УДК 519.833
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В СДЕЛКАХ С ПОРОГОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ

Владимир В. Мазалов*
Алексей Ю. Кондратьев
ИПМИ КарНЦ РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru, kondratev@krc.karelia.ru

Рассматривается теоретико-игровая модель сделок между продавцами и покупателями. Каждый игрок обладает приватной информацией о резервной цене, которую не знает другой игрок. Резервные цены являются случайными величинами с произвольными распределениями вероятностей. Сделка происходит, если предложенная цена покупателя превосходит объявленную цену продавца. Найдено байесовское равновесие с n-пороговыми стратегиями игроков как решение системы алгебраических уравнений. Получены точные решения для случая равномерного распределения резервных цен.

Ключевые слова: пороговые стратегии, сделки между продавцами и покупателями, неполная информация, байесовское равновесие.

1. Введение

Рассмотрим игру двух лиц с неполной информацией [1-8]. Игроки здесь I (продавец) и II (покупатель). Каждый из игроков обладает

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00033-а, 13-01-91158-ГФЕН_а) и Отделения математических наук РАН (программа «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и новых информационных систем»), поддержана Программой стратегического развития ПетрГУ

приватной информацией, которую не знает другой игрок. Для продавца это затраты на производство товара s, а для покупателя это его оценка данного товара b. Эти цены обычно называют резервными ценами. Предположим, что резервные цены и продавцов и покупателей s и b есть независимые случайные величины, функции распределения которых известны $F(s), G(b)$, $s, b \in [0,1]$.

Игроки появляются на рынке и объявляют цену на товар (не обязательно совпадающую с резервными ценами). Мы будем считать их функциями от резервных цен, соответственно $S = S(s)$ и $B = B(b)$. Сделка происходит, если $B \geq S$. Естественно считать, что $S(s) \geq s$ и $B(b) \leq b$, т.е. продавец завышает, а покупатель занижает истинную цену на продукт, чтобы получить дополнительный доход от данной сделки. Если сделка состоялась, то будем считать, что она происходит по цене $(S(s) + B(b))/2$.

Естественно считать выигрышами в данной игре разницу между резервными ценами и ценой сделки, т.е. для продавца это $(S(s)+$ $+B(b))/2 - s$ и для покупателя $b - (S(s) + B(b))/2$. Поскольку b и s случайные величины в качестве выигрышей рассмотрим средние значения

$$H_s(B,S) = E_{b,s}\left(\frac{S(s)+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S(s)\}} \tag{1.1}$$

и

$$H_b(B,S) = E_{b,s}\left(b - \frac{S(s)+B(b)}{2}\right) I_{\{B(b)\geq S(s)\}}. \tag{1.2}$$

Стратегиями в данной байесовской игре являются функции $B(b)$ и $S(s)$. Логично предположить, что это неубывающие функции, поскольку чем больше затраты у продавца или оценка стоимости предмета у покупателя, то и предложения игроков должны быть больше. Нас интересует байесовское равновесие в игре с функциями выигрыша (1.1)-(1.2).

2. Сделки с фиксированными ценами

Рассмотрим сделку, в которой резервные цены продавцов и покупателей s и b есть независимые случайные величины с функциями распределения соответственно $F(s), s \in [0,1]$ и $G(b), b \in [0,1]$.

Предположим, что продавец использует стратегию порогового типа (см. рис. 1)

$$S(s) = \begin{cases} a, & \text{если } s \le a, \\ s, & \text{если } a \le s \le 1. \end{cases}$$

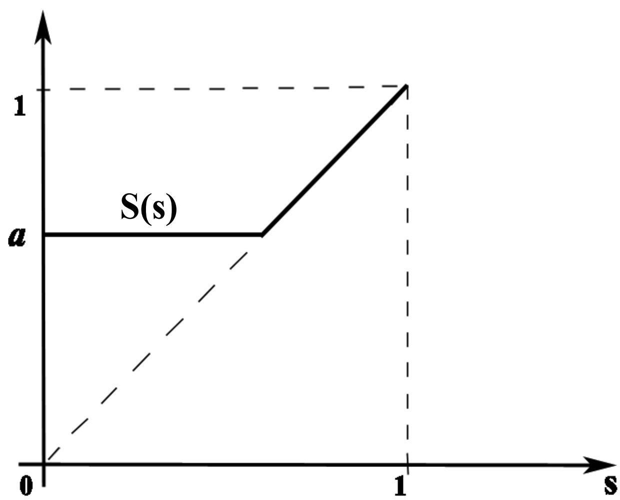

Рисунок 1. Стратегия продавца

Для малых значений резервных цен, продавец устанавливает фиксированную цену a, и только если s превышает значение a, он называет истинную цену s.

