

УДК 519.83

ББК 22.1

ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ ЗАЩИТЕ ОБЪЕКТА*

ВЛАДИМИР В. МОРОЗОВ

КАМИЛЬ Д. ШАЛБУЗОВ

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский университет имени М.В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, 2-й учебный корпус

e-mail: vmorosov@mail.ru, kamil.shalbuzov@gmail.com

Рассматривается антагонистическая игра нападения против защиты, осуществляющей охрану объекта. Каждая сторона может использовать несколько видов средств, количества которых ограничено бюджетом стороны. Выигрышем нападения является вероятность преодоления стратегией нападения стратегии защиты. Формулируются условия существования решения игры. Обсуждаются вопросы поиска максиминных и минимаксных стратегий.

Ключевые слова: антагонистическая игра, защита объекта, распределение ресурсов.

1. Введение

Играм с распределением ресурсов типа «нападение-защита» посвящена обширная литература (см. библиографию в [10, 11]). Отметим модель Гросса [9] и ее модификацию Гермейера [5], а также книги [7, 8]. В последнее время интерес к таким играм значительно возрос в связи с разработками моделей защиты объектов (см., например, [3, 13]). В данной работе рассматривается игровая модель, в которой

обе стороны могут использовать одновременно несколько средств. Средства предполагаются бесконечно делимыми. Нападение и защита располагают фиксированными денежными суммами на их приобретение. Вероятность преодоления некоторым средством нападения некоторого средства защиты задается Z -образной функцией, часто используемой в моделях исследования операций [6]. Выигрыш нападения равен вероятности преодоления каждого средства защиты хотя бы одним средством нападения.

Целью статьи является формулировка условий существования решений игры в чистых и смешанных стратегиях, а также обсуждение методов поиска максиминных и минимаксных стратегий. В отличие от модели Гросса показано, что защите иногда целесообразно использовать смешанные стратегии.

2. Постановка задачи

Пусть имеется m средств нападения и n средств защиты. Введем обозначения:

- a_i, b_j – стоимости единицы i -го средства нападения и j -го средства защиты, $a_i, b_j > 0$, $i \in I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\}$, $j \in J \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, n\}$;
- A и B – количества денежных средств у нападения и защиты;
- x_i, y_j – количество денег, выделяемых для приобретения x_i/a_i средств нападения i -вида и y_j/b_j средств защиты j -го вида;
- p_{ij} – вероятность преодоления одним i -м средством нападения одного j -го средства защиты, $p_{ij} \in [0, 1]$.

Стратегии нападения $x = (x_1, \dots, x_m)$ и защиты $y = (y_1, \dots, y_n)$ принадлежат множествам

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{i \in I} x_i = A \right\} \text{ и } Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j \in J} y_j = B \right\}.$$

Пусть $P_{ij}(x_i, y_j)$ – вероятность преодоления i -м средством нападения в количестве x_i/a_i j -го средства защиты в количестве y_j/b_j . Следуя [12], положим $P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - (1 - p_{ij})^{x_i/a_i})^{y_j/b_j}$, если $x_i, y_j > 0$. Будем говорить, что стратегия нападения x преодолела стратегию защиты y , если каждое средство защиты преодолевается некоторым средством нападения. Вероятность этого события обозначим через $F(x, y)$ и примем за функцию выигрыша нападения. Таким образом,

определена антагонистическая игра

$$\Gamma = \left\langle X, Y, F(x, y) = \prod_{j \in J(y)} (1 - \prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, y_j))) \right\rangle,$$

где $I(x) = \{i \in I \mid x_i > 0\}$, $J(y) = \{j \in J \mid y_j > 0\}$.

В разделе 3 изучаются свойства Z -образных функций. В разделе 4 указаны достаточные условия существования решения в чистых стратегиях игры Γ . В разделе 5 строятся оптимальные смешанные стратегии игроков, рандомизирующие выбор крайних точек множеств стратегий X и Y . В разделе 6 обсуждаются условия доминирования и метод возможных направлений (МВН) для нахождения верхнего и нижнего значений игры, а также максиминных и минимаксных стратегий.

