (2.1)$$

Легко можно показать, что  $LC(N, v) \neq \emptyset$  для любой ТП игры  $(N, v)$ , и  $LC(N, v) \subset C(N, v)$ , если  $s$ -ядро  $C(N, v) \neq \emptyset$ .

Для любого вектора  $x \in X(N, v)$  через

$$\mathcal{S}_1(v, x) = \arg \max_{S \subsetneq N} (v(S) - x(S))$$

обозначим набор коалиций, на которых эксцессы принимают максимальные значения относительно  $x$ . Обозначим значение максимальных эксцессов через  $e_1(x)$ .

Тогда для всех  $S \in \mathcal{S}_1(v, x)$  и  $x \in LC(N, v)$

$$v(S) - x(S) = e_1, \quad (2.2)$$

где  $e_1 = \min_{y \in X^*(N, v)} e_1(y)$ .

Набор коалиций  $\mathcal{S}$  из множества  $N$  называется *сбалансированным*, если существуют положительные числа  $\lambda_S, S \in \mathcal{S}$ , для которых выполняются равенства  $\sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ S \ni i}} \lambda_S = 1$  для всех  $i \in N$ .

Набор коалиций  $\mathcal{S}$  из множества  $N$  называется *слабо сбалансированным*, если он содержит сбалансированный поднабор.

Известно, что для того чтобы вектор  $x \in LC(N, v)$ , необходимо и достаточно, чтобы набор коалиций  $\mathcal{S}_1(v, x)$  был слабо сбалансирован<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Этот результат является «общим знанием» и обычно помещается в учебниках в виде упражнения.

Для любого вектора  $x \in \mathbb{R}^N$  через  $\theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N-2}$  обозначим вектор эксцессов  $v(S) - x(S)$ ,  $S \neq N, \emptyset$ , компоненты которого расположены в (слабо) убывающем порядке. Тогда вектор  $\theta(x)$  можно представить в виде

$$\theta(x) = \left( \overbrace{e_1(x), \dots, e_1(x)}^{\mathcal{S}_1(v,x)}, \overbrace{e_2(x), \dots, e_2(x)}^{\mathcal{S}_2(v,x)}, \dots, \overbrace{e_m(x), \dots, e_m(x)}^{\mathcal{S}_m(v,x)} \right). \quad (2.3)$$

$\mathcal{S}_k(v, x)$ ,  $k = 1, \dots, m$  обозначен набор коалиций, на которых достигается  $k$ -е по величине значение  $e_k(x)$  компонент вектора эксцессов  $e(x)$ .

Обозначим через  $\succ_{Lex}$  лексикографическое упорядочение в векторном пространстве.

Пред  $n$ -ядром игры  $(N, v)$  называется единственный вектор выигрышей  $PN(N, v)$ , удовлетворяющий отношению

$$\theta(x) \succ_{Lex} \theta(PN(N, v)) \text{ для всех } x \in X^*(N, v). \quad (2.4)$$

Для каждой пары игроков  $i, j \in N$  и вектора выигрышей  $x$  максимальным превосходством игрока  $i$  над игроком  $j$  в точке  $x$  называется величина

$$s_{ij}(x, v) = \max_{S \ni i, S \not\ni j} (v(S) - x(S)).$$

Пред  $k$ -ядром  $PK(N, v)$  игры  $(N, v)$  называется множество

$$PK(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid s_{ij}(x, v) = s_{ji}(x, v) \text{ для всех } i, j \in N\}. \quad (2.5)$$

Пред  $k$ -ядро  $PK(N, v)$  является непустым, максимальным по включению решением для произвольного замкнутого по отношению к редуцированию классу ТП игр, удовлетворяющим свойствам эффективности, анонимности, ковариантности и согласованности (по Дэвису–Машлеру) [5].

Лексикографическим пред  $k$ -ядром  $PK_{Lex}(N, v)$  игры  $(N, v)$  называется такое подмножество эффективных векторов выигрышей, на которых вектор максимальных превосходств  $\{s_{ij}(x)\}_{i,j \in N}$  достигает минимума по отношению лексимины:

$$PK_{lex}(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid \{s_{ij}(y)\}_{i,j \in N} \succeq_{lexmin} \{s_{ij}(x)\}_{i,j \in N} \forall y \in X^*(N, v)\}. \quad (2.6)$$

Для любой ТП игры  $(N, v)$  лексикографическое пред к-ядро является подмножеством как наименьшего с-ядра, так и пред к-ядра:  $PK_{lex}(N, v) \subset (LC \cap PK)(N, v)$  [2]. Из этого факта и ввиду того, что отношение  $\succeq_{lexmin}$  является полным, мы можем заменить множество  $X^*(N, v)$  в определении (2.6) пред к-ядром  $PK(N, v)$ , откуда следует естественность названия решения «Лексикографическое пред к-ядро».

Напомним хорошо известные свойства решений, которым удовлетворяют и пред к-ядро, и пред п-ядро.

- Решение  $\sigma$  для произвольного класса  $\mathcal{G}$  ТП игр *эффективно*, если для любой игры  $(N, v) \in \mathcal{G}$  любого вектора  $x \in \sigma(N, v)$ 

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$
- Решение  $\sigma$  для произвольного класса  $\mathcal{G}$  ТП игр *ковариантно относительно стратегических преобразований*, если для любой игры  $(N, b, \Omega)$  и любых чисел  $\alpha > 0$  и векторов  $\beta \in \mathbb{R}^N$  игра  $(N, \alpha v + \beta) \in \mathcal{G}$  и

$$\sigma(N, \alpha v + \beta) = \alpha \sigma(N, v) + \beta,$$

где для каждой коалиции  $S$   $(\alpha v + \beta)(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$ .

Для игры  $(N, v) \in \mathcal{G}$ , игроки  $i, j \in N$  называются *взаимозаменяемыми*, если

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}) \text{ для всех } S \subset N \setminus \{i, j\}.$$

- Решение  $\sigma$  для класса  $\mathcal{G}$  удовлетворяет свойству *равной взаимозаменяемости*.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>иногда это свойство – equal treatment property (ETP) – называют симметрией, однако последнее свойство означает ковариантность решения относительно всех симметричных преобразований игры [8], если для любых игры  $(N, v) \in \mathcal{G}$  и вектора  $x \in \sigma(N, v, \Omega)$  справедливо равенство  $x_i = x_j$ , для взаимозаменяемых игроков  $i, j$ .

- Решение  $\sigma$  для класса  $\mathcal{G}$  согласовано в определении Дэвиса–Машлера, если для любых игры  $(N, v) \in \mathcal{G}$  и коалиции  $S \subset N$  из  $x \in \sigma(N, v)$  следует, что редуцированная игра  $(S, v_S^x) \in \mathcal{G}$  и  $x_S \in \sigma(S, v_S^x)$ , где

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max_{Q \subset N \setminus S} v(T \cup Q) - x(Q), & \text{если } T \subsetneq S. \end{cases} \quad (2.7)$$

Известно, что пред  $k$ -ядро является максимальным по включению решением, обладающим всеми четырьмя приведенными свойствами [7], а пред  $n$ -ядро одноточечно, т.е. является минимальным (хотя и не единственным [5],) решением, обладающим этими свойствами. Так как лексикографическое пред  $k$ -ядро содержится и в наименьшем  $s$ -ядре, и в пред  $k$ -ядре, очевидно, оно обладает первыми тремя из четырех приведенных свойств. Однако наименьшее  $s$ -ядро не является согласованным, поэтому нельзя сделать вывод о согласованности лексикографического пред  $k$ -ядра (см. Заключение).