Найдем наилучший ответ покупателя для различных значений параметра b. Заметим, что сделка происходит только если резервная цена покупателя b не меньше a. Если же $b \ge a$, то сделка может произойти при условии, что $B \ge S(s)$.

Вычислим выигрыш покупателя

$$H_b(B,S) = E_s\left(b - \frac{S(s)+B}{2}\right) I_{\{B \ge S(s)\}} =$$
$$= \int_0^a \left(b - \frac{a+B}{2}\right) f(s)ds + \int_a^B \left(b - \frac{s+B}{2}\right) f(s)ds.$$

Производная этой функции имеет вид

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = (b-B)f(B) - \frac{F(B)}{2}. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что если на интервале $B \in [a, 1]$ выражение $(1-B)f(B) - \frac{F(B)}{2}$ неположительно, то и производная (2.1) будет неположительна, и тогда максимум выигрыша будет достигаться при $B(b) = a, b \in [a, 1]$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть стратегия продавца имеет вид* $S(s) = \max\{a, s\}$. *Тогда, если для всех* $x \in [a, 1]$ *выполняется условие*

$$(1-x)f(x) - \frac{F(x)}{2} \leq 0, \tag{2.2}$$

то наилучшим ответом покупателя является стратегия $B(b) = \min\{a, b\}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для покупателя. Предположим, что покупатель использует стратегию $B(b) = \min\{a, b\}$ (см. рис. 2), т.е. для больших значений b он устанавливает фиксированную цену a, а для малых значений $b \leq a$ он называет истинную цену.

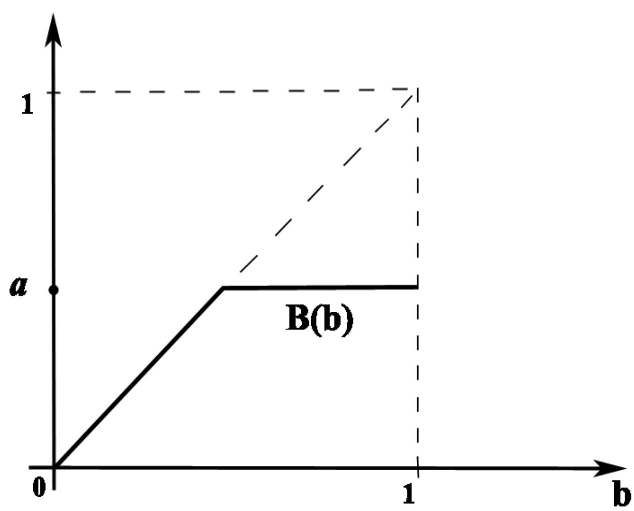

Рисунок 2. Стратегия покупателя

Выигрыш продавца равен

$$H_s(B,S) = E_b\left(\frac{S+B(b)}{2} - s\right) I_{\{B(b)\geq S)\}} =$$
$$= \int_S^a \left(\frac{b+S}{2} - s\right) g(b)db + \int_a^1 \left(\frac{a+S}{2} - s\right) g(b)db. \quad (2.3)$$

Находим производную

$$\frac{\partial H_s}{\partial S} = (s-S)g(S) + \frac{1-G(S)}{2}.$$

Отсюда, если для всех $x \in [0,a]$ имеет место неравенство

$$-xg(x) + \frac{1-G(x)}{2} \geq 0, \quad (2.4)$$

то и производная будет неотрицательна.

Лемма 2.2. *Пусть стратегия покупателя имеет вид* $B(b) = \min\{a,b\}$. *Тогда, если для всех* $x \in [0,a]$ *выполняется условие*

$$xg(x) - \frac{1-G(x)}{2} \leq 0,$$

то наилучшим ответом продавца является стратегия $S(s) = \max\{a,s\}$.

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Предположим, что для некоторого* $a \in [0,1]$ *выполняются следующие условия*

$$(1-x)f(x) - \frac{F(x)}{2} \leq 0, \quad x \in [a,1],$$

$$xg(x) - \frac{1-G(x)}{2} \leq 0, \quad x \in [0,a].$$

Тогда оптимальные стратегии в задаче о сделках являются стратегии

$$S(s) = \max\{a,s\}, \quad B(b) = \min\{a,b\}.$$

При этом, область сделки имеет вид, изображенный на рис. 3.