3. Свойства Z -образных функций

Определение 3.1. Убывающую функцию $f(z)$, определенную на полупрямой \mathbb{R}_+ , будем называть Z -образной, если $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

Определим на \mathbb{R}_+ семейство Z -образных функций

$$f_{\alpha\beta}(z) = 1 - (1 - \alpha^z)(1 - \beta^z) = \alpha^z + \beta^z - (\alpha\beta)^z,$$

зависящих от параметров $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Нетрудно видеть, что функция $f_{\alpha\beta}$ убывает, а при любом фиксированном $z > 0$ выражение $f_{\alpha\beta}(z)$ возрастает по параметрам α и β .

Теорема 3.1. При $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$ уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет не более одного положительного корня. Если, к тому же, $\gamma \geq \alpha$, $\delta \geq \beta$ (или $\gamma \leq \alpha$, $\delta \leq \beta$), то уравнение не имеет положительных корней.

Доказательство. Второе утверждение теоремы вытекает из монотонности выражения $f_{\alpha\beta}(z)$ по параметрам α и β при любом фиксированном $z > 0$.

Докажем первое утверждение, предполагая без потери общности, что $\alpha < \gamma \leq \delta < \beta$. Отсюда следует, что при достаточно больших z выполнено неравенство $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$.

Предположим, что $\alpha\beta \geq \gamma\delta$. Определим при фиксированных α, β и $z > 0$ функцию преобразования параметров $\zeta(c) = f_{\alpha c, \beta/c}(z) = (\alpha c)^z + (\beta/c)^z - (\alpha\beta)^z$, $c \geq 1$. Эта функция достигает минимума в точке $c^* = \sqrt{\beta/\alpha}$. Из неравенства $\alpha\beta \geq \gamma\delta$, следует что $1 < c_1 \stackrel{def}{=} \gamma/\alpha \leq \sqrt{\gamma\delta}/\alpha \leq c^*$ и $\zeta(1) = f_{\alpha\beta}(z) > \zeta(c_1) = f_{\gamma, \beta\alpha/\gamma}(z)$, где $\beta\alpha/\gamma \geq \delta$. Поэтому функция $\zeta(c)$ убывает на отрезке $[1, c_1]$ и $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma, \beta\alpha/\gamma}(z) \geq f_{\gamma\delta}(z)$ при $z > 0$. Таким образом, если $\alpha\beta \geq \gamma\delta$, то уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ не имеет положительных корней.

Рассмотрим теперь случай $\alpha\beta < \gamma\delta$. Покажем, что уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет на \mathbb{R}_+ конечное число корней. Действительно, функция $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость. Поэтому множество ее нулей не может иметь предельную точку.

Предположим, что первое утверждение теоремы не выполнено, т.е. уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет на \mathbb{R}_+ по меньшей мере три корня (включая 0). Пусть z_0 – один из таких корней. Подставим $(\alpha\beta)^{z_0} = \alpha^{z_0} + \beta^{z_0} - \gamma^{z_0} - \delta^{z_0} + (\gamma\delta)^{z_0}$ в выражение для $f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0)$. В результате получим

$$f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) = \ln(\alpha)\alpha^{z_0} + \ln(\beta)\beta^{z_0} -$$

$$- \ln(\alpha\beta)[\alpha^{z_0} + \beta^{z_0} - \gamma^{z_0} - \delta^{z_0} + (\gamma\delta)^{z_0}] - \ln(\gamma)\gamma^{z_0} - \ln(\delta)\delta^{z_0} + \ln(\gamma\delta)(\gamma\delta)^{z_0}.$$

Определим на \mathbb{R}_+ функцию $q(z)$, равную правой части последнего равенства после замены z_0 на z . Заметим, что $f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) = q(z_0)$.