### 3. Свойства лексикографического пред $k$ -ядра

Рассмотрим произвольные игру  $(N, v)$ , вектор  $x \in X^*(N, v)$ , и соответствующие им вектора эксцессов  $e(x)$  и максимальных превосходств  $\{s_{ij}(x)\}_{i,j \in N} \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ , где  $n = |N|$ .

Как было показано (2.6), лексикографическая минимизация вектора  $\theta(x)$  по  $x \in X^*(N, v)$  приводит к пред  $n$ -ядру. Аналогично можно представить и лексикографическое пред  $k$ -ядро.

Для каждого вектора  $x \in PK(N, v)$  обозначим вектор максимальных превосходств, компоненты которого расположены в слабо убывающем порядке, через  $\theta^{ms}(x) \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ . Тогда лексикографическая минимизация по  $x \in X^N$  вектора  $\theta^{ms}(x)$  приведет к векторам из лексикографического пред  $k$ -ядра.

Пусть

$$\theta^{ms}(x) = (s_1(x), \dots, s_1(x), s_2(x), \dots, s_2(x), s_{m(x)}(x), \dots, s_{m(x)}(x)), \quad (3.1)$$

где  $s_1(x) > s_2(x) > \dots > s_{m(x)}(x)$ , где  $s_k(x)$  –  $k$ -е по величине значение максимальных превосходств для  $x$ . Обозначим через  $S_k(v, x)$ ,  $k =$

$1, \dots, m(x)$  наборы коалиций, на которых достигаются соответствующие значения  $s_k(x)$ :

$$\mathbf{S}_k(v, x) = \{S \mid v(S) - x(S) = s_k(x)\}. \quad (3.2)$$

В отличие от упорядоченных векторов эксцессов  $\theta(x)$ , лексикографическим минимумом которых является пред  $n$ -ядро (2.6), в равенстве (3.1) координатами вектора  $\theta^{ms}(x)$  являются не значения векторов эксцессов для всех коалиций, а только эксцессов тех из них, на которых достигаются значения максимальных превосходств.

Покажем, как связаны между собой наборы  $\mathbf{S}_k(v, x)$  для разных  $k$ . Для этого введем следующие обозначения:

Для произвольного набора коалиций  $\mathcal{A}$  множества  $N$  обозначим через  $\mathfrak{U}(\mathcal{A})$  замыкание набора  $A$  относительно объединений, т.е.

$$S \in \mathfrak{U}(\mathcal{A}) \iff S = \bigcup_{j=1}^k K_j, \text{ для поднабора } \{K_1, \dots, K_k\} \subset \mathcal{A}.$$

Каждый набор коалиций  $\mathcal{A}$  множества  $N$  порождает его разбиение  $\mathbf{T}(\mathcal{A}) = (T_1, T_2, \dots, T_l)$ ,  $\bigcup_{h=1}^k T_h = N$ ,  $i, j \in T_k, k = 1, \dots, l$  такое что для любой пары игроков  $i, j \in N$  и коалиции  $S \in \mathcal{A}$  либо  $i, j \in S \in \mathcal{A}$ , либо  $i, j \notin S \in \mathcal{A}$ .

Для произвольного  $x \in X^*(N, v)$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\alpha(v, x) &= \{S \subset N \mid v(S) - x(S) \geq \alpha\}, \\ \mathbf{T}_k(v, x) &= \mathbf{T}(\mathcal{B}_{s_k}(v, x)), \\ \mathcal{T}_k(v, x) &= \mathfrak{U}(\mathbf{T}_k(v, x)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из определений (3.3) следует, что набор  $\mathcal{T}_k(v, x)$  состоит из всех коалиций, являющихся объединениями коалиций разбиения множества игроков, порождаемого набором  $\mathcal{B}_{s_k}(v, x)$ , или, что равносильно, набором  $\bigcup_{j=1}^k \mathbf{S}_j(v, x)$ .

Произвольный набор коалиций  $\mathcal{S}$  множества  $N$  *разделяет* игроков  $i, j \in N$ , или пара  $i, j$  *разделяется* набором  $\mathcal{S}$ , если существуют такие коалиции  $S, T \in \mathcal{S}$ , что  $S \ni i, S \not\ni j, T \ni j, T \not\ni i$ .



**Лемма 3.1.** Для любой игры  $(N, v)$  и вектора выигрышей  $x \in X^*(N, v)$

$$\mathcal{S}_k(v, x) \cap \mathcal{T}_{k-1}(v, x) = \emptyset \text{ для всех } k = 2, \dots, m,$$

где наборы  $\mathcal{S}_k(v, x)$  и  $\mathcal{T}_{k-1}(v, x)$  определены соответственно в (3.2) и (3.3).

*Доказательство.* Пусть  $S \in \mathcal{S}_k(v, x)$  – произвольная коалиция. Тогда по определению  $v(S) - x(S) = s_k = s_{ij}(x)$  для некоторой пары игроков  $(i, j)$ . По определению (3.1) вектора  $\theta^{ms}(x)$  для любой коалиции  $T \in \bigcup_{h=1}^{k-1} \mathcal{S}_h(v, x)$  либо  $i, j \in T$ , либо  $i, j \notin T$ , т.е. игроки  $i, j$  не разделяются коалициями из набора  $\bigcup_{h=1}^{k-1} \mathcal{S}_h(v, x)$  и, следовательно, из еще большего набора  $\mathcal{T}_{k-1}(v, x)$ . Поэтому  $k$ -е значения максимальных превосходств  $s_k(x)$  не могут достигаться на наборе  $\mathcal{T}_{k-1}(v, x)$ , что и доказывает лемму.  $\square$

По определению лексикографического пред  $k$ -ядра для любых его векторов  $x, y \in PK_{lex}(N, v)$  выполняется равенство  $\theta^{ms}(x) = \theta^{ms}(y)$ . Таким образом, можно исключить « $x$ » в равенстве (3.1), и для любого вектора  $x \in PK_{lex}(N, v)$  будем записывать это равенство просто в виде

$$\theta^{ms}(x) = (s_1, \dots, s_1, s_2, \dots, s_2, s_m, \dots, s_m). \quad (3.4)$$

Число  $m$  в равенстве (3.4) зависит от игры, т.е.  $m = m(N, v)$ , но далее, рассматривая одну фиксированную игру, мы для простоты будем обозначать его просто одной буквой  $m$ .

Из сравнения определений наименьшего  $s$ -ядра (2.1) и лексикографического пред  $k$ -ядра (2.6) следует, что  $s_1 = e_1$ , где  $e_1 = \min_{x \in X^*(N, v)} \max_{S \subset N} (v(S) - x(S))$  – максимальный эксцесс пред  $n$ -ядра.

Набор коалиций  $\mathcal{S}$  называется *разделяющим*, если любая пара игроков  $i, j \in N$  либо разделяется этим набором, либо для любой коалиции  $S \in \mathcal{S}$  выполняется  $i, j \in S$  или  $i, j \notin S$ . Набор  $\mathcal{S}$  называется *вполне разделяющим*, если он разделяет любую пару игроков.

**Определение 3.1.** Набор коалиций  $\Omega$  из множества  $N$  называется *разделяюще сбалансированным*, если

1) он слабо сбалансирован,

2) разделяющий и

3) в представлении  $\Omega = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ , где  $\mathcal{B}$  – максимально сбалансированный поднабор набора  $\Omega$ , любая пара игроков  $i, j$ , разделяемая набором  $\mathcal{A}$ , была уже разделена набором  $\mathcal{B}$ .

Напомним применяемую далее характеристику Колберга [4] сбалансированных наборов, с помощью которого он получил комбинаторную характеристику пред  $n$ -ядра:

**Лемма [Колберг 1971].** *Для того чтобы набор  $\mathcal{S}$  коалиций множества  $N$  был сбалансированным, необходимо и достаточно, чтобы из  $y \in \mathbb{R}^N, y(N) = 0, y(S) \geq 0$  для всех  $S \in \mathcal{S}$  следовало бы  $y(S) = 0$  для всех  $S \in \mathcal{S}$ .*

Приведем очевидное следствие из нее.