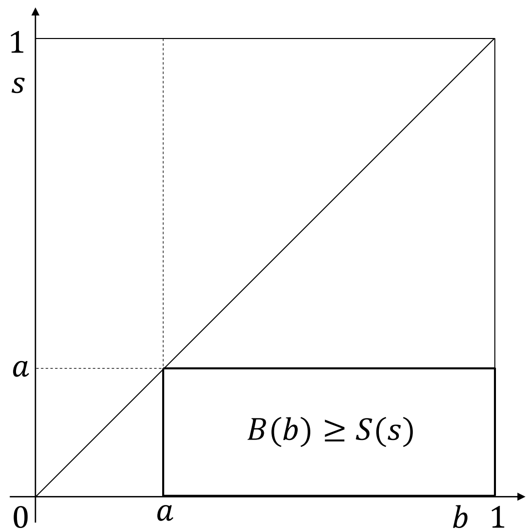

Рисунок 3. Область сделки

Таким образом, при выполнении условий теоремы сделка всегда происходит по фиксированной цене a. Нетрудно видеть, что условия теоремы выполняются для распределений

$$F(s) = 1 - (1-s)^n, \quad G(b) = b^n, n \geq 3.$$

при значении $a = 1/2$. В этом случае равновесие имеет вид

$$S(s) = \max\{\frac{1}{2}, s\}, \quad B(b) = \min\{\frac{1}{2}, b\}.$$

При этом, ожидаемые выигрыши составляют величину

$$H_b = H_s = \int_{\frac{1}{2}}^{1} nb^{n-1}db \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - s)n(1-s)^{n-1}ds = \frac{(2^n-1)\,(2^n(n-1)+1)}{2(n+1)4^n},$$

которые при увеличении n сходятся к $1/2$ (при $n = 3$ $H_b = H_s = 0.232$).

Заметим, что условия теоремы не выполнены для случая, когда резервные цены имеют равномерное ($n = 1$) и линейное распределение ($n = 2$). Чтобы найти равновесие, введем в рассмотрение двухпороговые стратегии.

3. Равновесие среди двухпороговых стратегий

Предположим, что продавец использует стратегию с двумя порогами σ_1, σ_2

$$S(s) = \begin{cases} a_1, & \text{если } 0 \le s < \sigma_1, \\ a_2, & \text{если } \sigma_1 < s \le \sigma_2, \\ s, & \text{если } \sigma_2 \le s \le 1, \end{cases}$$

где $a_1 \le a_2$ и $\sigma_2 = a_2$. Для малых значений резервных цен продавец устанавливает фиксированную цену a_1, для средних значений фиксированную цену a_2, и если s превышает значение a_2, он называет истинную цену s.

Найдем наилучший ответ покупателя для различных значений параметра b. Заметим, что сделка происходит только если резервная цена покупателя b не меньше a_1. Если же $b \ge a_1$, то сделка может произойти при условии, что $B \ge S(s)$.

Вычислим выигрыш покупателя, резервная цена которого равна b. Для $B : a_1 \le B < a_2$ выигрыш равен

$$H_b(B,S)=E_s\left(b-\frac{S(s)+B}{2}\right)I_{\{B\ge S(s)\}} = \int_0^{\sigma_1}\left(b-\frac{a_1+B}{2}\right)f(s)ds, \quad (3.1)$$

для $B : a_2 \le B \le b$ он равен

$$H_b(B,S) = \int_0^{\sigma_1}\left(b-\frac{a_1+B}{2}\right)f(s)ds + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(b-\frac{a_2+B}{2}\right)f(s)ds+ \\ +\int_{\sigma_2}^{B}\left(b-\frac{s+B}{2}\right)f(s)ds. \quad (3.2)$$

Как было отмечено, для $b < a_1$ сделка не происходит, поэтому $B(b)$ может принимать любые значения. Предположим, что $b : a_1 \le b < a_2$. Тогда $H_b(B,S)$ имеет вид (3.1) (так как $B \le b$) и является убывающей по B функцией. Максимальное значение (3.1) принимает при $B = a_1$. Значение этого выигрыша равно

$$H_b(a_1,S) = (b-a_1)F(\sigma_1). \quad (3.3)$$

Если же $b \ge a_2$, то выигрыш $H_b(B,S)$ может также иметь вид (3.2). Его производная имеет вид

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = -\frac{1}{2}F(B) + (b-B)f(B). \quad (3.4)$$

Предположим, что на интервале $[a_2, 1]$ имеет место неравенство (2.2). Тогда выражение (3.4) для всех $B \in [a_2, 1]$ будет не положительным. Следовательно, функция $H_b(B, S)$ не возрастает по B. Ее максимальное значение в точке $B = a_2$ равно

$$H_b(a_2, S) = \left(b - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) F(\sigma_1) + (b - a_2)(F(\sigma_2) - F(\sigma_1)). \qquad (3.5)$$