Лемма 3.1. *Найдется такое малое число $\varepsilon_1 > 0$, что на интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ функции $q(z)$ и $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ имеют одинаковые знаки.*

Доказательство. Если $q(z_0) = f'_{\alpha\beta}(z_0) - f'_{\gamma\delta}(z_0) \neq 0$, то утверждение леммы обосновать нетрудно. В самом деле, пусть, например, $q(z_0) > 0$. Тогда в достаточно малом интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ справедливы неравенства $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z) > 0$ и $q(z) > 0$. Предположим теперь, что $q(z_0) = 0$ и на некотором интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 > 0$, разность

$$f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z) = \alpha^z + \beta^z - (\alpha\beta)^z - \gamma^z - \delta^z + (\gamma\delta)^z > 0.$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2)$, что на интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_1)$ разность производных $f'_{\alpha\beta}(z) - f'_{\gamma\delta}(z) > 0$. Но на этом интервале

$$q(z) = \ln(\alpha)\alpha^z + \ln(\beta)\beta^z - \ln(\alpha\beta)[\alpha^z + \beta^z - \gamma^z - \delta^z + (\gamma\delta)^z] - \\ - \ln(\gamma)\gamma^z - \ln(\delta)\delta^z + \ln(\gamma\delta)(\gamma\delta)^z > f'_{\alpha\beta}(z) - f'_{\gamma\delta}(z) > 0.$$

Аналогично разбирается случай, когда $q(z_0) = 0$ и на некотором интервале $(z_0, z_0 + \varepsilon_2)$ разность $f_{\alpha\beta}(z) - f_{\gamma\delta}(z)$ отрицательна. \square

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 3.1 вытекает, что для любых случаев расположения графиков функций $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\gamma\delta}$ уравнение $q(z) = 0$ имеет по меньшей мере три корня (см. рис. 1). Отметим, что возможные точки касания этих графиков (например, $z = 0$) являются корнями уравнения $q(z) = 0$.

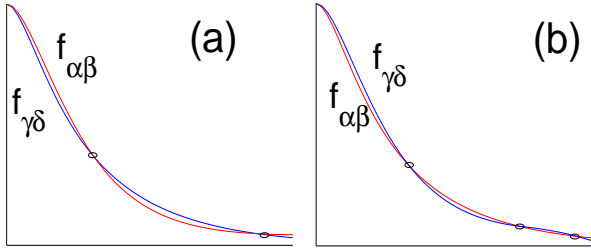


Рисунок 1. Два варианта взаимного расположения графиков функций $f_{\alpha\beta}$ и $f_{\gamma\delta}$.

Запишем $q(z)/\gamma^z$ в виде

$$\frac{q(z)}{\gamma^z} = (\ln(\alpha) - \ln(\alpha\beta))\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^z + (\ln(\beta) - \ln(\alpha\beta))\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^z + \\ + (\ln(\gamma\delta) - \ln(\alpha\beta))\delta^z + (\ln(\alpha\beta) - \ln(\delta))\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^z + \ln(\alpha\beta) - \ln(\gamma).$$

Первые три слагаемых правой части положительные. Поэтому при $\gamma = \delta$ функция $q(z)/\gamma^z$ строго выпуклая и не может иметь более двух нулей (противоречие). Если $\gamma < \delta$, то противоречие получим после замены $z = t/\ln(\delta/\gamma)$, поскольку правая часть последнего равенства преобразуется в строго выпуклую функцию переменной t . \square

Определим на интервале $(0, \infty)$ более общие функции

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z) = 1 - \prod_{i \in I} (1 - \alpha_i^z),$$

зависящие от параметров $\alpha_i \in [0, 1]$, $i \in I$, $m \geq 2$.

Лемма 3.2. *При любых $0 < z_1 < z_2$ справедливо неравенство*

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_2}(z_1) \geq f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_1}(z_2). \quad (3.1)$$

Доказательство. Если некоторый параметр $\alpha_i = 1$, то обе части неравенства (3.1) равны 1. Если некоторые $\alpha_i = 0$, то в формуле для $f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z)$ будет фигурировать произведение сомножителей, соответствующих положительным α_i . Поэтому без потери общности предположим, что $\alpha_i \in (0, 1)$, $i \in I$. Применим метод математической индукции. Возьмем $m = 2$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и докажем неравенство $f_{\alpha\beta}^{z_2}(z_1) > f_{\alpha\beta}^{z_1}(z_2)$ или

$$\alpha^{z_1} > -\beta^{z_1} + (\alpha\beta)^{z_1} + (\alpha^{z_2} + \beta^{z_2} - (\alpha\beta)^{z_2})^{z_1/z_2}.$$