**Следствие.** *Пусть  $\mathcal{B}$  произвольный набор коалиций множества  $N$ ,  $\mathcal{C}$  его максимальный сбалансированный поднабор. Тогда существует вектор  $y \in \mathbb{R}^N$ , такой что  $y(S) = 0$  для всех  $S \in \mathcal{C}$  и  $y(S) > 0$  для всех  $S \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$ .*

Для игры  $(N, v)$  и вектора  $x \in X^*(N, v)$  обозначим через  $I_k(x) = \{(i, j) \mid s_{ij}(x) = s_{ji}(x) = s_k\}, k = 1, \dots, m$  множество пар игроков, на которых достигается  $k$ -е по убыванию значение максимальных превосходств. Ввиду (3.4), множества  $I_k(x)$  не зависят от  $x \in PK_{lex}(N, v)$ , и мы будем обозначать их просто через  $I_k = I_k(x), k = 1, \dots, m$ .

Для  $k = 1, \dots, m$  определим множества

$$\begin{aligned} \varphi_k(N, v) &= \{x \in X^*(N, v) \mid (\theta^{ms}(x))_{\bigcup_{l=1}^k I_l(x)} = \\ &= (\theta^{ms}(z))_{\bigcup_{l=1}^k I_l(z)}, \forall z \in PK_{lex}(N, v)\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Лемма 3.2.** *Для любой игры  $(N, v)$  множества  $\varphi_k(N, v), k = 1, \dots, m$  выпуклы и  $I_l(x) = I_l(y) = I_l$  для любых  $x, y \in \varphi_k(N, v), l = 1, \dots, k$ .*

*Доказательство.* Доказательство проводится индукцией по  $k$ . Для  $k = 1$   $\varphi_k(N, v) = LC(N, v)$ , и утверждение леммы справедливо.

Предположим, что оно справедливо для всех  $l = 1, \dots, k - 1$ . Тогда  $I_l(x) = I_l$  и из  $x \in \varphi_{k-1}(N, v)$  следует, что наборы  $\bigcup_{l=1}^{k-1} S_l(v, x)$ ,

$\bigcup_{l=1}^{k-1} \mathcal{S}_l(v, z)$  для всех  $x \in \varphi_k(N, v)$  и  $z \in PK_{lex}(N, v)$  разделяют один

и тот же набор пар игроков  $\bigcup_{l=1}^{k-1} I_l$ . Поэтому наборы  $\mathcal{T}_l(v, x) = \mathcal{T}_l(v, z)$  совпадают для всех  $x \in \varphi_{k-1}(N, v)$ ,  $z \in PK_{lex}(N, v)$ , так как эти наборы полностью определяются наборами пар разделяемых ими игроков (3.3). Обозначим их через  $\mathcal{T}_l(v)$ ,  $l = 1, \dots, k-1$ .

Пусть  $x, y \in \varphi_k(N, v)$ . Тогда  $s_k(x) = s_k(y) = s_k$  и для всех  $S \notin \mathcal{T}_{k-1}(v)$   $v(S) - x(S) \leq s_k$ ,  $v(S) - y(S) \leq s_k$ . Следовательно,  $v(S) - \frac{x+y}{2}(S) = s_k$  только если  $v(S) - x(S) = v(S) - y(S) = s_k$ , откуда следует включение

$$I_k\left(\frac{x+y}{2}\right) \subset I_k(x) \cap I_k(y). \quad (3.6)$$

Так как  $x, y \in \varphi_k(N, v)$ , из (3.6) и определения множества  $\varphi_k(N, v)$  следует

$$I_k\left(\frac{x+y}{2}\right) = I_k(x) = I_k(y), \quad (3.7)$$

и из индукционного предположения следует выпуклость  $\varphi_k(N, v)$ .

Для любого  $k = 1, \dots, m$   $PK_{lex}(N, v) \subset \varphi_k(N, v)$  по определению множеств  $\varphi_k(N, v)$ , поэтому из (3.7) следует  $I_k(v, x) = I_k$  для всех  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .  $\square$

Приведем два очевидные следствия из леммы 3.2.

**Следствие 3.1.** *Для любой игры  $(N, v)$   $\varphi_m(N, v) = PK_{lex}(N, v)$ , где  $m$  – минимальное число, для которого набор  $\mathcal{T}_m(v, x)$  вполне разделяющий для  $x \in \varphi_m(N, v)$ .*

**Следствие 3.2.** *Для любой игры  $(N, v)$  множество  $PK_{lex}(N, v)$  выпуклое.*

Следующее свойство лексикографического пред  $k$ -ядра является ослаблением свойства сбалансированности наборов коалиций, на которых эксцессы ограничены снизу, которому удовлетворяет пред  $n$ -ядро:

**Лемма 3.3.** *Если  $x \in PK_{lex}(N, v)$ , то наборы  $\mathcal{B}_\alpha(x, v) = \{S \subset N \mid v(S) - x(S) \geq \alpha\}$  пусты или разделяюще сбалансированы для всех  $\alpha$ .*

*Доказательство.* Пусть  $(N, v)$ ,  $x \in PK_{lex}(N, v)$  – произвольные игра и вектор из лексикографического пред  $k$ -ядра. Докажем сначала лемму для  $\alpha = s_1, \dots, s_m$ . Заметим, что

$$\mathcal{B}_{s_k}(v, x) \supset \bigcup_{l=1}^k \mathcal{S}_k(v, x), \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

и коалиции  $S \in \mathcal{B}_{s_k}(v, x) \setminus \bigcup_{l=1}^k \mathcal{S}_k(v, x)$  не дают значений максимальных превосходств и не участвуют в определении лексикографического пред  $k$ -ядра. Поэтому, если такая коалиция  $S$  разделяет некоторую пару игроков  $(i, j)$ , то  $v(S) - x(S) \leq s_{ij}(x) = v(T) - x(T)$ , где  $T \in \bigcup_{l=1}^k \mathcal{S}_k(v, x)$ . Следовательно, достаточно доказать, что наборы

$\bigcup_{l=1}^k \mathcal{S}_k(v, x), k = 1, \dots, m$  являются пустыми или разделяюще сбалансированными. Этот факт будем доказывать индукцией по  $k$ .

Так как  $PK_{lex}(N, v) \subset LC(N, v) \cap PK(N, v)$ , набор  $\mathcal{S}_1(v, x)$  слабо сбалансированный и разделяющий.

Предположим, что этот набор не является разделяюще сбалансированным. Тогда найдется пара игроков  $r, s \in N$ , разделяемая набором  $\mathcal{S}_1(v, x)$ , откуда следует  $s_{rt}(x) = s_{tr}(x) = s_1$ , но не разделяемая никаким сбалансированным его поднабором. По следствию к лемме Колберга найдется такой вектор  $y \in X^*(N, v)$ , что  $y(S) = x(S)$  для коалиций  $S$ , принадлежащих максимальному сбалансированному поднабору набора  $\mathcal{S}_1(v, x)$ , и  $y(S) > x(S)$  для остальных коалиций этого набора, откуда следует  $s_{rt}(y) = s_{rt}(y) < s_1$ , и  $x \notin PK_{lex}(N, v)$ , что противоречит условию, и разделяющая сбалансированность набора  $\mathcal{S}_1(v, x)$  доказана.

Предположим теперь, что наборы  $\bigcup_{j=1}^l \mathcal{S}_j(v, x)$  разделяюще сбалансированы для всех  $l = 1, \dots, k - 1$  и покажем, что набор  $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$  разделяюще сбалансирован.

