Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.3, с. 27–57

УДК 519.862.5
ББК 22.18

ВЛИЯНИЕ РАЗМЕРА РЫНКА НА КОНЦЕНТРАЦИЮ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ФИРМ В МОДЕЛИ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ*

Павел С. Молчанов
Филипп А. Ущев
НИУ Высшая Школа Экономики
190068, Санкт-Петербург, пр. Римского-Корсакова, д.47
e-mail: mrmps1992@gmail.com, e-mail: ph.ushchev@gmail.com

В статье построена модель монополистической конкуренции с многопродуктовыми фирмами, невыпуклыми издержками и переменной эластичностью замещения. Изучается зависимость отраслевой концентрации фирм от размера рынка. Основным результатом является полная характеризация асимптотического поведения равновесного числа фирм и уровня концентрации при неограниченном росте размера рынка. Показано, что взаимодействие экономии от масштаба и экономии от охвата является важным фактором эмпирически наблюдаемой во многих отраслях тенденции к росту концентрации фирм с увеличением размера рынка. Также проведен численный анализ влияния технологических шоков на равновесие.

Ключевые слова: отраслевая концентрация, многопродуктовые фирмы, монополистическая конкуренция.

---

* Авторы выражают благодарность С.Г. Коковину, Т.Н. Михайловой, Р. Питтмену, Ф. Робер-Нику, Ж.-Ф. Тиссу и Р. Эриксону за полезные замечания и предложения. Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, грант 11.G34.31.0059, а также EERC, грант 12-5711.

1. Введение

Вопрос о характере влияния размера рынка на концентрацию фирм в отрасли многократно ставился в эмпирической литературе. На сегодняшний день можно с уверенностью утверждать, что ответ на этот вопрос неоднозначен – различные авторы находят разные эффекты для разных отраслей. В ряде эмпирических исследований, проведенных в течение последних двух десятилетий, был сделан вывод о том, что уровень отраслевой концентрации остается устойчиво высоким даже при очень большом размере рынка. Этот эффект был найден для пищевой промышленности [14], обрабатывающей промышленности [7, 11], фармацевтической отрасли [8], банковских услуг [4].

В то же время, согласно стандартной теории несовершенной конкуренции [12], неограниченный рост размера рынка ведет к тому, что уровень концентрации в пределе падает до нуля. Таким образом, стандартная теория неспособна объяснить упомянутую эмпирическую закономерность, что мотивирует дальнейшее теоретическое изучение вопроса.

Возможное теоретическое объяснение обсуждаемого феномена предложенное Дж. Саттоном в [14] состоит в том, что некоторая составляющая фиксированных затрат фирм в существенной степени эндогенна. Эти модели более реалистичны, чем стандартные модели олигополии со свободным входом, так как некоторые составляющие фиксированных затрат фирм в существенной степени эндогенны. Примерами являются затраты на исследовательскую деятельность и рекламу. Ограниченность роста числа фирм при расширении рынка объясняется тем, что вход новых фирм успешно блокируется уже существующими фирмами, инвестирующими все больше средств в повышение качества продукции, технологические инновации, рекламу и т.д.

Недостаток подхода Дж. Саттона заключается, по нашему мнению, в том, что предложенные им модели олигополии с эндогенными фиксированными издержками являются достаточно сложными для анализа. Проблемы нередко возникают уже на этапе доказательства существования равновесия Нэша. Кроме того, в моделях такого рода часто имеет место множественность равновесий, причем нет универсального ответа на вопрос о том, какое равновесие в итоге реализуется. Ситуация еще более осложняется тем, что надежды на полную характеризацию всех равновесий в моделях такого типа, как правило, почти нет. Поэтому упомянутый подход не обладает той степенью гибкости, которая позволила бы использовать его в широком круге приложений. Кроме того, границы применимости данного подхода определяются тем, что олигополистические рынки характеризуются наличием небольшого числа крупных игроков, индивидуальные решения каждого из которых могут влиять на конъюнктуру рынка. В то же время, многие реальные рынки и отрасли (например, пищевая промышленность) обладают как чертами совершенной конкуренции, так и чертами монополии. С одной стороны, количество фирм в таких отраслях слишком велико для того, чтобы какая-либо отдельная фирма могла своими действиями непосредственно влиять на рыночную ситуацию. При этом, уже работающие в отрасли фирмы часто не могут устанавливать барьеры входа для новых фирм, то есть имеет место свобода входа на рынок. С другой стороны, каждая фирма обладает монопольной властью в том смысле, что назначение цены выше предельных затрат не влечет потерю всех покупателей. Это может происходить, например, за счет дифференциации продукции, то есть неполной заменимости предлагаемого данной фирмой продукта конкурирующими аналогами.

Обладающие перечисленными свойствами рынки наиболее адекватно моделируются в рамках подхода монополистической конкуренции. Этот подход был впервые предложен в [3], обрел формальную математическую завершенность в работах [5, 13] и находит обширное применение при исследовании вопросов международной торговли, экономического роста, городской и региональной экономики. Ключевыми элементами данного подхода являются предположения о любви к разнообразию (при заданном бюджете полезность от потребления всего спектра разновидностей предлагаемого продукта выше, чем от потребления какой-то его части), неатомичности фирм (множество фирм континуально, и каждая фирма имеет меру ноль) и свободе входа (фирмы входят на рынок до тех пор, пока операционная прибыль превышает фиксированные издержки входа).

Цель статьи – показать, при каких условиях описанный выше эффект неубывания концентрации по размеру рынка возникает в монополистически конкурентной отрасли. Для достижения этой цели в работе построена модель монополистической конкуренции с многопродуктовыми фирмами, невыпуклыми издержками и переменной эластичностью замещения. Каждая фирма производит не один продукт, а целый спектр горизонтально дифференцированных разновидностей продукции. Другими словами, фирма характеризуется некоторой шириной своей продуктовой линейки. Расширение продуктовой линейки требует дополнительных затрат. Роль затрат на разработку новых видов продукции в нашей модели сходна с той ролью, которую играют эндогенные фиксированные издержки в моделях типа Саттона.

Предлагаемая нами модель монополистической конкуренции с многопродуктовыми фирмами не является первым опытом подобного рода в научной литературе. Модели такого типа рассматривались, например, в [1, 2, 9]. Однако эти модели не пригодны для решения поставленного нами исследовательского вопроса, поскольку издержки фирм в этих моделях предполагаются линейными как по объему выпуска продукции, так и по ширине продуктовой линейки. При такой спецификации переменных издержек наличие положительных фиксированных издержек входа влечет экономию от охвата (economies of scope) и экономию от масштаба (economies of scale). Следствием этого является неограниченный рост равновесного числа фирм при неограниченном росте размера рынка. Данный результат эквивалентен убыванию до нуля уровня концентрации, поскольку в равновесии все фирмы имеют одинаковый размер. Таким образом, модели цитированных авторов не позволяют получить теоретических выводов относительно отраслевой концентрации фирм, которые согласовывались бы с результатами многочисленных эмпирических исследований, упомянутых выше.

Отличительной чертой нашего подхода является использование более сложной функции издержек, которая вогнута по объему выпуска и выпукла по ширине продуктовой линейки. Другими словами, технология каждой фирмы характеризуется возрастающей отдачей от масштаба и убывающий отдачей от охвата. Также, в отличие от большинства авторов, мы не предполагаем какой-либо параметрической спецификации потребительских предпочтений и работаем в условиях аддитивно-сепарабельной функции полезности общего вида с переменной эластичностью замещения. Такая степень общности повышает гибкость модели и позволяет получить результаты, устойчивые к изменению функциональной формы спроса, выбор которой всегда в некоторой мере произволен. Преимущества использования функции полезности общего вида в моделях монополистической конкуренции подробно обсуждаются в работе [16].