Пусть $\alpha < \beta$. Разделим обе части неравенства на α^{z_1} и сделаем замену $z_1 = \ln t / \ln(\beta/\alpha)$. В результате получим

$$1 > -t + t^{\ln \beta / \ln(\beta/\alpha)} + t^{\ln(1 + (\beta/\alpha)^{z_2} - \beta^{z_2}) / (z_2 \ln(\beta/\alpha))}.$$

Правая часть неравенства является выпуклой по t функцией, поскольку один показатель степени отрицателен, а два других не меньше 1. Она принимает значение 1 в точках $t = 1$ и $t = (\beta/\alpha)^{z_2}$. Тем самым, последнее неравенство выполнено. Если $\alpha = \beta$, то неравенство $f_{\alpha\alpha}^{z_2}(z_1) > f_{\alpha\alpha}^{z_1}(z_2)$ эквивалентно неравенству $2 - \alpha^{z_1} > (2 - \alpha^{z_2})^{z_1/z_2}$, в котором правая часть убывает по z_2 при фиксированном z_1 . Итак, в случае $m = 2$ неравенство (3.1) доказано.

Пусть $m > 2$. Сделаем индуктивное предположение, что справедливо неравенство $f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}^{z_2}(z_1) \geq f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}^{z_1}(z_2)$. Определим число $\tau = f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}^{1/z_1}(z_1)$. По индуктивному предположению $\tau^{z_2} \geq f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_2)$. Отсюда, используя тождество $1 - f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z) = (1 - \alpha_1^z) \cdots (1 - \alpha_{m-1}^z)$, получим

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_2}(z_1) = f_{\tau \alpha_m}^{z_2}(z_1) \geq f_{\tau \alpha_m}^{z_1}(z_2) = (1 - (1 - \tau^{z_2})(1 - \alpha_m^{z_2}))^{z_1} \geq$$

$$\geq (1 - (1 - f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_2))(1 - \alpha_m^{z_2}))^{z_1} = f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{z_1}(z_2).$$

□

Теорема 3.2. Пусть $\alpha_i, \beta_i \in [0, 1]$, $i \in I$. Тогда при любых $z_1, z_2 > 0$ справедливо неравенство

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1) f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_2) \geq \min[f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1 + z_2), f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_1 + z_2)]. \quad (3.2)$$

Доказательство. Без потери общности предположим, что параметры $\alpha_i, \beta_i \in (0, 1)$, $i \in I$. Сначала докажем, что при любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, 1)$ и $z_1, z_2 > 0$ выполнено неравенство

$$f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) > \min[f_{\alpha\beta}(z_1 + z_2), f_{\gamma\delta}(z_1 + z_2)]. \quad (3.3)$$

Пусть $\alpha \leq \beta$ и $\gamma \leq \delta$. Если $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$, то неравенство (3.3) следует из тождества

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\alpha\beta}(z_2) &= f_{\alpha\beta}(z_1 + z_2) + \\ &+ (\alpha^{z_2} - \alpha^{z_1+z_2})(\beta^{z_1} - \beta^{z_1+z_2}) + (\alpha^{z_1} - \alpha^{z_1+z_2})(\beta^{z_2} - \beta^{z_1+z_2}), \end{aligned}$$

где последние два слагаемые положительны.

Если $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$, то, пользуясь монотонностью по параметрам, получим $f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) \geq f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\alpha\beta}(z_2) \geq f_{\alpha\beta}(z_1 + z_2)$. Аналогично разбирается случай $\alpha \geq \gamma$, $\beta \geq \delta$.

Без потери общности будем считать, что $\alpha < \gamma \leq \delta < \beta$. Пусть $\alpha\beta \geq \gamma\delta$. При доказательстве теоремы 3.1 было показано, что $f_{\alpha\beta}(z_1) > f_{\gamma\delta}(z_1)$. Поэтому $f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) > f_{\gamma\delta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) > f_{\gamma\delta}(z_1 + z_2)$.