Заметим, что при $b = a_2$ значение выражения (3.5) $\frac{a_2 - a_1}{2} F(\sigma_1)$ в два раза меньше выигрыша (3.3). Следовательно, наилучший ответ покупателя на стратегию $S(s)$ является стратегия вида

$$B(b) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \le b \le a_1, \\ a_1, & \text{если } a_1 \le b < \beta_2, \\ a_2, & \text{если } \beta_2 \le b \le 1, \end{cases}$$

где β_2 определяется из равенства выражений (3.3) и (3.5)

$$(b - a_1)F(\sigma_1) = \left(b - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) F(\sigma_1) + (b - a_2)(F(\sigma_2) - F(\sigma_1)).$$

Отсюда находим

$$\beta_2 = a_2 + \frac{(a_2 - a_1)F(\sigma_1)}{2(F(\sigma_2) - F(\sigma_1))}. \qquad (3.6)$$

Теперь предположим, что покупатель использует стратегию

$$B(b) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \le b \le \beta_1, \\ a_1, & \text{если } \beta_1 \le b < \beta_2, \\ a_2, & \text{если } \beta_2 \le b \le 1, \end{cases}$$

где $\beta_1 = a_1 \le a_2 \le \beta_2$. Найдем наилучший ответ продавца с резервной ценой s. Рассуждая аналогично, как и в случае с покупателем, находим, что при выполнении условия (2.4) на интервале $[0, a_1]$ наилучшая стратегия продавца имеет вид

$$S(s) = \begin{cases} a_1, & \text{если } 0 \le s < \sigma_1, \\ a_2, & \text{если } \sigma_1 < s \le \sigma_2, \\ s, & \text{если } \sigma_2 \le s \le 1, \end{cases}$$

где

$$\sigma_1 = a_1 - \frac{(a_2 - a_1)(1 - G(\beta_2))}{2(G(\beta_2) - G(\beta_1))}, \qquad (3.7)$$

и, кроме того, $\sigma_1 \le a_1 \le a_2 = \sigma_2$.

Теорема 3.1. *Предположим, что для некоторых постоянных* $a_1, a_2 \in$ $\in [0,1]$*, таких что* $a_1 \le a_2$ *выполняются следующие условия*

$$(1-x)f(x) - \frac{F(x)}{2} \le 0, \quad x \in [a_2, 1],$$

$$xg(x) - \frac{1-G(x)}{2} \le 0, \quad x \in [0, a_1].$$

Тогда оптимальные стратегии в задаче о сделках являются стратегии

$$S(s) = \begin{cases} a_1, & \textit{если } 0 \le s < \sigma_1, \\ a_2, & \textit{если } \sigma_1 < s \le \sigma_2, \\ s, & \textit{если } \sigma_2 \le s \le 1, \end{cases}$$

$$B(b) = \begin{cases} b, & \textit{если } 0 \le b \le \beta_1, \\ a_1, & \textit{если } \beta_1 \le b < \beta_2, \\ a_2, & \textit{если } \beta_2 \le b \le 1, \end{cases}$$

где σ_1 *и* β_2 *определяются соотношениями (3.6) и (3.7). При этом,*

$$\sigma_1 \le \beta_1 = a_1 \le a_2 = \sigma_2 \le \beta_2.$$

4. Равновесие среди n-пороговых стратегий

Распространим описанную выше схему на случай n-пороговых стратегий. Предположим, что продавец использует стратегию с n порогами $\sigma_i, i = 1, \ldots, n$

$$S(s) = \begin{cases} a_i, & \text{если } \sigma_{i-1} \le s < \sigma_i, \qquad i = 1, \ldots, n \\ s, & \text{если } \sigma_n \le s \le 1, \end{cases}$$

где $\{a_i\}, i = 1, \ldots, n$ и $\{\sigma_i\}, i = 1, \ldots, n$ образуют неубывающую последовательность и $\sigma_i \le a_i, i = 1, \ldots, n$. Для удобства считаем $\sigma_0 = 0$.

Таким образом, все продавцы разбиты на $n+1$ группу в зависимости от значений резервных цен, и если резервная цена s принадлежит i-ой группе, т.е. $s \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i)$, то продавец называет цену a_i, $i = 1, \ldots, n$. Если же резервная цена достаточно высока $(s \ge a_n)$, продавец называет истинную цену s.

Найдем наилучший ответ покупателя для различных значений параметра b. Заметим, что сделка происходит только если резервная цена покупателя b не меньше a_1. Если же $b \geq a_1$, то сделка может произойти при условии, что $B \geq S(s)$.