Основной результат статьи состоит в том, что асимптотическое поведение равновесного уровня отраслевой концентрации фирм по размеру рынка может быть различным в зависимости от соотношений между параметрами модели. Более конкретно, если эластичность издержек на разработку новых продуктов по ширине продуктовой линейки фирмы ниже некоторого порогового уровня, то число фирм при неограниченном росте размера рынка убывает до нуля, а уровень отраслевой концентрации фирм стремится к бесконечности (концентрированное равновесие). Если эластичность издержек по ширине продуктовой линейки фирмы в точности равна пороговому значению, то с ростом размера рынка число фирм и уровень концентрации в отрасли стабилизируются на некотором положительном уровне (промежуточное равновесие). Наконец, если эластичность превышает пороговое значение, то с ростом размера рынка число фирм неограниченно растет, а уровень отраслевой концентрации убывает до нуля (фрагментированное равновесие). Упомянутое пороговое значение зависит только от эластичности издержек фирмы по объему производства. Таким образом, при различных сочетаниях технологических параметров возникают разные режимы поведения отрасли в условиях расширения рынка: монополизация отрасли, стабилизация концентрации на положительном уровне (как в моделях Саттона) либо тендеция к совершенной конкуренции (как в стандартной теории). Этот результат позволяет говорить о том, что взаимодействие эффектов экономии от масштаба и неэкономии от охвата представляется правдоподобным теоретическим объяснением различий в эмпирически наблюдаемом поведении отраслей.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 содержит описание модели. В Разделе 3 дается определение симметричного равновесия со свободным входом, выводятся условия равновесия, доказывается теорема существования и единственности. В Разделе 4 проведен анализ асимптотического поведения равновесного уровня отраслевой концентрации фирм при неограниченном возрастании размера рынка, сформулировано и доказано основное утверждение. Также в Разделе 4 приведены результаты численного исследования влияния технологических шоков (то есть изменений параметров функции затрат) на равновесное число фирм. Раздел 5 содержит заключительные замечания. Наиболее технические фрагменты доказательств вынесены в Приложения.

2. Модель

Экономика предполагается односекторной и использующей только один фактор производства – труд. Производимый продукт предполагается горизонтально дифференцированным и представлен в модели континуумом разновидностей. Предпочтения потребителей одинаковы и задаются аддитивно-сепарабельной функцией полезности, которая характеризуется переменной эластичностью замещения и обладает свойством любви к разнообразию.

Сторона предложения представлена континуумом многопродуктовых фирм. Технологии производства у всех фирм одинаковы, они характеризуются возрастающей отдачей от масштаба и убывающей отдачей от охвата. Каждая фирма производит континуум разновидностей дифференцированного продукта, причем множества разновидностей, производимых разными фирмами, не пересекаются. Наконец, имеет место свободный вход в отрасль, поэтому в равновесии операционная прибыль в точности покрывает фиксированные издержки.

2.1. Задача потребителя

В экономике имеется континуум одинаковых потребителей меры L. Предпочтения каждого потребителя задаются аддитивно сепарабельной функцией полезности

$$\mathcal{U} = \int_0^N \int_0^{n_j} u(x_{ij})\, di\, dj. \tag{2.1}$$

Здесь N – мера множества фирм (которую мы, для краткости, будем далее называть числом фирм), n_j – размер продуктовой линейки фирмы j, x_{ij} – объем потребления разновидности $i \in [0, n_j]$, а $u(x_{ij})$ – строго возрастающая, вогнутая и дважды дифференцируемая элементарная функция полезности.

Из того, что функция полезности имеет вид (2.1), следует, в частности, что полезность каждого потребителя возрастает не только по объему потребления каждого вида продукции, но и по количеству предлагаемых на рынке видов продукции. Вогнутость элементарной функции полезности $u(x_{ij})$ мотивирует потребителя не концентрироваться на каком-то одном товаре, а распределять расходы между всеми разновидностями продукта. В этом проявляется *любовь к разнообразию*.

Однородный труд принимается за единицу счета, что означает нормировку заработной платы к 1. Каждый потребитель обладает одной единицей труда и не имеет других источников дохода, кроме заработной платы, поскольку труд является единственным производственным фактором в нашей модели. Следовательно, доход каждого потребителя равен 1.

Таким образом, задача потребителя состоит в том, чтобы выбрать такой вектор потребления $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i \le n_j, j \le N}$, который максимизирует полезность (2.1) при условии

$$\int_0^N \int_0^{n_j} p_{ij}\, x_{ij}\, di\, dj \le 1. \tag{2.2}$$

Здесь p_{ij} – цена, назначенная фирмой j на разновидность i.

Необходимое условие оптимальности в задаче потребителя имеет вид

$$p_{ij} = \frac{u'(x_{ij})}{\lambda}. \tag{2.3}$$

Здесь λ – множитель Лагранжа, который можно интерпретировать как предельную полезность дохода. Другая интерпретация величины λ, более важная с точки зрения нашего исследования, будет обсуждаться ниже (см. подраздел 2.2). Здесь мы лишь отметим, что если некоторая фирма j изменяет вектор цен $\mathbf{p}_j = (p_{ij})_{i \le n_j}$ на свою продукцию, в то время как все другие фирмы сохраняют прежние цены, то значение λ в точке оптимума потребителя не изменится. В самом деле, легко показать, что λ есть корень уравнения

$$\int\limits_0^N \int\limits_0^{n_j} p_{ij}\,(u')^{-1}(\lambda p_{ij})\,di\,dj = 1. \qquad (2.4)$$

Поскольку одномерная продуктовая линейка $[0, n_j]$ фирмы j имеет в двумерном множестве всех разновидностей нулевую меру, изменение цен на продукцию, производимую фирмой j, не меняет значения левой части уравнения (2.4) при фиксированных ценах других фирм.

Формулы (2.3) определяют обратные функции спроса потребителя на каждую разновидность продукции. В силу симметричности предпочтений, обратные функции спроса на все разновидности одинаковы.

Введем следующую функцию, использование которой будет в дальнейшем удобно:

$$r_u(x) = -\frac{x\,u''(x)}{u'(x)}.$$

Функцию r_u можно интерпретировать трояко. Во-первых, r_u представляет собой эластичность обратного спроса, что непосредственно следует из (2.3). Во-вторых, r_u показывает степень относительной любви потребителей к разнообразию. В самом деле, величина r_u является мерой вогнутости элементарной функции полезности u, и следовательно, косвенно характеризует, насколько потребитель предпочитает смесь двух равноценных товарных наборов каждому набору в отдельности.

Наконец, r_u есть величина, обратная к эластичности замещения между разновидностями. Другими словами, чем ниже значение r_u, тем лучше разновидности замещают друг друга. Таким образом, r_u одновременно измеряет силу двух эффектов: стандартного *конкурентного эффекта* и *эффекта каннибализации*. Первый эффект проявляется в том, что каждой фирме сложнее конкурировать с другими фирмами в условиях, когда производимая ею продукция мало отличается по своим потребительским характеристикам от продукции конкурентов. Второй эффект состоит в том, что по мере расширения продуктовой линейки новым разновидностям продукции становится сложнее конкурировать с уже существующими на рынке разновидностями *того же производителя*. Ясно, что оба эффекта сильнее в условиях, когда разновидности лучше замещают друг друга[1].