Осталось разобрать случай $\alpha\beta < \gamma\delta$. Поскольку β больше остальных параметров, то при достаточно больших z $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$. Далее, $f'_{\alpha\beta}(0) = f'_{\gamma\delta}(0) = 0$, а $f''_{\alpha\beta}(0) = -2 \ln(\alpha\beta) > -2 \ln(\gamma\delta) = f''_{\gamma\delta}(0)$. Отсюда следует, что $f_{\alpha\beta}(z) > f_{\gamma\delta}(z)$ при малых $z > 0$. Если $f_{\alpha\beta}(z_1) < f_{\gamma\delta}(z_1)$, то уравнение $f_{\alpha\beta}(z) = f_{\gamma\delta}(z)$ имеет по меньшей мере два положительных корня, что противоречит теореме 3.1. Поэтому $f_{\alpha\beta}(z_1) \geq f_{\gamma\delta}(z_1)$ и $f_{\alpha\beta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) \geq f_{\gamma\delta}(z_1) f_{\gamma\delta}(z_2) > f_{\gamma\delta}(z_1 + z_2)$.

Итак, неравенство (3.2) доказано при $m = 2$. Завершим доказательство в общем случае. Пусть $z_1, z_2 > 0$. Определим следующие числа: $\alpha = f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}^{1/z_1}(z_1)$, $\beta = f_{\beta_1 \dots \beta_{m-1}}^{1/z_2}(z_2)$. Тогда по лемме 3.2

$$\alpha^{z_1+z_2} \geq f_{\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}}(z_1 + z_2), \quad \beta^{z_1+z_2} \geq f_{\beta_1 \dots \beta_{m-1}}(z_1 + z_2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1) f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_2) &= f_{\alpha, \alpha_m}(z_1) f_{\beta, \beta_m}(z_2) \geq \\ &\geq \min[f_{\alpha, \alpha_m}(z_1 + z_2), f_{\beta, \beta_m}(z_1 + z_2)] \geq \min[f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(z_1 + z_2), f_{\beta_1 \dots \beta_m}(z_1 + z_2)]. \end{aligned}$$

□

Следствие 3.1. Пусть $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, $i \in I$, $j \in J$. Тогда для любых $z_j > 0$, $j \in J$, справедливо неравенство

$$\prod_{j \in J} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(z_j) \geq \min_{j \in J} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(z_1 + \dots + z_n). \quad (3.4)$$

4. Решение игры в чистых стратегиях

Напомним необходимые определения (см., например, [1, 2]).

Определение 4.1. Тройка (x^0, y^0, v) называется решением игры Γ в чистых стратегиях, если (x^0, y^0) – седловая точка функции $F(x, y)$ на $X \times Y$: $F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0) = v \leq F(x^0, y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. При этом v называется значением игры Γ , а x^0, y^0 – оптимальными стратегиями.

Определение 4.2. Стратегии x^0, y^0 называются соответственно максиминной и минимаксной, а \underline{v} и \bar{v} – нижним и верхним значениями игры Γ , если

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) = \inf_{y \in Y} F(x^0, y), \quad \bar{v} = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y) = \sup_{x \in X} F(x, y^0).$$

Для того чтобы игра Γ имела решение в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{v} = \bar{v}$ [1, 2].

Перейдем к вопросу существования решения игры Γ в чистых стратегиях. Для каждого j определим стратегию защиты $y^{(j)}$, для которой $y_j^{(j)} = B$, $y_k^{(j)} = 0$, $k \neq j$. Она состоит в использовании только j -го средства. Аналогично определяются стратегии нападения $x^{(i)}$, $i \in I$. Положим $\lambda_{ij} = (1 - p_{ij})^{1/a_i}$, $i \in I$, $j \in J$. Тогда $P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j/b_j}$, если $x_i, y_j > 0$.

Лемма 4.1. Пусть при некоторых i и j вероятность $p_{ij} \in (0, 1)$. При любом фиксированном $y_j > 0$ функция $\ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j))$ переменной x_i строго выпукла на \mathbb{R}_+ , если $y_j \in (0, b_j)$, строго вогнута, если $y_j > b_j$, и линейна, если $y_j = b_j$.