Пусть  $\mathcal{C}_k(v, x) \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$  – максимально сбалансированный набор. Предположим, что найдутся игроки  $r, t \in N$ , разделяемые набором  $\mathcal{B}_{s_k}(v, x)$ , но не разделяемые набором  $\mathcal{C}_k(v, x)$ . Тогда  $s_{rt}(x) =$

$= s_{tr}(x) = s_h(x)$  для некоторого  $h \leq k$ , откуда следует  $(r, t) \in I_h(x)$ .

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned} \max y(N) & \quad \text{при ограничениях} \\ y(S) \geq x(S) & \quad \text{для всех } S \in \mathcal{C}_k(v, x), \\ y(S) = x(S) + \varepsilon & \quad \text{для всех } S \in \bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x) \setminus \mathcal{C}_k(v, x) \end{aligned}$$

для достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Так как набор  $\mathcal{C}_k(v, x) \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$  максимально сбалансированный, по следствию к лемме Колберга получаем, что эта задача имеет решение  $y(N) = v(N)$ .

Тогда  $s_{rt}(y) = s_{tr}(y) < s_h$ , и  $\theta^{ms}(x) \succ_{lex} \theta^{ms}(y)$ , что противоречит выбору  $x \in PK_{lex}(N, v)$ . Полученное противоречие доказывает справедливость леммы для  $\alpha = s_1, \dots, s_k$ .

Если же  $\alpha \in (s_k, s_{k-1})$  для некоторого  $k = 2, \dots, m$ , то для любой коалиции  $S \in \mathcal{B}_\alpha(v, x) \setminus \mathcal{B}_{s_{k-1}}(v, x)$  выполняется неравенство  $v(S) - x(S) \leq s_{k-1}$ . Поэтому если некоторая пара игроков разделяется набором  $\mathcal{B}_\alpha(v, x)$ , то она разделяется и набором  $\bigcup_{h=1}^{k-1} \mathcal{S}_h(v, x)$ , разделяющая сбалансированность которого уже была доказана выше. Для  $\alpha > s_1$  набор  $\mathcal{B}_\alpha(v, x) = \emptyset$ , а для  $\alpha < s_m$  наборы  $\mathcal{B}_\alpha(v, x)$  остаются разделяюще сбалансированными, так как набор  $\mathcal{B}_{s_m}(v, x) \subset \mathcal{B}_\alpha(v, x)$  вполне разделяющий.  $\square$

**Лемма 3.4.** *Для любой игры  $(N, v)$  и вектора  $x \in PK_{lex}(N, v)$ , существуют сбалансированные наборы коалиций  $\mathcal{C}_k(v, x) \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$ ,  $k = 1, \dots, m$  удовлетворяющие условию  $\mathcal{C}_k(v, x) \cap \mathcal{S}_k(v, x) \neq \emptyset$ .*

*Доказательство.* По лемме 3.3 наборы  $\mathcal{B}_{s_k}(v, x)$  и  $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$  для  $x \in PK_{lex}(N, v)$ ,  $k = 1, \dots, m$  разделяюще сбалансированные. Пусть  $\mathcal{C}_k(v, x)$  – максимальный сбалансированный набор, содержащийся в  $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$ .

Для  $k = 1$  результат следует из леммы 3.3. Аналогично доказательству леммы 3.3 из предположения, что для некоторого  $k =$

$= 2, \dots, m$   $\mathcal{C}_k(v, x) \cap \mathcal{S}_k(v, x) = \emptyset$  для всех сбалансированных наборов  $\mathcal{C}_k(v, x) \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{S}_j(v, x)$ , следовало бы существование вектора  $y \in X^*(N, v)$   $y(S) = x(S)$  для всех  $S \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{S}_j(v, x)$  и  $y(S) > x(S)$  для всех  $S \in \mathcal{S}_k(v, x)$ , откуда бы следовало, что значение  $s_k(y) < s_k = s_k(x)$ , так как набор  $\mathcal{S}_k(v, x)$  разделяет все пары игроков из  $I_k$ . Последнее неравенство противоречит принадлежности  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .  $\square$

**Лемма 3.5.** Для любого  $k = 1, \dots, m$  максимальные сбалансированные наборы коалиций  $\mathcal{C}_k(v, x)$ , удовлетворяющие условиям леммы 3.4, не зависят от  $x \in PK_{lex}(N, v)$ :  $\mathcal{C}_k(v, x) = \mathcal{C}_k(v)$ , и разделяют все пары игроков из множества  $\bigcup_{h=1}^k I_h$ .

*Доказательство.* Докажем утверждение леммы для  $k = 1$ . Напомним, что для того чтобы вектор выигрышей  $x \in LC(N, v)$  необходимо и достаточно, чтобы набор коалиций  $\mathcal{S}_1(v, x)$ , на которых достигается  $\max_{S \subset N} (v(S) - x(S))$ , был слабо сбалансирован, т.е. содержал сбалансированный поднабор. Обозначим через  $\text{relint} LC(N, v)$  относительную внутренность наименьшего  $s$ -ядра. Пусть  $x_1, x_2 \in PK_{lex}(N, v) \subset LC(N, v)$ . Если  $\mathcal{S}_1(v, x_1) \neq \mathcal{S}_1(v, x_2)$ , то для вектора  $\frac{x_1+x_2}{2} \in LC(N, v)$  (множество  $LC(N, v)$  выпуклое)

$$\mathcal{S}_1\left(v, \frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \mathcal{S}_1(v, x_1) \cap \mathcal{S}_1(v, x_2).$$

Итерируя это равенство по  $x \in PK_{lex}(N, v)$ , получим, что

$$\mathcal{S}_1(v, \bar{x}) = \bigcap_{x \in PK_{lex}(N, v)} \mathcal{S}_1(v, x)$$

где  $\bar{x}$  – центр тяжести множества  $PK_{lex}(N, v)$ . Следовательно,

$$\mathcal{C}_1(v, \bar{x}) \subset \bigcap_{x \in LC(N, v)} \mathcal{C}_1(v, x). \tag{3.9}$$

Положим  $\mathcal{C}_1(v) = \mathcal{C}_1(v, \bar{x})$ .

Для любого  $x \in PK_{lex}(N, v)$  набор  $\mathcal{C}_1(v, x)$  разделяет все пары игроков из  $I_1$ . Следовательно, и набор  $\mathcal{C}_1(v) = \mathcal{C}_1(v, \bar{x})$  также разделяет все пары игроков из  $I_1$ .

Покажем, что он является максимальным по включению. Для этого покажем, что  $\mathcal{C}_1(v) = \mathcal{C}_1(v, x)$  для всех  $x \in PK_{lex}(N, v)$ . Из (3.9) следует включение  $\mathcal{C}_1(v) \subset \mathcal{C}_1(v, x)$ . Предположим, что для некоторого  $x \in PK_{lex}(v, x)$

$$\mathcal{C}_1(v) \subsetneq \mathcal{C}_1(v, x), \quad (3.10)$$

и пусть  $\mathcal{C}_1(v, x)$  – сбалансированный набор, обладающий свойством (3.10). Тогда коалиции из набора  $\mathcal{C}_1(v, x) \setminus \mathcal{C}_1(v)$  разделяют некоторых игроков из  $I_1$ , хотя они уже разделены набором  $\mathcal{C}_1(v)$ . По лемме Колберга и следствию из нее для любого вектора  $y \in X^*(N, v)$  такого, что  $y(S) = x(S)$  для всех  $S \in \mathcal{C}_1(v)$  и  $y(S) \not\equiv x(S)$  на наборе  $S \in \mathcal{C}_1(v, x)$ , существуют коалиции  $T, Q \in \mathcal{C}_1(v, x) \setminus \mathcal{C}_1(v)$ , для которых  $y(T) < x(T)$ ,  $y(Q) > x(Q)$ . Для пары игроков  $(i, j)$ , разделяемых коалицией  $T$ , должны быть  $s_1(y) > s_1(x)$ , и  $y \notin LC(N, v)$ . Полагая  $y = \bar{x}$ , получаем, что единственной возможностью является  $x = \bar{x}$ , т.е. включение (3.10) является равенством.