Чтобы результаты не оказалась вырожденными, мы накладываем некоторые ограничения на предпочтения. Во-первых, мы рассматриваем случай, когда эластичность обратного спроса возрастает по уровню потребления:

$$r_u'(x) > 0.$$

Обоснование того, почему это предположение естественно, приводится в [6, 15, 16].

Во-вторых, предполагается, что хотя бы для некоторого интервала значений x функция r_u принимает значения между нулем и единицей. Это предположение всегда делается в моделях монополистической конкуренции, поскольку иначе задача максимизации прибыли фирмы не имеет нетривиального решения.

Наконец, в-третьих, мы предполагаем ограниченность функции $x\,u'(x)$. Как видно из (2.3), данная функция является, с точностью до не зависящего от x множителя, функцией выручки с продаж одной разновидности продукта.

В дальнейшем указанные условия предполагаются выполненными по умолчанию. Примерами функций полезности, удовлетворяющих введенным предположениям, являются следующие широко используемые в литературе по монополистической конкуренции функции:

- CARA:

$$u(x) \equiv 1 - \exp(-\theta x),\ \theta > 0\,;$$

- HARA:

---

[1] Для того, чтобы «разделить» два упомянутых эффекта, можно было бы использовать функцию полезности более общего вида, например «двухуровневую» функцию полезности $\mathcal{U} = \int_0^N U\left[\int_0^{n_j} u(x_{ij})di\right] dj$, где U – возрастающая вогнутая функция. Однако это приводит к существенному усложнению модели и не позволяет получить столь же однозначные результаты, как в случае аддитивной сепарабельности по разновидностям. Поэтому мы предпочитаем использовать не самую общую, но пригодную для наших целей модель.

$$u(x) \equiv \ln(1 + ax),\ a > 0\,;$$

- Квадратичная полезность:

$$u(x) \equiv kx - \frac{x^2}{2},\ k > 0\,.$$

Наконец, отметим, что ограниченность выручки влечет выполнение следующего обобщенного условия Инады: $u'(\infty) \leq 0$. В самом деле, в силу того, что элементарная фукнкция полезности вогнута, ее производная $u'(x)$ является положительной убывающей функцией и, следовательно, имеет предел (возможно, равный минус бесконечности) при $x \to \infty$. Если этот предел строго положителен, то требование ограниченности $xu'(x)$ нарушается.

2.2. Задача производителя

Отрасль состоит из континуума фирм меры N. Фирма $j \in [0, N]$ выбирает размер своей продуктовой линейки n_j и производственный план $\mathbf{q}_j : [0, n_j] \to \mathbb{R}_+$. Таким образом, как объемы производства, так и ширина продуктовой линейки определяются эндогенно. Как будет видно ниже, число (точнее, масса) фирм N в равновесии также является эндогенной величиной.

Предполагается, что технологии всех фирм одинаковы и описываются функцией затрат следующего вида:

$$C(y, n) = F + y^\alpha + n^\beta. \tag{2.5}$$

Здесь $y \equiv \int_0^n q_i di$ – суммарный выпуск фирмы; $F > 0$ – фиксированные затраты на вход в отрасль; α, β – параметры, причем $0 < \alpha < 1 < \beta$; y^α – переменные производственные затраты; n^β – затраты на разработку продуктовой линейки размера n.

Условие $0 < \alpha < 1 < \beta$ означает, что технология обладает свойствами *экономии от масштаба* (economies of scale) и *неэкономии от охвата* (diseconomies of scope). Первое свойство означает, что увеличение объема выпуска требует менее чем пропорционального увеличения затрат, а второе – что расширение продуктовой линейки требует более чем пропорционального увеличения затрат.

Задача фирмы состоит в том, чтобы максимизировать прибыль

$$\Pi_j = \int\limits_0^{n_j} p_{ij} q_{ij} di - C\left(\int\limits_0^{n} q_{ij} di, n_j\right).$$

Предполагается, что $q_{ij} = Lx_{ij}$ для всех $j \in [0, N]$ и для всех $i \in [0,\, n_j]$, то есть имеет место баланс спроса и предложения. С учетом этого, а также формул (2.3) и (2.5), функции прибыли Π_j приобретают вид

$$\Pi_j(n_j,\, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{n_j} u'\left(\frac{q_{ij}}{L}\right) q_{ij} di - \left[F + \left(\int\limits_0^{n} q_{ij} di\right)^{\alpha} + n_j^{\beta}\right],\ j \in [0, N]. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) проясняет роль, которую играет показатель λ: он является агрегированной рыночной статистикой, значение которой учитывается каждым производителем при решении задачи максимизации прибыли. При этом, ни одна фирма не может оказывать влияние на величину λ своими индивидуальными действиями. Формально это следует из того, что соотношение (2.4) не изменяется, если какая-либо одна фирма изменит цены на свою продукцию и/или длину продуктовой линейки, а ценовая политика и ассортимент всех прочих производителей останутся неизменными.

Поскольку целевые функции всех фирм одинаковы, индекс j в дальнейшем опускается.

Задача фирмы состоит в максимизации прибыли (2.6) по размеру продуктовой линейки n и производственному плану $\mathbf{q}$. Исследование свойств решения этой задачи проще всего провести в два этапа.

Первый этап состоит в рассмотрении задачи субоптимизации прибыли по $\mathbf{q}$ при фиксированном n и фиксированном суммарном выпуске фирмы y. Через 1_A обозначим индикатор множества $A \subseteq [0, n]$, а через $\bar{x}$ - корень уравнения $r_u(x) = 1$, если он существует[2]. В противном случае, положим $\bar{x} = \infty$.

---

[2]То, что уравнение $r_u(x) = 1$ имеет не более одного корня, вытекает из строгой монотонности и непрерывности функции $r_u(x)$.

Лемма 2.1. *Пусть $y \leq Ln\bar{x}$. Единственной точкой оптимума в задаче субоптимизации является симметричный производственный план* $\mathbf{q}^* \equiv y/n\, 1_{[0,n]}$.

Доказательство. См. Приложение 1.

Прокомментируем условие $y \leq Ln\bar{x}$ для случая, когда $\bar{x} < \infty$ (в противном случае оно выполнено автоматически). В условиях сделанных выше предположений выручка $xu'(x)$ от продаж отдельной разновидности продукции строго возрастает на промежутке $[0, \bar{x}]$ и строго убывает за его пределами. В самом деле, дифференцирование выручки дает

$$[xu'(x)]' = u'(x)[1 - r_u(x)] > 0 \iff x < \bar{x}.$$

Таким образом, если фирма будет производить какой-либо из продуктов в объеме, превышающем $L\bar{x}$, то сокращение выпуска этого продукта позволит ей одновременно увеличить выручку и снизить издержки. Поэтому, если суммарный выпуск фирмы превосходит $Ln\bar{x}$, то такая фирма заведомо не максимизирует свою прибыль. Другими словами, рассмотрение задачи субоптимизации при $y > Ln\bar{x}$ не имеет смысла.

На втором этапе определяются оптимальные значения суммарного выпуска y и ширины продуктовой линейки n. Из леммы 2.1 следует, что задача фирмы фактически сводится к максимизации прибыли лишь по этим двум переменным. Редуцированная функция прибыли имеет вид

$$\pi(y,\, n) \equiv R(y,\, n,\, \lambda) - \left(F + y^{\alpha} + n^{\beta}\right).$$

Здесь R – функция выручки фирмы, задаваемая формулой

$$R(y,\, n,\, \lambda) \equiv \frac{1}{\lambda} u'\left(\frac{y}{nL}\right) y. \tag{2.7}$$

Поскольку выручка (2.7) убывает по λ, можно трактовать значение λ как меру интенсивности конкурентной борьбы в отрасли. Другим важным свойством функции выручки является ее положительная однородность степени 1 по (y, n). В самом деле, при одинаковом процентном изменении суммарного выпуска фирмы и числа производимых разновидностей цена на каждую разновидность $u'(y/nL)/\lambda$

не изменяется, поскольку (i) индивидуальный уровень потребления каждой разновидности $x = y/nL$ остается неизменным и (ii) фирма не способна влиять на рыночную статистику λ. Поэтому выручка изменяется в той же пропорции, что и выпуск.