Вычислим выигрыш покупателя, резервная цена которого равна b. Для $B : a_1 \leq B < a_2$ выигрыш равен

$$H_b(B,S) = E_s \left(b - \frac{S(s)+B}{2} \right) I_{\{B \geq S(s)\}} = \\ = \int_0^{\sigma_1} \left(b - \frac{a_1+B}{2} \right) f(s)ds = \left(b - \frac{a_1+B}{2} \right) F(\sigma_1), \quad (4.1)$$

для $B : a_{i-1} \leq B < a_i$ выигрыш равен

$$H_b(B,S) = \sum_{j=1}^{i-1} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) f(s)ds = \\ = \sum_{j=1}^{i-1} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) \left(F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1}) \right), \quad i = 1,\ldots,n, \quad (4.2)$$

для $B : a_n \leq B \leq b$ он равен

$$H_b(B,S) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) f(s)ds + \int_{\sigma_n}^{B} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) f(s)ds = \\ = \sum_{j=1}^{n} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) (F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1})) + \int_{\sigma_n}^{B} \left(b - \frac{a_j+B}{2} \right) f(s)ds. \quad (4.3)$$

Для $b < a_1$ сделки не происходит, поэтому $B(b)$ может принимать любые значения. Положим $\beta_1 = a_1$.

Предположим, что $b : a_1 \leq b < a_2$. Так как $B \leq b < a_2$, то $H_b(B,S)$ имеет вид (4.1) и является убывающей по B функцией. Максимум выигрыша достигается при $B = a_1$ и он равен

$$H_b(a_1, S) = (b - a_1)F(\sigma_1).$$

Эта функция возрастает по b и при $b = a_2$ становится равной

$$(a_2 - a_1)F(\sigma_1). \quad (4.4)$$

Предположим теперь, что $b : a_2 \leq b < a_3$. Тогда если $B < a_2$, то H_b имеет вид (4.1). Но $B(b)$ может быть больше или равно a_2. Если это так, то из (4.2) находим

$$H_b(B,S) = \left(b - \frac{a_2+B}{2} \right) F(\sigma_2) + \frac{a_2 - a_1}{2} F(\sigma_1).$$

Максимум этой функции по B достигается при $B = a_2$ и его значение равно

$$H_b(a_2, S) = (b - a_2)F(\sigma_2) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)F(\sigma_1).$$

Заметим, что в точке $b = a_2$ значение выигрыша в два раза меньше выигрыша при использовании стратегии $B = a_1$ (см. (4.4)), поэтому переключение со стратегии $B = a_1$ на стратегию $B = a_2$ произойдет в точке $b = \beta_2 \geq a_2$, где β_2 определяется из уравнения

$$(b - a_1)F(\sigma_1) = (b - a_2)F(\sigma_2) + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)F(\sigma_1),$$

откуда находим

$$\beta_2 = a_2 + \frac{(a_2 - a_1)F(\sigma_1)}{2(F(\sigma_2) - F(\sigma_1))}.$$

Предположим, что a_3 выбрано таким образом, что $a_3 \geq \beta_2$.

Далее рассуждения проведем по индукции. Предположим, что для некоторого k $H_b(a_{k-1}, S) \leq H_b(a_k, S)$ для $b \in (\beta_{k-1}, a_k]$, где $a_{k-1} \leq \leq \beta_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим $b : a_k \leq b < a_{k+1}$. Так как $B \leq b < a_{k+1}$, то $H_b(B, S)$ имеет вид (4.2), где $i \leq k + 1$, и является убывающей по B функцией. Максимальное значение (4.2) принимает при $B = a_{i-1}$. Значение этого выигрыша равно

$$H_b(a_{i-1}, S) = \sum_{j=1}^{i-1} \left(b - \frac{a_j + a_{i-1}}{2}\right)(F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1})) =$$
$$= (b - a_{i-1})F(\sigma_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-2}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j).$$

Заметим, что если $i = k + 1$, т.е. $B \in [a_k, a_{k+1})$, то максимальный выигрыш равен

$$H_b(a_k, S) = (b - a_k)F(\sigma_k) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j), \qquad (4.5)$$

а при $i = k$ максимальное значение равно

$$H_b(a_{k-1}, S) = (b - a_{k-1})F(\sigma_{k-1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-2}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j). \qquad (4.6)$$

В точке $b = a_k$ выражение (4.6) не меньше выражения (4.5). Приравнивая выражения (4.5) и (4.6), найдем значение β_k, при котором происходит переключение со стратегии $B = a_k$ на стратегию $B = a_{k+1}$:

$$\beta_k = a_k + \frac{(a_k - a_{k-1})F(\sigma_{k-1})}{2(F(\sigma_k) - F(\sigma_{k-1}))}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4.7}$$