Предположим, что  $\mathcal{C}_l(v, x) = \mathcal{C}_l(v)$  для всех  $l = 2, \dots, k-1$ ,  $k = 3, \dots, m$ , и  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .

По определению наборов  $\mathcal{S}_l(v, x)$  для  $x \in PK_{lex}(N, v)$  и любого  $l \leq k$  равенства  $s_{ij}(x) = s_l = v(S) - x(S)$  достигаются только на коалициях  $S \in \mathcal{S}_l(v, x)$ . Для остальных коалиций из  $S \in \mathcal{B}_{s_l}(v, x) \setminus \bigcup_{j=1}^l \mathcal{S}_j(v)$ ,  $i \in S, j \notin S$  следует, что  $s_{ij}(x) > s_l$ , т.е. игроки  $i$  и  $j$  уже были разделены ранее на шаге  $h < l$ .

По индукционному предположению и из леммы 3.4 следует, что сбалансированные наборы  $\mathcal{C}_l(v)$  для  $l < k$  являются поднаборами наборов  $\bigcup_{h=1}^l \mathcal{S}_h(v, x)$ , и

$$\mathcal{C}_k(v, x) \cap \bigcup_{h=1}^k \mathcal{S}_h(v, x) \neq \emptyset$$

для всех  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .

Из леммы 3.2 следует, что любых  $x, y \in PK_{lex}(N, v)$  и  $k = 1, \dots, m$  выполняются равенства  $I_k(x) = I_k(y) = I_k(\frac{x+y}{2}) = I_k$ . Следовательно, наборы  $\mathcal{S}_k(v, y)$  и  $\mathcal{S}_k(v, x)$  разделяют только пары игроков из множества  $I_k$ . Из этого факта аналогично случаю  $l = 1$  легко показать, что для  $l = k$  и любых  $x, y \in PK_{lex}(N, v)$

$$\mathcal{S}_k\left(v, \frac{x+y}{2}\right) = \mathcal{S}_k(v, x) \cap \mathcal{S}_k(v, y),$$

откуда следует равенство

$$S_k(v, \bar{x}) = \bigcap_{x \in PK_{lex}(N, v)} S_k(v, x).$$

Полагаем  $C_k(v) = C_k(v, \bar{x})$ , где  $\bar{x}$  – центр тяжести множества  $PK_{lex}(N, v)$ .

Доказательство равенств  $C_k(v) = C_k(v, x)$  для всех  $x \in PK_{lex}(N, v)$  проводится аналогично случаю  $k = 1$ , рассмотренному в начале доказательства.  $\square$

#### 4. Характеризация лексикографического пред $k$ -ядра с помощью сбалансированности

В этом параграфе будет дана комбинаторная характеристика лексикографического пред  $k$ -ядра с помощью свойства разделяющей сбалансированности наборов  $\bigcup_{h=1}^k S_h(v, x)$  для  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .

Пусть  $x \in X^*(N, v)$  – произвольный вектор. Запишем упорядоченный вектор максимальных превосходств для вектора  $x$  (3.1):

$$\theta^{ms}(x) = \left( \overbrace{s_1(x), \dots, s_1(x)}^{I_1(x)}, \overbrace{s_2(x), \dots, s_2(x)}^{I_2(x)}, \dots, \overbrace{s_m(x), \dots, s_m(x)}^{I_m(x)} \right).$$

**Теорема 4.1.** *Для того чтобы вектор  $x \in X^*(N, v)$  принадлежал лексикографическому пред  $k$ -ядру, необходимо и достаточно, чтобы наборы коалиций  $\bigcup_{h=1}^k S_h(v, x)$ ,  $k = 1, \dots, t$  были разделяюще сбалансированы.*

*Доказательство.* Необходимость следует из леммы 3.4.

*Достаточность.* Пусть вектор  $x \in X^*(N, v)$  удовлетворяет условиям Теоремы.

Пусть  $C_k(v, x)$ ,  $k = 1, \dots, t$  – максимальные сбалансированные наборы, содержащиеся соответственно, в наборах  $\bigcup_{h=1}^k S_h(v, x)$ .

Из условий разделяющей сбалансированности набора  $S_1(v, x)$  следует, что  $x \in (PK \cap LC)(N, v)$  откуда получаем  $s_1(x) = s_1$  и  $C_1(v, x) \supset C_1(v)$ ,  $I_1(v, x) \supset I_1$ . Напомним, что наборы  $C_k(v)$  были определены в лемме 3.5. Предположим, что  $C_1(v, x) \neq C_1(v)$ . Рассмотрим следующие случаи:



1)  $v(S) - y(S) = s_1$  для всех  $y \in PK_{lex}(N, v)$ ,  $S \in \mathcal{C}_1(v, x)$ . Покажем, что в этом случае должно быть  $I_1(x) \supsetneq I_1$ . Действительно, если  $I_1(x) = I_1$ , то набор  $\mathcal{C}_1(v)$  не максимальный сбалансированный поднабор набора  $\mathcal{S}_1(v, y)$  так как набор  $\mathcal{C}_1(v, x)$  обладает такими же свойствами.

2) Существует  $y \in PK_{lex}(N, v)$ , для которого

$$\begin{aligned} v(S) - y(S) &= s_1 && \text{для } S \in \mathcal{C}_1(v), \\ v(S) - y(S) &\leq s_1 && \text{для } S \in \mathcal{C}_1(v, x) \setminus \mathcal{C}_1(v) \end{aligned}$$

и хотя бы для одной коалиции во второй строке выполняется строгое неравенство. Тогда по сбалансированности набора  $\mathcal{C}_1(v, x)$  эта система несовместна по следствию к лемме Колберга. Следовательно,  $\mathcal{C}_1(v, x) = \mathcal{C}_1(v)$ .

Предположим, что  $s_j(x) = s_j$  и  $\mathcal{C}_j(v, x) = \mathcal{C}_j(v)$  для всех  $j < k \leq m$ , а  $\mathcal{C}_k(v, x) \neq \mathcal{C}_k(v)$ . Так как наборы  $\mathcal{C}_k(v, x)$ ,  $\mathcal{C}_{k-1}(v)$  сбалансированы, по следствию к лемме Колберга не существует вектора  $z \in X^*(N, v)$ , удовлетворяющего следующим равенствам и неравенствам:

$$\begin{aligned} z(S) &= x(S) && \text{для } S \in \mathcal{C}_{k-1}(v), \\ z(S) &\geq x(S) && \text{для } S \in \mathcal{C}_k(v, x) \setminus \mathcal{C}_{k-1}(v), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где имеется хоть одно строгое неравенство, а из  $\mathcal{C}_{k-1}(v, x) = \mathcal{C}_{k-1}(v)$  следует, что  $x(S) = y(S)$  для всех  $y \in PK_{lex}(N, v)$  и  $S \in \mathcal{C}_{k-1}(v)$ .