Достаточное (но не необходимое) условие существования решения в задаче второго этапа дается следующей леммой.

Лемма 2.2.

(i) Функция прибыли имеет глобальный максимум при каждом значении λ;

(ii) существует единственное $\lambda_0 > 0$, такое, что

$$\max_{y,n} \pi(y, n, \lambda_0) = 0\,;$$

(iii) каждая точка глобального максимума функции прибыли π при $\lambda = \lambda_0$ является внутренней.

Доказательство. См. Приложение 2.

Отметим, что технические трудности в доказательстве леммы 2.2 обусловлены, в основном, тем, что функция прибыли в нашей модели не обладает свойством глобальной вогнутости.

Замечание. Требование ограниченности $x\,u'(x)$ позволяет доопределить функцию прибыли в точке $y = n = 0$ предельным переходом. Чтобы это показать, сделаем замену переменных в функции прибыли:

$$\pi = \frac{L}{\lambda} u'(x) x\, n - n^{\beta} - y^{\alpha} - F, \tag{2.8}$$

где $x = y/nL$. Из формулы (2.8) и ограниченности $x\,u'(x)$ получаем

$$\lim_{y,n\to 0} \pi(y, n, \lambda) = -F.$$

Решение задачи максимизации прибыли, существование которого утверждается в лемме 2.2, характеризуется следующими условиями первого порядка:

$$\frac{1}{\lambda}\left(xu''(x) + u'(x)\right) = \alpha y^{\alpha-1}, \tag{2.9}$$

$$-\frac{L}{\lambda}\, x^2 u''(x) = \beta n^{\beta-1}. \tag{2.10}$$

Перепишем (2.9)–(2.10), используя функцию $r_u(x)$:

$$y\,\frac{u'}{\lambda}\,(1-r_u)=\alpha y^{\alpha}, \tag{2.11}$$

$$y\,\frac{u'}{\lambda}\,r_u=\beta\, n^{\beta}. \tag{2.12}$$

Учитывая вид функций обратного спроса (2.3), преобразуем уравнения (2.11)–(2.12) так, чтобы они не содержали переменной λ:

$$p=\frac{C_y}{1-r_u}, \tag{2.13}$$

$$p=\frac{n}{y}\,\frac{C_n}{r_u}, \tag{2.14}$$

где $C_y\equiv\alpha y^{\alpha-1}$ – предельные издержки производтсва, $C_n\equiv\beta n^{\beta-1}$ – предельные издержки разработки нового продукта.

Уравнение (2.13) представляет собой стандартную формулу ценообразования на монополистическом рынке. Оно может быть переписано в виде

$$\frac{p-C_y}{p}=r_u.$$

Таким образом, в равновесии *эластичность обратного спроса совпадает с относительной торговой наценкой.*

3. Равновесие

Вследствие свободного входа новые фирмы будут появлятся в отрасли до тех пор, пока прибыли не снизятся до нуля:

$$py=y^{\alpha}+n^{\beta}+F. \tag{3.1}$$

Кроме того, так как в экономике используется всего один фактор производства (труд), необходимо ввести условие баланса на рынке труда:

$$N\left(y^{\alpha}+n^{\beta}+F\right)=L. \tag{3.2}$$

Теперь мы можем приступить к анализу равновесий в нашей модели. Интуитивная характеристика понятия равновесия состоит в следующем: равновесие – это такое состояние экономики, в котором (i) все потребители максимизируют свою полезность; (ii) все фирмы максимизируют свою прибыль; (iii) прибыль всех фирм равна нулю в силу свободного входа на рынок; (iv) выполняется условие баланса труда.

Дадим формальное определение симметричного равновесия.

Определение 3.1. *Симметричным равновесием называется четверка* $(y^*,\ n^*,\ p^*,\ N^*)$, *являющаяся решением системы уравнений* (2.13) – (3.2) *и такая, что* $(y^*,\ n^*)$ *– точка глобального максимума функции прибыли* $\pi\,(y, n, \lambda^*)$, *где*

$$\lambda^* = \frac{1}{p^*} u'\left(\frac{y^*}{Ln^*}\right).$$

Ответ на вопрос о существовании и единственности симметричного равновесия дается в следующем предложении.

Предложение 3.1. *Симметричное равновесие существует и единственно.*

Доказательство. Существование имеет место в силу леммы 2.2. В самом деле, рассмотрим какую-нибудь точку (y^*, n^*) внутреннего глобального максимума прибыли π при $\lambda = \lambda_0$. Поскольку максимум внутренний, а также в силу дифференцируемости функции прибыли и равенства $\pi^*(\lambda_0) = 0$, вектор (y^*, n^*, p^*), где

$$p^* = \frac{1}{\lambda_0} u'\left(\frac{y^*}{Ln^*}\right),$$

удовлетворяет условиям первого порядка (2.11)–(2.12) и условию нулевой прибыли. Положим

$$N^* = \frac{L}{p^* y^*}.$$

Ясно, что вектор (y^*, n^*, p^*, N^*) является симметричным равновесием. Существование доказано.

Используя условия первого порядка задачи производителя (2.13)–(2.14) и условие нулевой прибыли (3.1), получаем следующее уравнение в эластичностях:

$$\frac{R_y y}{R} + \frac{R_n n}{R} = \frac{\alpha y^\alpha + \beta n^\beta}{y^\alpha + n^\beta + F}. \tag{3.3}$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, функция выручки фирмы $R(y,\, n,\, \lambda)$ положительно однородна степени 1 по (y, n). Следовательно, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, уравнение (3.3) может быть преобразовано к виду

$$(\beta - 1)n^{\beta} = (1 - \alpha)y^{\alpha} + F. \tag{3.4}$$

Далее, разделив (2.13) на (2.14), получаем

$$\frac{\alpha y^{\alpha}}{\beta n^{\beta}} = \frac{1 - r_u(y/nL)}{r_u(y/nL)}. \tag{3.5}$$

В уравнения (3.4)–(3.5) входят только две эндогенных переменных: суммарный выпуск y и ширина продуктовой линейки n. Заметим, что если их равновесные значения y^* и n^* известны, то нахождение равновесной цены p^* и равновесного числа фирм N^* становится тривиальным: цена однозначно определяется из правила монопольного ценообразования (2.13) или из формулы (2.14), а число фирм – из условия баланса труда (3.2). Таким образом, для завершения доказательства достаточно установить единственность решения системы (3.4)–(3.5). Это сделано в Приложении 3. Единственность доказана. □

4. Сравнительная статика равновесного числа фирм

Перейдем теперь к основному вопросу статьи: когда в модели монополистической конкуренции с многопродуктовыми фирмами может иметь место ограниченность концентрации фирм при неограниченном росте рынка?