β_k лежит в интервале $[a_k, a_{k+1})$, если выполняется условие

$$a_k + \frac{(a_k - a_{k-1})F(\sigma_{k-1})}{2(F(\sigma_k) - F(\sigma_{k-1}))} \le a_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Если же $b \ge a_n$, то выигрыш $H_b(B, S)$ может также иметь вид (4.3). Найдем производную этой функции

$$\frac{\partial H_b}{\partial B} = -\frac{1}{2}F(B) + (b - B)f(B).$$

Предположим, что на интервале $[a_n, 1]$ имеет место неравенство (2.2). Тогда производная для всех $B \in [a_n, 1]$ меньше или равна нуля. Следовательно, функция $H_b(B, S)$ не возрастает по B. Ее максимальное значение в точке $B = a_n$ равно

$$H_b(a_n, S) = (b - a_n)F(\sigma_n) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j).$$

Тогда, переключение со стратегии $B = a_{n-1}$ на стратегию $B = a_n$ произойдет при $b = \beta_n$, где β_n есть решение уравнения

$$(b - a_n)F(\sigma_n) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j) =$$

$$= (b - a_{n-1})F(\sigma_{n-1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-2}(a_{j+1} - a_j)F(\sigma_j),$$

откуда находим

$$\beta_n = a_n + \frac{(a_n - a_{n-1})F(\sigma_{n-1})}{2(F(\sigma_n) - F(\sigma_{n-1}))}.$$

Таким образом, показано, что наилучшим ответом покупателя на стратегию $S(s)$ является стратегия вида

$$B(b) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \le b \le \beta_1 = a_1, \\ a_i, & \text{если } \beta_i \le b < \beta_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{4.8}$$

где β_k, $k = 1, \dots, n$ определяется выражениями (4.7), $\beta_{n+1} = 1$.

Аналогичные рассуждения проводятся для нахождения оптимального ответа продавца на пороговую стратегию покупателя. Предполагая, что покупатель использует стратегию (4.8), можно показать, что оптимальный ответ продавца

$$S(s) = \begin{cases} a_i, & \text{если } \sigma_{i-1} \le s < \sigma_i, \qquad i = 1, \dots, n, \\ s, & \text{если } \sigma_n \le s \le 1, \end{cases}$$

где σ_k, $k = 1, \dots, n$ определяются следующими соотношениями

$$\sigma_k = a_k - \frac{(a_{k+1} - a_k)(1 - G(\beta_{k+1}))}{2(G(\beta_{k+1}) - G(\beta_k))}, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{4.9}$$

и, кроме того, $\sigma_n = a_n$.

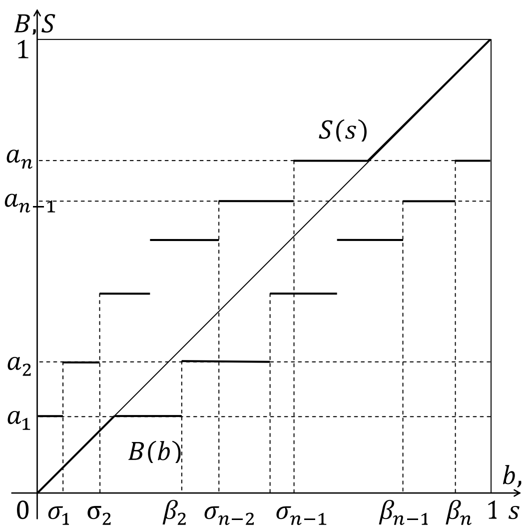

Рисунок 4. Равновесие с n порогами

Таким образом, для общего случая n порогов имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Предположим, что для некоторой неубывающей последовательности* $\{a_i\}, i = 1, \dots, n$ *на интервале* $[0, 1]$ *выполняются следующие условия*

$$xg(x) - \frac{1 - G(x)}{2} \le 0, \quad x \in [0, a_1],$$

$$(1-x)f(x) - \frac{F(x)}{2} \leq 0, \quad x \in [a_n, 1],$$

и

$$\beta_{k-1} \leq a_k \leq \sigma_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда оптимальные стратегии в задаче о сделках имеют вид (рис. 4)

$$S(s) = \begin{cases} a_i, & \text{если } \sigma_{i-1} \leq s < \sigma_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ s, & \text{если } \sigma_n \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$B(b) = \begin{cases} b, & \text{если } 0 \leq b \leq \beta_1 = a_1, \\ a_i, & \text{если } \beta_i \leq b < \beta_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\{\sigma_i\}$ *и* $\{\beta_i\}$ *определяются соотношениями (4.7) и (4.9). При этом, область сделки имеет вид, изображенный на рис. 5.*