Из индукционного предположения и определения лексикографического пред  $k$ -ядра следует, что если наборы  $\mathcal{C}_k(v, x) \cap \mathcal{S}_k(v, x)$ ,  $\mathcal{C}_k(v) \cap \mathcal{S}_k(v, y)$  разделяют некоторых игроков, например,  $p, q$ , то, соответственно,  $s_{pq}(x) = s_k(x)$ ,  $s_{pq}(v, y) = s_k$ . Рассмотрим следующие случаи:

1)  $y(S) = x(S)$  для всех  $S \in \mathcal{C}_k(v, x) \setminus \mathcal{C}_{k-1}(v)$  и  $y \in PK_{lex}(N, v)$ . Тогда  $s_k(x) = s_k(y) = s_k$ . В этом случае из  $\mathcal{C}_k(v, x) \neq \mathcal{C}_k(v)$ ,  $\mathcal{C}_k(v) \not\subset \mathcal{C}_k(v, x)$ , следовало бы, что объединение  $\mathcal{C}_k(v, x) \cup \mathcal{C}_k(v)$  было сбалансированным набором, содержащимся в наборе  $\bigcup_{h=1}^k \mathcal{S}_k(v, x)$ , что противоречило бы максимальнойности набора  $\mathcal{C}_k(v, x)$ .

Если же  $\mathcal{C}_k(v) \subset \mathcal{C}_k(v, x)$ , то из  $\mathcal{C}_{k-1}(v) \subset \mathcal{C}_k(v)$  следует, что  $x(S) = y(S) = s_k$  для  $S \in \mathcal{C}_k(v, x) \setminus \mathcal{C}_k(v)$  и всех  $y \in PK_{lex}(N, v)$ , и мы получаем аналогичное противоречие с максимальнойностью набора  $\mathcal{C}_k(v) = \mathcal{C}_k(v, y)$ , так как набор  $\mathcal{C}_k(v, x)$  обладает всеми необходимыми для набора  $\mathcal{C}_k(v)$  свойствами.

2) Существует  $y \in PK_{lex}(N, v)$ , для которого  $y(S) = x(S)$  не для всех  $S \in \mathcal{C}_k(v, x) \setminus \mathcal{C}_{k-1}(v)$ . Из неразрешимости системы (4.1) следует существование коалиции  $S \in \mathcal{C}_k(v, x) \setminus \mathcal{C}_{k-1}(v)$ , для которой  $y(S) < x(S)$ . Тогда

$$v(S) - y(S) > v(S) - x(S) = s_k(x). \quad (4.2)$$

По индукционному предположению  $s_j(x) = s_j$  для  $j < k$ . Так как  $s_k \leq s_k(x)$ , из (4.2) следует, что для игроков  $(i, j) : S \ni i, S \not\ni j$   $s_{ij}(y) > s_k$ , и, следовательно, игроки  $(i, j)$  разделяются ранее на шаге  $h < k : s_{ij}(y) = s_h$ , где по индукционному предположению  $s_h = s_h(x)$ . Из последнего равенства следует  $s_k(x) = s_h(x), h < k$ , что невозможно, так как из  $h < k$  следует  $s_h(x) > s_k(x)$ .

Следовательно,  $\mathcal{C}_k(v, x) = \mathcal{C}_k(v)$ , а так как  $k$  было выбрано произвольно, эти наборы совпадают для всех  $k = 1, \dots, m$ . По разделяющей сбалансированности наборов  $\bigcup_{h=1}^k \mathcal{S}_h(v, x)$  (условие теоремы)

и  $\bigcup_{h=1}^k \mathcal{S}_h(v, y)$  для  $y \in PK_{lex}(N, v)$  (лемма 3.3), наборы  $\mathcal{C}_k(v, x) = \mathcal{C}_k(v) = \mathcal{C}_k(v, y), y \in PK_{lex}(N, v)$  полностью определяют векторы  $\theta^{ms}(x) = \theta^{ms}(y)$ , откуда следует  $x \in PK_{lex}(N, v)$ .  $\square$

Заметим, что, в отличие от пред n-ядра, лексикографическое пред к-ядро является многозначным решением, так как размерность вектора максимальных превосходств  $n(n-1)$  меньше числа всех коалиций  $2^n - 2$  (исключая большую и пустую коалиции).

## 5. Нахождение лексикографического пред к-ядра и примеры

В этом параграфе нахождение лексикографического пред к-ядра произвольной ТП игры будет сведено к последовательному решению нескольких задач двух типов, один из которых состоит из оптимизационных задач, а другой – из комбинаторных.

Из определения множеств  $\varphi_k(N, v)$  для каждой игры  $(N, v)$  (3.5) следует, что для нахождения множества  $PK_{lex}(N, v)$  достаточно найти последовательно множества  $\varphi_1(N, v) \supset \varphi_2(N, v) \supset \dots \supset \varphi_m(N, v) = PK_{lex}(N, v)$ . Однако из (3.5) непонятно, как перейти от  $\varphi_{k-1}(N, v)$  к  $\varphi_k(N, v)$ .

Поэтому определим следующую убывающую по включению последовательность эффективных решений  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  (где  $m$  зависит от игры) для ТП игр:

$$\phi_k(N, v) = \{x \in \varphi_k(N, v) \mid \text{набор } \mathcal{B}_{s_k}(N, v) \text{ разделяюще сбалансирован}\}. \quad (5.1)$$

Пусть  $(N, v)$  – произвольная ТП игра. Для произвольных векторов выигрышей (необязательно из лексикографического пред к-ядра) будет использовать обозначения  $\mathcal{B}_{s_k}(v, x)$ ,  $k = 1, \dots, m$  (3.3) и

$$\mathcal{S}_k(v, x) = \{S \subset N \mid v(S) - x(S) = s_{ij}(x) = s_k(x)\} \quad (5.2)$$

$s_k(x)$  –  $k$ -я по величине компонента вектора максимальных превосходств  $\theta^{ms}(x)$ .

Из леммы 3.3 и определения множеств  $\varphi_k$  (3.5) следует, что решения  $\phi_k$ ,  $k = 1, \dots, m$  не пусты, содержат лексикографическое пред к-ядро, и для любой игры  $(N, v)$   $\phi_1(N, v) \supset \phi_2(N, v) \supset \dots \supset \phi_m(N, v) = PK_{lex}(N, v)$ .

$$\phi_1(N, v) = \{x \in LC(N, v) \mid \mathcal{S}_1(v, x) \text{ разделяюще сбалансирован}\}. \quad (5.3)$$

Отметим, что в общем случае  $\phi_l(N, v) \subsetneq \varphi_l(N, v)$ . Например, для игры трех лиц  $(N, v)$  в 0-1 редуцированной форме с  $v(\{1, 2\}) = 0.8$ ,  $v(\{1, 3\}) = v(\{1, 3\}) = 0.1$

$$LC(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid x_1, x_2 \geq 0.1, x_3 = 0.1\},$$

но векторы  $x = (0.8, 0.1, 0.1)$ ,  $y = (0.1, 0.8, 0.1) \in LC(N, v)$  не принадлежат решению  $\phi_1(N, v)$ , так как наборы  $\mathcal{S}_1(v, x) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ ,  $\mathcal{S}_1(v, y) = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$  не являются разделяющими.

Приведем теперь другое, эквивалентное, определение множеств  $\varphi_k(N, v)$  для каждой игры  $(N, v)$ :

**Лемма 5.1.** Для  $k = 1, \dots, m$

$$\varphi_k(N, v) = \arg \min_{x \in \phi_{k-1}(N, v)} \max_{S \notin \mathcal{T}_{k-1}(v, x) \setminus \{N\}} (v(S) - x(S)), \quad (5.4)$$

если положить  $\mathcal{T}_0(v, x) = \emptyset$ .

*Доказательство.* Легко видеть, что для  $k = 1$  оба определения (3.5) и (5.4) эквивалентны.