Прежде, чем приступить к ответу на этот вопрос, необходимо выбрать способ измерения концентрации в отрасли. Одной из наиболее часто используемых мер концентрации фирм является индекс Херфиндаля, вычисляемый как сумма квадратов долей рынка всех фирм в отрасли. Континуальный аналог индекса Херфиндаля имеет вид

$$H \equiv \int_0^N s_j^2 dj,$$

где s_j – доля фирмы j в общем выпуске,

$$s_j \equiv \frac{\int_0^{n_j} p_{ij} q_{ij} di}{\int_0^N \int_0^{n_j} p_{kl} q_{kl} dk dl}.$$

Если продажи всех фирм одинаковы, что имеет место в симметричном равновесии, то индекс Херфиндаля зависит только от числа фирм, причем эта зависимость является обратно-пропорциональной:

$$H = \frac{1}{N}.$$

Таким образом, поведение уровня отраслевой концентрации фирм в зависимости от размера рынка полностью определяется поведением числа фирм, и наоборот.

4.1. Поведение числа фирм при неограниченном росте размера рынка

Анализ равновесных уравнений (3.4)–(3.5) при $L \to \infty$ дает полную характеризацию поведения равновесного числа фирм $N^*(L)$ по размеру рынка L.

Предложение 4.1. *Пусть $L \to \infty$. Тогда:*

(i) если $\beta < \alpha/(1-\alpha)$, то $N^*(L) \to 0$;

(ii) если $\beta = \alpha/(1-\alpha)$, то $N^*(L) \to \bar{N}$, где $0 < \bar{N} < \infty$;

(iii) если $\beta > \alpha/(1-\alpha)$, то $N^*(L) \to \infty$;

Доказательство. Доказательство базируется на следующей лемме.

Лемма 4.1. *Имеет место следующее асимптотическое соотношение между поведением равновесного общего выпуска $y^*(L)$ и равновесной шириной продуктовой линейки $n^*(L)$ по размеру рынка L:*

$$[y^*(L)]^\alpha \sim k\,[n^*(L)]^\beta \;\; \textit{при } L \to \infty, \tag{4.1}$$

где $k > 0$ – некоторая константа, не зависящая от L.

Доказательство леммы 4.1 приведено в Приложении 4. Из формулы (4.1) непосредственно следует, что при $L \to \infty$ левая часть уравнения (3.5) стремится к $\alpha k/\beta$. Значит, к такому же значению должна стремиться и правая часть. А это, в силу непрерывности и монотонности функции $r_u(x)$, возможно тогда и только тогда, когда индивидуальное потребление $x^*(L)$ при $L \to \infty$ стремится к пределу $\bar{x}$, который является решением (причем единственным) уравнения

$$\frac{r_u(x)}{1 - r_u(x)} = \beta/\alpha k.$$

Отсюда, так как $x = y/nL$, следует еще одно асимптотическое соотношение:

$$\frac{1}{\bar{x}} \frac{y^*(L)}{n^*(L)} \sim L \text{ при } L \to \infty. \tag{4.2}$$

Теперь мы можем дать полную характеризацию асимптотического поведения числа фирм $N^*(L)$ по размеру рынка L в зависимости от параметров α и β. Применяя условие баланса труда (3.2) и формулы (4.1) – (4.2), получаем

$$N^*(L) \sim \frac{L}{KL^{\alpha\beta/(\beta-\alpha)} + F}, \text{ при } L \to \infty, \tag{4.3}$$

где $K = (1+k)(\bar{x}^\alpha/k)^{\beta/(\beta-\alpha)}$. Полагая $\bar{N} = 1/K$, видим, что доказываемое утверждение непосредственно следует из (4.3). $\square$

Предложение 4.1 свидетельствует о том, что определяющее влияние на асимптотическое поведение равновесного числа фирм (а значит, и уровня концентрации фирм в равновесии) оказывают факторы, лежащие на стороне предложения. Более конкретно, *ограниченность роста числа фирм при неограниченном возрастании рынка возникает тогда и только тогда, когда неэкономия от охвата относительно мала по сравнению с экономией от масштаба.* Другими словами, неравенство

$$\beta \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{4.4}$$

соответствует ситуации, когда эффект убывающей отдачи от охвата недостаточно силен, чтобы воспрепятствовать расширению продуктовой линейки существующих фирм и, тем самым, стимулировать вход новых фирм в отрасль. В то же время, экономия от масштаба позволяет уже присутствующим фирмам расширять продуктовую линейку, привлекая новых потребителей и, тем самым, покрывая необходимые затраты на увеличение разнообразия производимой продукции. Соответственно, новым фирмам оказывается невыгодно входить на рынок.

Условие (4.4) означает также, что достаточно высокая экономия от масштаба (возникающая при малых значениях параметра α) создает стимул для все новых фирм входить в отрасль, так как в этих условиях фирмам достаточно легко покрыть издержки входа. Таким образом, параметр α, является своего рода показателем демонополизации: если α велико (мало), то число фирм будет расти (не)ограниченно с увеличением размера рынка. Кроме того, из (4.4) следует, что если эффект экономии от масштаба является достаточно сильным (точнее, $\alpha < 0.5$), то число фирм в отрасли всегда неограниченно возрастает по размеру рынка. С другой стороны, если бы мы предположили, что $\alpha > 1$ – что сильно упростило бы доказательство единственности равновесия, так как издержки фирм стали бы строго выпуклыми по (y, n), – то условие (4.4) также никогда не могло бы быть выполнено. Таким образом, роль возрастающей отдачи от масштаба является ключевой в нашей модели.

Рассмотрим числовой пример. Пусть функция полезности имеет вид $u(x) \equiv \ln(1 + x)$, и $\alpha = 5/6$. Проведем численный анализ поведения числа фирм для следующих значений параметра β:

$$\beta_1 = 2,\ \beta_2 = 5,\ \beta_3 = 8.$$

Очевидно, что

$$\beta_1 < \frac{\alpha}{1-\alpha},\ \ \beta_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha},\ \ \beta_3 > \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

т.е. условие (4.4) выполнено как строгое неравенство при $\beta = 2$, выполнено как равенство при $\beta = 5$ и не выполнено при $\beta = 8$.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 1.

Случай $\beta < \frac{\alpha}{1-\alpha}$ можно назвать *концентрированным равновесием*, случай $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ – *промежуточным равновесием*, случай $\beta > \frac{\alpha}{1-\alpha}$ – *фрагментированным равновесием.* В случае концентрированного равновесия индекс концентрации H неограниченно растет по мере расширения рынка, то есть в пределе имеет место монополизация отрасли. Если имеет место промежуточная ситуация, то индекс Херфиндаля стабилизируется на некотором положительном уровне, и можно говорить об асимптотической олигополизации отрасли. Наконец, случай фрагментированного равновесия соответствует стандарт-

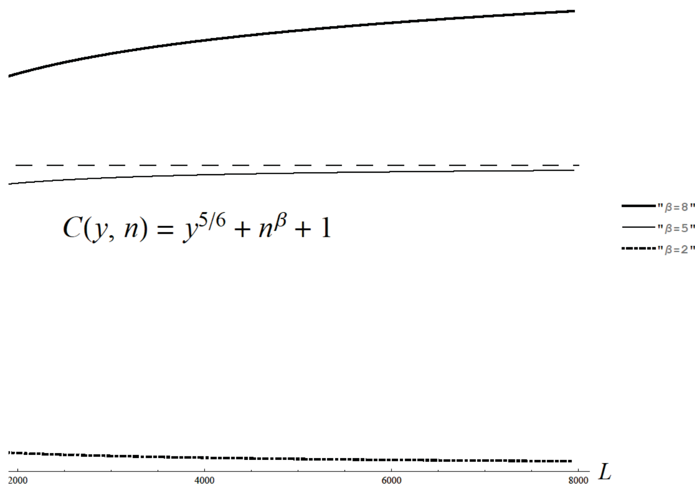

Рисунок 1. Влияние роста рынка на число фирм при различных соотношениях α и β.