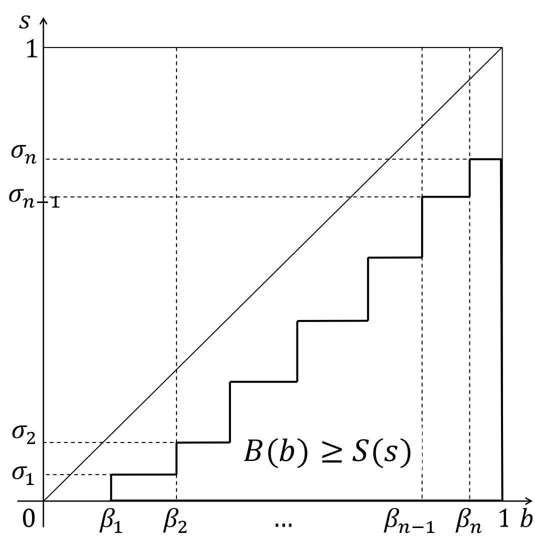

Рисунок 5. Область сделки с n порогами

5. Равномерное распределение

Предположим, резервные цены продавцов и покупателей имеют равномерное распределение на рынке, т.е. $F(s) = s, s \in [0, 1]$ и $G(b) =$

$= b, b \in [0,1]$. Условия теоремы 3.1 выполняются для $a_1 \leq 1/3$ и $a_2 \geq 2/3$. Из (3.6)–(3.7) находим

$$\sigma_1 = a_1 - \frac{(a_2 - a_1)(1-\beta_2)}{2(\beta_2 - a_1)}, \quad \beta_2 = a_2 + \frac{(a_2 - a_1)\sigma_1}{2(a_2 - \sigma_1)}.$$

Так при $a_1 = 1/3$ и $a_2 = 2/3$ отсюда находим

$$\sigma_1 = \frac{1}{12}(7 - \sqrt{17}) \approx 0.239, \quad \beta_2 = 1 - \sigma_1 = \frac{1}{12}(5 + \sqrt{17}) \approx 0.761.$$

Заметим, что равновесие достигается для произвольных значений порогов a_1, a_2, которые удовлетворяют условиям $a_1 \leq 1/3$ и $a_2 \geq 2/3$. Поэтому, важное значение имеет найти такие значения этих параметров, при которых суммарный выигрыш продавцов и покупателей будет максимальным. Эта проблема была поставлена Майерсоном в работе [8]. Такой набор параметров a_1, a_2 называется стимулирующим (incentive-compatible).

Суммарный выигрыш продавцов и покупателей в случае двухпороговых стратегий имеет вид

$$H_b(B,S) + H_s(B,S) = E_{b,s}(b-s)I_{\{B(b)\geq S(s)\}} =$$
$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} db \int_0^{\sigma_1} (b-s)ds + \int_{\beta_2}^{1} db \int_0^{\sigma_2} (b-s)ds.$$

Можно показать, что максимум суммарного выигрыша достигается при $a_1 = 1/3, a_2 = 2/3$, при этом значение этого выигрыша равно $H_b(B,S) + H_s(B,S) = (23 - \sqrt{17})/144 \approx 0.1311$.

Ранее мы отметили, что для равномерного распределения в классе однопороговых стратегий равновесия не существует. В классе же двухпороговых стратегий равновесие существует и таких равновесий континуум.

Исследуем теперь стратегии с тремя порогами. Первые два условия теоремы 4.1 выполняются для $a_1 \leq 1/3$ и $a_3 \geq 2/3$. Выберем a_1, a_2, a_3 такими, чтобы максимизировать суммарный выигрыш

$$H_b(B,S) + H_s(B,S) = E_{b,s}(b-s)I_{\{B(b)\geq S(s)\}} =$$
$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} db \int_0^{\sigma_1} (b-s)ds + \int_{\beta_2}^{\beta_3} db \int_0^{\sigma_2} (b-s)ds + \int_{\beta_3}^{1} db \int_0^{\sigma_3} (b-s)ds.$$

Численные расчеты показывают, что максимум суммарного выигрыша достигается при $a_1 = 1/3, a_2 = 1/2, a_3 = 2/3$, при этом, пороги равны

$$\sigma_1 \approx 0.1460, \sigma_2 \approx 0.4615, \sigma_3 \approx 0.6667,$$

$$\beta_1 \approx 0.3333, \beta_2 \approx 0.5385, \beta_3 \approx 0.8540,$$

и значение максимального выигрыша равно $H_b(B,S) + H_s(B,S) \approx$ ≈ 0.1364. Заметим, что значение максимального выигрыша больше, чем 0.1311 при использовании двухпороговых стратегий, но меньше, чем 0.1406 в равновесии с непрерывными стратегиями [1,4]

$$S(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}s + \frac{1}{4}, & 0 \le s \le \frac{3}{4}, \\ s, & \frac{3}{4} \le s \le 1, \end{cases} \quad B(b) = \begin{cases} b, & 0 \le b \le \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{3}b + \frac{1}{12}, & \frac{1}{4} \le b \le 1. \end{cases} \tag{5.1}$$