Доказательство. Вторая производная $(\ln(1 - P_{ij}(x_i, y_j)))''_{x_i x_i}$ равна

$$\frac{y_j \lambda_{ij}^{x_i} \ln^2(\lambda_{ij})(1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j/b_j - 2} [1 - (y_j/b_j) \lambda_{ij}^{x_i} - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j/b_j}]}{b_j (1 - P_{ij}(x_i, y_j))^2}.$$

Она положительна, если $y_j \in (0, b_j)$, отрицательна, если $y_j > b_j$, и равна нулю, если $y_j = b_j$. \square

Предложение 4.1. *Для любой стратегии нападения $x \in X$*

$$\min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{j \in J} F(x, y^{(j)}). \quad (4.1)$$

Пусть при некотором $j \in J$ выполнено условие $B \geq b_j$. Тогда

$$\max_{x \in X} F(x, y^{(j)}) = \max_{i \in I} F(x^{(i)}, y^{(j)}). \quad (4.2)$$

Доказательство. Докажем равенство (4.1). Без потери общности можно считать, что все компоненты вектора x положительны. Обозначим $\alpha_{ij} = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{1/b_j}$. Тогда $P_{ij}(x_i, y_j) = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{y_j/b_j} = \alpha_{ij}^{y_j}$, если $y_j > 0$. Из (3.4) следует, что для любой стратегии $y \in Y$

$$F(x, y) = \prod_{j \in J(y)} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(y_j) \geq \min_{j \in J(y)} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(B) \geq \min_{j \in J} F(x, y^{(j)}).$$

Отсюда

$$\min_{y \in Y} F(x, y) \geq \min_{j \in J} F(x, y^{(j)}),$$

что доказывает равенство (4.1). Докажем теперь равенство (4.2). Вначале покажем, что для любой стратегии $x \in X$

$$\prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, B)) \geq \min_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(A, B)). \quad (4.3)$$

Действительно, без потери общности пусть $\lambda_{ij} \in (0, 1)$, $i \in I(x)$. По лемме 4.1 функция $g_j(x') = \sum_{i \in I(x)} \ln(1 - P_{ij}(x'_i, y_j))$ вогнута на множестве $X' = \{x' \in X \mid x'_i = 0, \text{ если } i \notin I(x)\}$. Она достигает минимума в одной из крайних точек $x^{(i)}$, $i \in I(x)$, множества X' [1, 4]. Тем самым, неравенство (4.3) доказано. Из него вытекает, что для любой стратегии $x \in X$

$$F(x, y^{(j)}) = 1 - \prod_{i \in I(x)} (1 - P_{ij}(x_i, B)) \leq \max_{i \in I} P_{ij}(A, B) = \max_{i \in I} F(x^{(i)}, y^{(j)}).$$

Отсюда следует равенство (4.2). \square

Приведем достаточные условия существования решения игры Γ в чистых стратегиях. Пусть Γ' – игра с $m \times n$ -матрицей $(F(x^{(i)}, y^{(j)}))$.

Теорема 4.1. *Если матричная игра Γ' имеет решение в чистых стратегиях $(x^{(i_0)}, y^{(j_0)}, v)$ и $B \geq b_j, j \in J$, то $(x^{(i_0)}, y^{(j_0)}, v)$ является решением и исходной игры Γ .*

Доказательство. Используя равенства (4.1) и (4.2), получим

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \max_{x \in X} \min_{j \in J} F(x, y^{(j)}) \geq \underline{v}' \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in I} \min_{j \in J} F(x^{(i)}, y^{(j)}) = \\ &= \bar{v}' \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j \in J} \max_{i \in I} F(x^{(i)}, y^{(j)}) = \min_{j \in J} \max_{x \in X} F(x, y^{(j)}) \geq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y) = \bar{v}. \end{aligned}$$

Поскольку всегда $\underline{v} \leq \bar{v}$, последние неравенства могут выполняться только как равенства. \square

Как показывает следующий пример, условия теоремы 4.1 не являются необходимыми для существования решения игры Γ в чистых стратегиях.