ному представлению о конкуренции: большой рынок – много фирм. Индекс концентрации в этом случае стремится к нулю при $L \to \infty$.

Из рис. 1 видно также, что в случае концентрированного равновесия расширение рынка ведет к увеличению числа фирм при условии, что начальный размер рынка достаточно мал. Когда рынок достигает определенного порогового размера, при дальнейшем его росте число фирм начинает уменьшаться. Наличие данного эффекта подтверждается эмпирическими исследованиями. Так, в [10] отмечается, что на раннем развитии автомобильного рынка в США рост числа моделей автомобилей был основан в большей степени на входе новых фирм, нежели на увеличении количества моделей каждой фирмой (продуктовой линейкой). Однако затем, с 1910 года, число фирм упало (в среднем с 153 в 1910-1920 годах до 30 в 1930), в то время как число моделей, предлагаемых новыми фирмами, демонстрировало заметный рост (с 5.1 моделей на фирму в 1910 до 18.4 в 1930 году).

4.2. Влияние технологических шоков

Рассмотрим теперь влияние технологических шоков на поведение числа фирм. Под технологическими шоками мы понимаем изменение параметров функции затрат: эластичности по масштабу α, эластичности по охвату β и издержек входа в отрасль f.

В отличие от подраздела 4.1, здесь мы ограничиваемся численным моделированием. Элементарная функция полезности всюду предполагается равной $\ln(1 + x)$.

На рис. 2 приведены результаты анализа влияния увеличения параметра α на зависимость числа фирм от размера рынка.

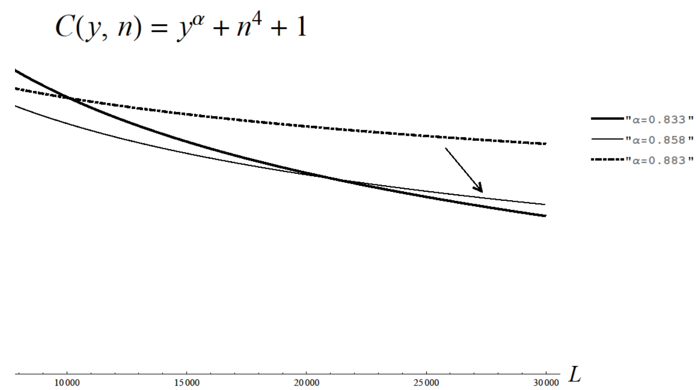

Рисунок 2. Влияние уменьшения экономии от масштаба на поведение числа фирм.

Из рис. 2 видно, что уменьшение экономии от масштаба ведет к входу (выходу) числа фирм на малый (большой) рынок. Интуитивное объяснение этого эффекта состоит в следующем. Снижение экономии от масштаба означает, что деятельность фирмы начинает окупаться при достижении фирмой достаточно малого размера. Тем самым, вход новых фирм на относительно малый рынок становится более выгодным. Однако начиная с некоторого порогового размера рынка уже работающие в отрасли фирмы будут расширять продуктовую линейку, захватывая все новые сегменты рынка и и вытесняя часть конкурентов из отрасли. В таком случае, спрос на разнообразие будет удовлетворятся почти полностью за счет расширения продуктовой линейки.

На рис. 3 приведены результаты анализа увеличения параметра

β, то есть усиления убывающей отдачи от охвата, на зависимость числа фирм от размера рынка.

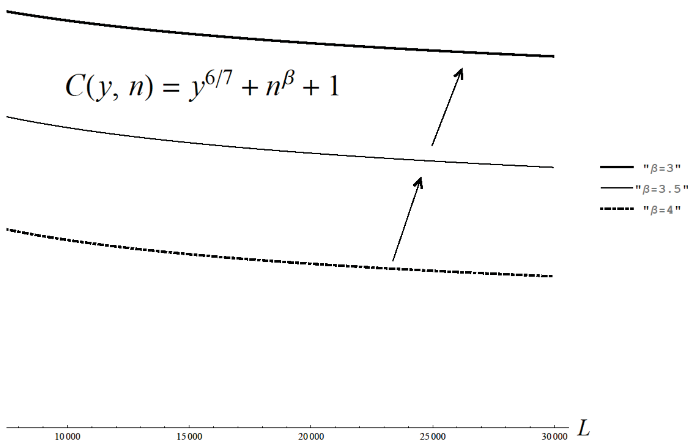

Рисунок 3. Влияние увеличения неэкономии от охвата на поведение числа фирм.

Из рис. 3 видно, что при увеличении параметра β равновесное число фирм увеличивается при любом размере рынка. Это происходит из-за того, что увеличение неэкономии от охвата ведет к росту издержек на расширение разнообразия как на маленьких рынках, так и на больших, что приводит к возникновению избыточного спроса на разнообразие и, как следствие, к входу новых фирм. Также рис. 3 демонстрирует существование порогового размера рынка, после которого начинается выход фирм.

Наконец, на рис. 4 приведены результаты численного моделирования поведения числа фирм в зависимости от издержек входа в отрасль F.

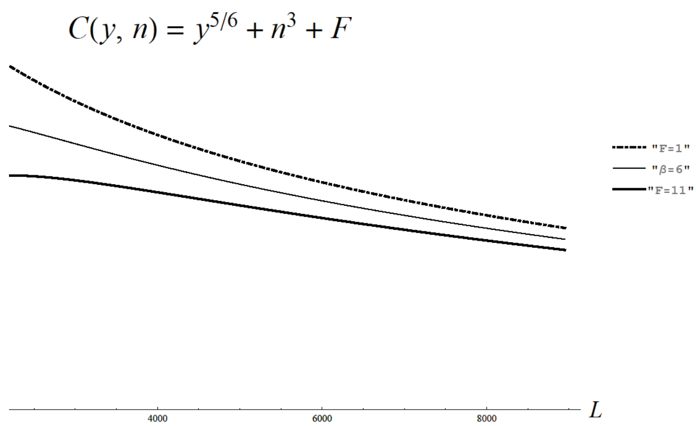

Рисунок 4. Уменьшение фиксированных издержек.

Как можно видеть из рис. 4, снижение фиксированных издержек входа F ведет к резкому увеличению числа фирм на малых рынках. Однако на больших рынках влияние снижения фиксированных издержек заметно меньше (графики зависимости числа фирм от размера рынка при различных значениях F сближаются). Важен относительный размер рынка по сравнению с фиксированными издержками L/F, а не абсолютный размер рынка L.

5. Заключение

В статье изучена зависимость концентрации многопродуктовых фирм от размера рынка. Показано, что рыночное равновесие является результатом взаимодействия трех сил: любви к разнообразию, экономии от масштаба и экономии от охвата. Взаимодействие этих факторов может привести рынок к одному из трех возможных равновесий: концентрированному, фрагментированному или промежуточному. Концентрированное равновесие, характеризующееся малым количеством фирм с широким ассортиментом производимой продукции, возникает тогда и только тогда, когда неэкономия от охвата мала по сравнению с экономией от масштаба, то есть либо при достаточно большой отдаче от масштаба, либо при высоких издежках на увеличение разнообразия. В этой ситуации уровень концентрации неограниченно возрастает с ростом размера рынка. Фрагментированное равновесие, в котором уровень концентрации стремится к нулю при неограниченном росте размера рынка, возникает в противоположной ситуации. Также существует промежуточный случай, когда равновесный уровень концентрации с ростом размера рынка стабилизируется на некотором положительном уровне. Таким образом, сила эффекта экономии от масштаба является фактором демонополизации и фрагментации равновесного исхода при достаточно большом размере рынка, так же как и интенсивность убывающей отдачи от охвата.