Найдем далее равновесия среди n-пороговых стратегий. Нетрудно убедиться, что условия теоремы 4.1 будут выполнены при

$$\sigma_i = \frac{3i}{4n+2}, \quad \beta_i = \frac{n+3i-1}{4n+2}, \quad a_i = \frac{n+2i}{4n+2}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \ge 4,$$

при этом суммарный выигрыш равен

$$H_b + H_s = \sum_{i=1}^{n} \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} db \int_0^{\sigma_i} (b-s)ds = \frac{9n(n+1)}{16(2n+1)^2}.$$

Численные расчеты показывают, что найденные решения максимизируют как суммарный выигрыш игроков, так и вероятность сделки. При $n \to \infty$ эти пороговые стратегии равномерно сходятся к непрерывным стратегиям, найденным в [1,4].

6. Неравномерное распределение. Стратегии с тремя порогами

Предположим, резервные цены продавцов и покупателей имеют распределение $F(s) = 1 - (1-s)^2, s \in [0,1]$ и $G(b) = b^2, b \in [0,1]$. Первые два условия теоремы 4.1 выполняются для $a_1 \le 1/\sqrt{5}$ и $a_3 \ge 1 - 1/\sqrt{5}$. Выберем a_1, a_2, a_3 такими, чтобы максимизировать суммарный выигрыш

$$H_b(B,S)+H_s(B,S)=E_{b,s}(b-s)I_{\{B(b)\ge S(s)\}}=4\int_{\beta_1}^{\beta_2} b\,db \int_0^{\sigma_1}(b-s)(1-s)ds+$$

$$+4\int_{\beta_2}^{\beta_3} b\,db \int_0^{\sigma_2}(b-s)(1-s)\,ds + 4\int_{\beta_3}^{1} b\,db \int_0^{\sigma_3}(b-s)(1-s)\,ds.$$

Численные расчеты показывают, что максимум суммарного выигрыша достигается при $a_1 \approx 0.4139, a_2 = 0.5, a_3 \approx 0.5861$, при этом, пороги равны

$$\sigma_1 \approx 0.2504, \sigma_2 \approx 0.4135, \sigma_3 \approx 0.5861,$$

$$\beta_1 \approx 0.4139, \beta_2 \approx 0.5865, \beta_3 \approx 0.7496,$$

и значение максимального выигрыша равно $H_b(B,S) + H_s(B,S) \approx \approx 0.3262$, которое меньше, чем выигрыш 0.3289 в равновесии с непрерывными стратегиями игроков, найденном в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Кондратьев А.Ю. *Задача о сделках с неполной информацией* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2012. Сер. 10. Вып. 1. С. 33—40.

2. Мазалов В.В., Токарева Ю.С. *Равновесие в задаче о сделках с неравномерным распределением резервных цен* // Математическая Теория Игр и ее Приложения, 2011. Т. 3. Вып. 2. С. 37–49.

3. Brams S.J. *Negotiation games. Applying Game Theory to Bargaining and Arbitration.* Routledge. 1990.

4. Chatterjee K., Samuelson W. *Bargaining under incomplete information* // Operations Research. 1983. V. 31. N 5. P. 835–851.

5. Harsanyi J.C., Selten R. *A generalised Nash solution for two-person bargaining games with incomplete information* // Manag. Sci. 1972. V. 18. P. 80–106.

6. Klemperer P. *The Economic Theory of Auction.* Northampton, MA: Edward Elgar Publishing, Inc., 2000.

7. Myerson R. *Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information*// Econometrica. 1984. V. 52. P. 461–487.

8. Myerson R., Satterthwait M.A. *Efficient mechanisms for Bilateral Trading* // Journal of Economic Theory. 1983. V. 29. P. 265–281.

THRESHOLD STRATEGIES EQUILIBRIUM IN BARGAINING MODEL

Vladimir V. Mazalov, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, Dr.Sc., prof.
(vmazalov@krc.karelia.ru),
Aleksei Y. Kondratev, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS, PhD student
(kondratev@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider a game-theoretic bargaining model with incomplete information related with deals between buyers and sellers. A player (buyer or seller) has a private information about his reserved price. Reserved prices are random variables with known probability distributions. Each player declares a price which depends on his reserved price. If the bid price is above the ask price, the good is sold for the average of two prices. Otherwise, there is no deal. We find a Bayes equilibrium in a n-threshold form as a solution of a system of algebraic equations. Some numerical results are presented.

Keywords: bargaining model, threshold strategies, Bayes equilibrium.