Предположим, что лемма доказана для всех  $l < k$ , и рассмотрим множество  $\varphi_k(N, v)$  в определении (5.4). Величина  $k$ -го значения максимального превосходства для векторов из лексикографического пред к-ядра достигается максимизацией эксцессов на множестве коалиций, не принадлежащих набору  $\mathcal{T}_{k-1}(v)$ , так как на коалициях из этого набора могут достигаются только первые  $k - 1$  значения максимальных превосходств (см. лемму 3.1). Минимальное значение  $k$ -го значения максимальных превосходств достигается на векторах, которые уже обеспечили минимальные значения первых  $k - 1$  значений максимальных превосходств, это по определению векторы из множества  $\varphi_{k-1}(N, v)$ . Однако область минимизации следует уменьшить до множества  $\phi_{k-1}(N, v)$ , так как минимизация по более широкому множеству  $\varphi_{k-1}(N, v)$  может привести к увеличению компонент вектора максимальных превосходств равных  $s_{k-1}$ , т.е. множества  $I_{k-1}$ , и дальнейшая минимизация следующей,  $k$ -й компоненты уже не приведет векторам из  $\varphi_k(N, v)$  в определении (3.5). Следовательно, (3.5)  $\rightarrow$  (5.4).

Покажем обратное включение. Пусть вектор  $x \in \varphi_k(N, v)$  в определении (3.5). Тогда по индукционному предположению  $x \in \varphi_{k-1}(N, v)$  в определении (5.4), и  $I_{k-1}(x) = I_{k-1}$ . Поэтому следующая минимизация даст  $s_k(x) = s_k$ , и  $I_k(x) \supset I_k$ , откуда следует равенство

$$\left( \theta^{ms}(x) \right)_{\bigcup_{i=1}^k I_i(x)} = \left( \theta^{ms}(z) \right)_{\bigcup_{i=1}^k I_i(z)} \quad \forall z \in PK_{lex}(N, v).$$

□

Таким образом, зная множество  $\phi_{k-1}(N, v)$ , можно найти множество  $\varphi_k(N, v)$ , на котором достигается решение оптимизационной задачи (5.4). Нахождение множества  $\phi_k(N, v)$  по заданному множеству  $\varphi_k(N, v)$  является комбинаторной задачей. На шаге  $m$  мы получаем лексикографическое пред к-ядро.

Приведем примеры лексикографических пред  $k$ -ядер для некоторых ТП игр и сравним их с соответствующими пред  $n$ -ядрами.

*Пример 5.1.*  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $v(N) = 10$ ,  $v(\{1, 3, 5, 7\}) = v(\{2, 4, 6, 8\}) = 4$ ,  
 $v(\{1, 2\}) = v(\{3, 4\}) = v(\{5, 6\}) = v(\{7, 8\}) = 1$ ,  $v(\{i\}) = -1/2$ ,  
 $i = 1, \dots, 8$ ,  $v(S) = 0$ , для остальных коалиций  $S \subset N$ .

$$LC(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid x(\{1, 3, 5, 7\}) = x(\{2, 4, 6, 8\}) = 5, \\ x(S) \geq v(S) + 1 \text{ для остальных } S \subset N\}.$$

Следовательно,  $s_1 = e_1 = -1$ , и  $\mathcal{C}_1(v) = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}\}$ .

Вторая минимизация компонент и упорядоченного вектора эксцессов, и упорядоченного вектора максимальных превосходств дает одинаковые результаты:  $s_2 = e_2 = -\frac{3}{2}$ ,

Следовательно,

$$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\} = \mathcal{C}_2(v) \setminus \mathcal{C}_1(v), \quad (5.5)$$

$$\varphi_2(N, v) = \phi_2(N, v) = \\ = \left\{ x \in LC(N, v) \mid \begin{array}{l} tv(S) - x(S) = -\frac{3}{2} \text{ для } S = \{12\}, \{34\}, \{56\}, \{78\}, \\ x(S) \geq v(S) + \frac{3}{2} \text{ для остальных } S \end{array} \right\}.$$

Набор  $\mathcal{C}_2(v)$  сбалансирован и вполне разделяющий, поэтому  $m = 2$ , и

$$PK_{lex}(N, v) = \varphi_2(N, v) = \phi_2(N, v).$$

Заметим, что для этой игры  $PN(N, v) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \in PK_{lex}(N, v)$ .

*Пример 5.2.* Рассмотрим теперь другую игру  $(N, v')$ , отличающуюся от  $(N, v)$  только на коалиции  $\{1, 2, 3\}$ :  $v'(\{1, 2, 3\}) = \frac{9}{4}$ . Тогда

$$PK_{lex}(N, v') = \left\{ x \in PK_{lex}(N, v) \mid x(\{1, 2, 3\}) \geq \frac{15}{4} \right\}.$$

Для вектора  $x = PN(N, v) \in PK_{lex}(N, v')$ , мы получим  $S_2(v', x) = \{12\}, \{34\}\{56\}, \{78\}, \{123\}$ , и набор  $\mathcal{B}_{s_2}(v', x) = S_1(v', x) \cup \cup S_2(v', x)$  несбалансирован, но разделяюще сбалансирован, так как он содержит сбалансированный и вполне разделяющий набор  $\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}$ .

Отметим, что пред п-ядро может не принадлежать лексикографическому пред к-ядру [11].

Приведем теперь пример игры, в которой пред п-ядро не принадлежит лексикографическому пред к-ядру. Этот пример является модификацией примера 5.1, в которой мы разбиваем игрока 8 на двух игроков 8 и 8'. Напомним, что далее используемые наборы коалиций  $S_1(v, x), S_2(v, x), \dots$  были определены в (2.3).

*Пример 5.3.*  $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8'\}, v(N') = 10, v(\{1, 3, 5, 7\}) = v(\{2, 4, 6, 8, 8'\}) = 4,$   
 $v(\{1, 2\}) = v(\{3, 4\}) = v(\{5, 6\}) = v(\{7, 8, 8'\}) = 1, v(\{i\}) = -1,$   
 $i = 1, \dots, 7, v(\{8\}) = v(\{8'\}) = -4, v(\{8, 8'\}) = -1, v(\{2, 8\}) = v(\{2, 8'\}) = -1, v(S) < -20$  для остальных коалиций  $S \subset N$ .  
 Обозначим  $x = PN(N' v)$ . В этой игре набор

$$S_1(v, x) = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8, 8'\}\} \tag{5.6}$$

сбалансирован. Заметим, что здесь  $S_1(v, x) = S_1(v) = T_1(v)$ , однако для  $k > 1$  (вспомним определения (3.2), (5.2) )  $S_k(v, x) \neq S_k(v, x)$ . В следующей формуле во второй строчке мы имеем строгие неравенства:

$$\begin{aligned} \phi_1(N, v) = \\ = \{y \in LC(N', v) \mid y_1 + y_3 + y_5 + y_7 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{8'} = 5, \\ y(S) > v(S) + 1 \text{ для остальных } S \subsetneq N'\}, \end{aligned}$$

$$e_1(x) = s_1 = -1.$$

Вторая минимизация упорядоченного вектора эксцессов и упорядоченного вектора максимальных превосходств приводят к одному результату:

$$S_2(v, x) = S_2(v) = \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 8'\},$$

откуда следует

$$\mathcal{C}_2(v) = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8, 8'\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 8\}\}. \quad (5.7)$$

и  $e_2(x) = s_2 = -\frac{3}{2}$ . Набор  $\mathcal{C}_2(v)$  = сбалансирован и разделяет все пары игроков за исключением  $8, 8'$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \phi_2(N', v) = & \quad (5.8) \\ = \{y \in \phi_1(N', v) \mid & y_1 + y_2 = y_3 + y_4 = y_5 + y_6 = y_7 + y_8 + y_{8'} = \frac{5}{2}, \\ & y(S) \geq v(S) + \frac{3}{2} \text{ для остальных } S \notin \mathcal{C}_2(v)\}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_2(v) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8, 8'\}\},$$

а набор  $\mathcal{T}_2(v)$  состоит из всех коалиций, не разделяющих игроков  $8$  и  $8'$ .