Кроме того, проведен численный анализ влияния технологических шоков на характер поведения числа фирм при изменении размера рынка. Уменьшение экономии от масштаба ведет к увеличению (уменьшению) числа фирм на малых (больших) рынках, так как для поддержания прежнего уровня разнообразия фирмам необходимо достичь больших выгод от размера производства, что делается за счет вытеснения части фирм из отрасли. Увеличение неэкономии от охвата влечет увеличение числа фирм при любом размере рынка. Снижение фиксированных издержек стимулирует вход новых фирм только на малых рынках, но не на больших: важен не абсолютный, а относительный (по сравнению с фиксированными издержками) размер рынка.

Наконец, отметим, что большая часть выводов, по-видимому, сохраняется при изменении вида функций затрат в пределах достаточно широкого класса функций. В частности, представляется естественной гипотеза, что задача асимптотического анализа модели, в которой функция затрат является линейной комбинацией степенных функций, сводится к уже рассмотренной задаче. Однако решение этого вопроса выходит за рамки статьи и является потенциальным предметом дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allanson P., Montagna C. *Multiproduct firms and market structure: An explorative application to the product life cycle* // International Journal of Industrial Organization. 2005. V. 23. N 7-8. P. 587-597.

2. Anderson S., de Palma A. *Market Perfomance With Multiproduct Firms* // The Journal of Industrial Economics. 2006. V. 54. N 1. P. 95-124.

3. Chamberlin E.H. *The Theory of Monopolistic Competition.* Harvard: University Press, 1933.

4. Dick A. *Market Size, Service Quality, and Competition in Banking* // Journal of Money, Credit and Banking. 2007. V. 39. N 2. P. 49-81.

5. Dixit A.K., Stiglitz J.E. *Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity* // The American Economic Review. 1977. V. 67. N 3. P. 297-308.

6. Krugman P.R. *Increasing Returns, Monopolistic Competition, and International trade* // Journal of International Economics. 1979. V. 9. N 4. P. 469-479.

7. Lyons B., Matraves C., Moffatt P. *Industrial Concentration and Market Integration in the European Union* // Economica. 2001. V. 68. N 269. P. 1-26.

8. Matraves C. *Market Structure, R&D and Advertising in the Pharmaceutical Industry* // Journal of Industrial Economics. 1999. V. 47. N 2. P. 169-194.

9. Ottaviano G., Thisse J. *Monopolistic competition, multiproduct firms and optimum product diversity.* CEPR Discussion Paper N 2151. 1999.

10. Raff, Daniel M G., Trajtenberg M. *Quality-Adjusted Prices For The American Automobile Industry: 1906-194.* NBER Working Paper N 5035. 1995.

11. Robinson W.T., Chiang J. *Are Sutton's predictions robust?: Empirical Insights Into Asvertising, R& D, and Concentration* // The Journal of Industrial Economics. 1996. V.44. N 4. P. 389–408.

12. Shapiro C. *Theories of oligopoly behavior* // Handbook of Industrial Organization. V. 1. Chapter 6. North-Holland: Elsevier. 1989. P. 329–414.

13. Spence M. *Product Selection, Fixed Costs, and Monopolistic Competition* // The Review of Economic Studies. 1976. 43 N 2. P. 217–235.

14. Sutton J. *Sunk costs and Market Structure.* London: MIT Press, 1991.

15. Vives X. *Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools.* Cambridge: The MIT Press, 2001.

16. Zhelobodko E. et al. *Monopolistic Competition: Beyond the Constant Elasticity of Substitution* // Econometrica. 2012. V. 80. N 6. P. 2765-2784.

6. Приложения

Приложение 1: доказательство леммы 2.1.

Легко видеть, что задача субоптимизации прибыли при фиксированных n и $y \leq Ln\bar{x}$ эквивалентна следующей задаче максимизации выручки при заданном выпуске:

$$\max_{\mathbf{q} \in L_\infty([0,n])} \Re(\mathbf{q}), \tag{6.1}$$

при ограничениях

$$\int_0^n q_i di = y, \tag{6.2}$$

$$q_i \leq L\bar{x}. \tag{6.3}$$

Здесь $\Re(\mathbf{q})$ – выручка фирмы,

$$\Re(\mathbf{q}) = \frac{L}{\lambda} \int_0^n u'\left(\frac{q_i}{L}\right) q_i di.$$

Отметим, что использование именно L_∞ в качестве допустимого множества производственных планов не обязательно. Вместо него может использоваться любое пространство измеримых функций, в котором множество финитных функций плотно.

Задача (6.1)–(6.2) представляет собой задачу максимизации строго вогнутого симметричного функционала при линейном ограничении. Чтобы это показать, достаточно установить строгую вогнутость функции выручки с продаж отдельной разновидности $xu'(x)$ на отрезке $[0, \bar{x}]$. Двукратное дифференцирование выручки дает

$$[xu'(x)]'' = u''(x)[1 - r_u(x)] - u'(x)r_u'(x).$$

Это выражение отрицательно при всех $\in (0, \bar{x})$, поскольку $r_u(x) < 1$, $r_u'(x) > 0$ и $u''(x) < 0 < u'(x)$. Таким образом, $xu'(x)$ действительно строго вогнута на $[0, \bar{x}]$.

Единственность решения (если оно существует) вытекает из строгой вогнутости целевого функционала (6.1). Остается проверить, что $\mathbf{q}^* \equiv y/n\, 1_{[0,n]}$ является точкой оптимума.

Покажем сначала, что $\Re(\mathbf{q}^*) > \Re(\mathbf{q})$ для всех $\mathbf{q}$ вида

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^{m} \xi_k 1_{A_k}, \tag{6.4}$$

где A_k – попарно непересекающиеся подмножества $[0, n]$, каждое из которых имеет меру n/m; ξ_k – неотрицательные числа. Чтобы план $\tilde{\mathbf{q}}$ удовлетворял (6.2), потребуем выполнения равенства

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \frac{y}{n}.$$

Рассмотрим теперь всевозможные производственные планы вида

$$\mathbf{q}_\sigma = \sum_{k=1}^{m} \xi_{\sigma(k)} 1_{A_k}, \quad \sigma \in S_m.$$

Здесь S_m – группа подстановок, действующая на множестве $\{1, \ldots, m\}$.

В силу симметричности функционала R, имеем

$$\Re(\tilde{\mathbf{q}}_\sigma) = \Re(\tilde{\mathbf{q}}) \ \text{ для всех } \ \sigma \in S_m. \tag{6.5}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m}\mathbf{q}_\sigma = \mathbf{q}^*. \tag{6.6}$$

Из строгой вогнутости выручки $\Re$ и формул (6.5)–(6.6) следует, что $\Re(\mathbf{q}) < \Re(\mathbf{q}^*)$.

Поскольку множество функций вида (6.4) плотно в L_∞, имеем $\Re(\mathbf{q}) \le \Re(\mathbf{q}^*)$ для всех возможных $\tilde{\mathbf{q}} \in L_\infty$. Тем самым, $\mathbf{q}^*$ – точка максимума. Лемма доказана.

Приложение 2: доказательство леммы 2.2.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{K}_0(\lambda) = \left\{(y,n)\in\mathbb{R}^2_+ \,|\, \pi(y,n,\lambda) \ge -F\right\}.$$

Для доказательства первой части леммы 2.2 достаточно показать, что $\mathcal{K}_0(\lambda)$ компактно при любом $\lambda > 0$. В самом деле, если $\mathcal{K}_0(\lambda)$ компактно, то функция π достигает наибольшего значения в некоторой точке $\mathcal{K}_0(\lambda)$.

Отметим, что (i) $\mathcal{K}_0(\lambda)$ непусто, так как $(0,0)\in\mathcal{K}_0(\lambda)$ (см. Замечание к лемме 2.2), (ii) $\mathcal{K}_0(\lambda)$ замкнуто в силу непрерывности функции прибыли по (y,n). Чтобы установить компактность $\mathcal{K}_0(\lambda)$, остается показать его ограниченность. Для этого мы покажем, что $\mathcal{K}_0(\lambda)$ содержится в некотором ограниченном множестве.

Обозначим $\sup u'(x)x$ через S и определим множество $\mathcal{K}(\lambda)\subset\mathbb{R}^2_+$ следующим образом:

$$\mathcal{K}(\lambda) = \left\{(y,n)\in\mathbb{R}^2_+ \,|\, n \le \bar{n}(\lambda),\, y \le \bar{y}(\lambda)\right\},$$

где

$$\bar{n}(\lambda) = \left(\frac{LS}{\lambda}\right)^{1/(\beta-1)}, \quad \bar{y}(\lambda) = \max_{n\ge 0}\left[\frac{LS}{\lambda}n - n^\beta\right].$$

Очевидно, что $\mathcal{K}(\lambda)$ – ограниченное множество (точнее говоря, это прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат). Используя представление (2.8) для функции прибыли π, непосредственной проверкой убеждаемся, что если $(y,n)\notin\mathcal{K}(\lambda)$, то $\pi(y,n) < -F$. Следовательно, $\mathcal{K}_0(\lambda)\subset\mathcal{K}(\lambda)$, и поэтому $\mathcal{K}_0(\lambda)$ – ограниченное множество. Значит, $\mathcal{K}_0(\lambda)$ компактно, и первая часть леммы доказана.

Для доказательства второй части леммы заметим, что функция

$$\pi^*(\lambda) \equiv \max_{(y,n)\in\mathbb{R}^2_+} \pi(y,n,\lambda)$$

непрерывна и не возрастает по λ. Кроме того, $\pi^*(0) = \infty$, и $\pi^*(\lambda)$ строго убывает по λ для тех значений λ, для которых $\pi^*(\lambda) > -F$. Наконец, $\pi^*(\infty) = -F$. По теореме о промежуточном значении, найдется ровно одно такое значение λ_0, при котором $\pi^*(\lambda_0) = 0$. Вторая часть леммы доказана.

Чтобы доказать третью часть леммы, отметим, что $\pi(0,0) = -F$, в то время как $\pi^*(\lambda_0) = 0$. Поэтому достаточно проверить, что никакая точка границы $\mathbb{R}^2_+$, кроме точки $(0,0)$, не может быть точкой максимума прибыли π ни при каком значении $\lambda > 0$. Покажем это.

Из вогнутости функции полезности u и теоремы Лагранжа о среднем значении непосредственно следует, что

$$\lim_{x\to 0} xu'(x) = 0.$$

В силу этого из формулы (2.8) легко видеть, что если $y = 0 < n$, то уменьшение n приведет к увеличению π. Если же $n = 0 < y$, то можно увеличить прибыль путем малого увеличения n, так как $\beta > 1$. Таким образом, ни одна точка границы $\mathbb{R}^2_+$, кроме точки $(0,0)$, не может являться точкой максимума π ни при каком положительном λ. Лемма 2.2 доказана.

Приложение 3: завершение доказательства предложения 3.1.

Чтобы доказать единственность решения системы (3.4)–(3.5), введем обозначение:

$$\varphi(x) = \frac{1 - r_u(x)}{r_u(x)}.$$

Из предположения о том, что $r_u(x)$ – строго возрастающая функция, следует, что φ – строго убывающая функция. В частности, она имеет обратную функцию φ^{-1}, которая также является строго убывающей.

Сделаем следующую замену переменных:

$$y^\alpha = A, \quad \frac{y^\alpha}{n^\beta} = B.$$

Тогда уравнения (3.4)–(3.5) элементарными преобразованиями приводятся к виду:

$$A = \phi(B), \tag{6.7}$$

$$A = \psi(B), \tag{6.8}$$

где

$$\phi(B) = \frac{FB}{(\beta - 1) - (1 - \alpha)B},$$
$$\psi(B) = \left[\frac{L}{B^{\frac{1}{\beta}}}\, \varphi^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}B\right)\right]^{\frac{\alpha\beta}{(\beta-\alpha)}}. \tag{6.9}$$

Так как $\beta > 1 > \alpha > 0$, функция $\phi(B)$ в правой части уравнения (6.7) непрерывна и неограниченно возрастает по B на промежутке $(0,\ (\beta - 1)/(1 - \alpha))$, а также имеет вертикальную асимптоту $B = (\beta - 1)/(1 - \alpha)$. С другой стороны, так как функция φ^{-1} положительная и убывающая, функция $\psi(B)$ в правой части уравнения (6.8) также является положительной и убывающей. Отсюда вытекает, что если решение системы (6.7) – (6.8) существует, то оно единственно. Однако существование непосредственно следует из леммы 2.2. Тем самым, единственность установлена.

Замечание. Отметим, что существование решения системы (6.7)–(6.8) непосредственно очевидно в случае, когда функция $\psi(B)$ определена на всем промежутке $(0,\ (\beta - 1)/(1 - \alpha))$. Для многих функций полезности (например, приведенных выше примеров CARA, HARA и квадратичной полезности) это действительно так, поскольку соответствующая эластичность обратного спроса принимает все возможные значения от 0 до 1. В общем случае, однако, это не так.

Приложение 4: доказательство леммы 4.1.

Обозначим решение системы (6.7)–(6.8) при заданном размере рынка L посредством $A^*(L),\ B^*(L)$. Из (6.9) легко видеть, что размер рынка L не входит в уравнение (6.7) и входит только в качестве коэффициента в правую часть уравнения (6.8). Отсюда следует, что кривая на плоскости (B, A), определяемая уравнением (6.7), не изменяет своего положения при изменении L, тогда как кривая, задаваемая уравнением (6.8), с ростом L смещается вверх, причем неограниченно. Тем самым,

$$\lim B^*(L) = \frac{\beta - 1}{1 - \alpha}.$$

Полагая $k = (\beta - 1)/(1 - \alpha)$ и учитывая, что $B = y^\alpha / n^\beta$, приходим к формуле (4.1). Лемма 4.1 доказана.

THE IMPACT OF MARKET SIZE ON MULTI-PRODUCT FIRMS' CONCENTRATION IN A MONOPOLISTIC COMPETITION MODEL

Pavel S. Molchanov, NRU Higher School of Economics (MrMPS1992@gmail.com).
Philip A. Ushchev, NRU Higher School of Economics, Cand.Sc. (ph.ushchev@gmail.com).

Abstract: We propose a model of monopolistic copmpetition with multi-product firms, non-convex costs and variable elasticity of substitution. We study the impact of market size on industrial concentration of firms. The main result is a full characterization of asymptotic behavior of equilibrium number of firms and level of concentration when the market size unboundedly increases. It is shown that the interaction between economies of scale and economies of scope is a key-factor for the tendency to increasing firms' concentration on growing markets, which is empirically observed in many industries. We also study the impact of technological shocks on industrial concentration by means of simulations.

Keywords: industrial concentration, multi-product firms, monopolistic competition.