Третье по величине значение вектора эксцессов  $e_3(x) = -\frac{9}{4}$  достигается на наборе коалиций  $\mathcal{S}_3(v, x) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{88'\}\}$ , откуда следует

$$x = PN(N', v) \implies x_i = \frac{5}{4} \text{ для } i = 1, 2, \dots, 7, \quad x_8 + x_{8'} = \frac{5}{4}.$$

Четвертое значение вектора эксцессов  $e_4(x) = -23/8$  достигается на наборе  $\mathcal{S}_4(v, x) = \{\{28\}, \{28'\}\}$ , откуда мы получаем пред  $n$ -ядро

$$x = PN(N', v) = \left( \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8} \right).$$

Набор  $\bigcup_{j=1}^4 \mathcal{S}_j(v, x)$  сбалансирован.

Однако набор коалиций, на котором достигается упорядоченный вектор максимальных превосходств для пред  $n$ -ядра равен

$$\mathcal{S}_1(v, x) \cup \mathcal{S}_2(v, x) \cup \mathcal{S}_4(v, x),$$

который не сбалансирован и не является разделяюще сбалансированным, так как коалиции  $\{2, 8\}$  и  $\{2, 8'\}$  не принадлежат никакому содержащемуся в этом наборе сбалансированному поднабору.

Вычислим теперь лексикографическое пред к-ядро. Для этого достаточно найти третье по величине значение вектора максимальных превосходств, т.е. минимизировать по  $y \in \phi_2(N, v)$  величину  $s_{88'}(y) = s_{8'8}(y)$ . Это значение достигается на наборе  $S_3(v) = \{2, 8\}, \{2, 8'\}$  равенствами

$$v(\{2, 8\}) - x(\{2, 8\}) = v(\{2, 8'\}) - x(\{2, 8'\}). \quad (5.9)$$

Так как  $v(\{2, 8\}) = v(\{2, 8'\})$ , мы получаем  $x_8 = x'_8$ , и эти равные величины находятся минимизацией эксцессов (5.9) в области (5.8), которая приводит к  $y_2 = 2, y_8 = y_{8'} = 1$ . Из равенства  $y_7 + y_8 + y_{8'} = \frac{5}{2}$ , находим  $y_2 = 2, y_8 = y_{8'} = 1$ , что приводит к одноточечному лексикографическому пред к-ядру

$$PK_{lex}(N', v) = \left( \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 \right) \neq PN(N', v).$$

Таким образом,  $S_3(v) = \{\{2, 8\}, \{2, 8'\}\}$ ,  $s_3 = -5$ . Заметим, что для  $y = PK_{lex}(N, v)$  набор

$$S_1(v, y) \cup S_2(v, y) = S_1(v) \cup S_2(v) = \\ = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8, 8'\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 8'\}, \{1\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\}$$

не сбалансирован, однако он содержит сбалансированный поднабор  $C_2(v) = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8, 8'\}, \{1, 2\}\{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 8'\}\}$ .

Набор

$$C_3(v) = S_1(v) \cup S_2(v) \cup \{2, 8\} \cup \{2, 8'\}$$

сбалансирован и содержится в разделяюще сбалансированном наборе  $S_1(v, y) \cup S_2(v, y) \cup S_3(v, y) = S_1(v) \cup S_2(v) \cup S_3(v)$ ,  $y = PK_{lex}(N', v)$ .

## 6. Заключение

Отметим, что в статье не приводится аксиоматической характеристики лексикографического пред к-ядра. Ее нахождение остается открытой проблемой. Большинство решений кооперативных игр имеют аксиоматические характеристики, включающие в систему соответствующих аксиом аксиому согласованности в том или ином определении. Так как лексикографическое пред к-ядро является обобщением двух согласованных в смысле Дэвиса–Машлера решений: пред



к-ядра и пред п-ядра, естественно было бы использовать это определение согласованности и для характеристики лексикографического пред к-ядра. Однако оно не является согласованным. Этот факт можно доказать с помощью свойства отсутствия дискриминации, впервые определенным и примененным для характеристики положительного с-ядра в [6]. Напомним его определение.

*Симметрией* игры  $(N, v)$  называется такая перестановка  $\pi$  множества игроков  $N$ , что для любой коалиции  $S \subset N$   $v(\pi S) = v(S)$ . Обозначим через  $SYM(N, v)$  группу симметрий игры  $(N, v)$ .

**Определение 6.1.** Решение  $\sigma$  для класса игр  $\mathcal{C}$  не позволяет дискриминации, если для любой игры  $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r$  выполняется соотношение

$$\sigma(N, v, \Omega) \neq \emptyset \implies \exists x \in \sigma(N, v, \Omega) \text{ для которого } \pi x = x \\ \text{для любой перестановки } \pi \in SYM(N, v, \Omega).$$

Свойство отсутствия дискриминации решения  $\sigma$  означает, что для любой игры  $(N, v, \Omega)$  из непустоты множества  $\sigma(N, v)$  следует существование вектора  $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ , инвариантного относительно любой симметрии игры.

Очевидно, что лексикографическое пред к-ядро не позволяет дискриминации. Из Теоремы 5 [3] следует, что если непустое решение для класса всех ТП игр обладает свойствами ковариантности, согласованности и отсутствия дискриминации, то оно содержит пред п-ядро. Однако лексикографическое пред к-ядро для некоторых игр может не содержать пред п-ядра (см. пример 5.3).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game*// Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. P. 223–259.
2. Faigle U., Kern W., Kuipers J. *Computing an element in the lexicographic kernel of a game*// Math. Methods of Operations Research. 2006. V. 63. P. 427–433

3. Katsev I., Yanovskaya E. *The restricted prenucleolus*// Mathematical Social Sciences. 2013
4. Kohlberg E. *On the nucleolus of a characteristic function game*// SIAM Journal of Applied Mathematics. 1971. V. 20. P. 62–66.
5. Orshan G., Sudhölter P. *Reconfirming the prenucleolus*// Working paper 325. Bielefeld University, Center for Mathematical Economics. 2001.
6. Orshan G., Sudhölter P. *The positive core of a cooperative game* // International Journal of Game Theory. 2010. V. 39. P. 113–136.
7. Peleg B. *On the reduced game property and its converse*// International Journal of Game Theory. 1986. V. 15 P. 187–200.  
*A correction*// International Journal of Game Theory. 1987. V. 16. P. 209.
8. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*// Theory and Decision Library. Series C. 2003. V. 34. Kluwer Ecademic Publishers.
9. Yarom M. *The lexicographic kernel of a cooperative game*// Mathematics of Operations Research. 1981. V. 6. P. 66–100.

## THE LEXICOGRAPHIC PREKERNEL

**Elena B. Yanovskaya**, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc., prof. (eyanov@emi.nw.ru)

*Abstract:* The lexicographic prekernel of a cooperative game with transferable utilities (TU) is a subset of the payoff vectors lexicographically minimizing the vector of maximal surpluses of one player over another one. This solution is non-empty for every TU game, it is efficient, is contained both in the prekernel and in the least core, and may not contain the prenucleolus [9]. A combinatorial characterization of the lexicographic prekernel being a weak analog of the known characterization of the prenucleolus by Kohlberg [4] with the help of balanced collections of coalitions is given. The difference consists in sets of vectors to be lexicographic minimized: the prenucleolus deals with excess vectors, and the lexicographic prekernel deals with vectors of maximal surpluses. It is shown that finding the lexicographic prekernel comes to solving a finite set (not more than the number of players) of optimization and of combinatorial problems.

*Keywords:* cooperative game, solution, prekernel, prenucleolus, lexicographic prekernel.