Пример 4.1. Пусть $m = n$, а (p_{ij}) – диагональная матрица с элементами на диагонали $p_i \in (0, 1), i \in I$. Тем самым, i -е средство нападения способно преодолеть только соответствующее i -е средство защиты. Тогда $\lambda_{ij} = 1, i \neq j$ и $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{ii} \in (0, 1)$. Найдем решение игры Γ в чистых стратегиях. Если стратегия нападения x содержит i -ю нулевую компоненты, то она полностью нейтрализуется стратегией защиты y с $y_i > 0$. Поэтому максиминная стратегия x^0 должна содержать только положительные компоненты. Эта стратегия максимизирует функцию

$$\min_{i \in I} F(x, y^{(i)}) = \min_{i \in I} (1 - \lambda_i^{x_i})^{B/b_i}.$$

В соответствии с принципом уравнивания [1, теорема 9.1] стратегия x^0 и нижнее значение \underline{v} удовлетворяют системе уравнений

$$(1 - \lambda_i^{x_i})^{B/b_i} = \underline{v}, i \in I, \sum_{i \in I} x_i = A. \quad (4.4)$$

Отсюда сначала \underline{v} находится из уравнения

$$\sum_{i \in I} \frac{\ln(1 - \underline{v}^{b_i/B})}{\ln(\lambda_i)} = A, \text{ а затем } x_i^0 = \frac{\ln(1 - \underline{v}^{b_i/B})}{\ln(\lambda_i)}, i \in I.$$

Заметим, что найденная максиминная стратегия x^0 является выравнивающей, т.е. $F(x^0, y) = \prod_{i \in I} (1 - \lambda_i^{x_i^0})^{y_i/b_i} = \underline{v}$ для любой стратегии $y \in Y$.

Покажем, что $\bar{v} = \underline{v}$. Пусть вектор y имеет положительные компоненты. Для максимизации по x функции $F(x, y)$ достаточно найти

$$\max_{x \in X} \ln(F(x, y)) = \max_{x \in X} \ln \left(\prod_{i \in I} (1 - \lambda_i^{x_i})^{y_i/b_i} \right) = \max_{x \in X} \sum_{i \in I} \frac{y_i}{b_i} \ln(1 - \lambda_i^{x_i}).$$

Функция $\ln(F(x, y))$ строго вогнута по x и сепарабельна. По лемме Гиббса [1, лемма 9.1] максимизирующее x удовлетворяет условиям

$$(\ln(F(x, y)))'_{x_i} = -y_i \frac{\ln(\lambda_i)}{b_i} \cdot \frac{\lambda_i^{x_i}}{1 - \lambda_i^{x_i}} = C, \quad i \in I, \quad \sum_{i \in I} x_i = A, \quad (4.5)$$

представляющим собой систему уравнений относительно неизвестных x_1, \dots, x_n, C . Определим следующую стратегию защиты:

$$y_i^0 = \frac{C}{\mu_i}, \quad \text{где } C = B \left(\sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1}, \quad \mu_i = -\frac{\ln(\lambda_i)}{b_i} \cdot \frac{1 - \underline{v}^{b_i/B}}{\underline{v}^{b_i/B}}, \quad i \in I.$$

Подставляя в систему (4.5) y^0 и соответствующее значение C , получим систему относительно переменных $x_1, \dots, x_n, \underline{v}$, эквивалентную системе (4.4). Следовательно, x^0 максимизирует $F(x, y^0)$ на множестве X и $F(x^0, y^0) = \underline{v}$. Отсюда $\bar{v} = \underline{v}$, а x^0, y^0 – оптимальные стратегии. Заметим, что в данном примере матричная игра Γ' не имеет решения в чистых стратегиях.

5. Использование смешанных стратегий

Далее будем предполагать, что $p_{ij} \in (0, 1)$, $i \in I$, $j \in J$. В этом случае функция $F(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$.

Будем рассматривать смешанные стратегии игроков, осуществляющие случайный выбор крайних точек множеств X и Y . Пусть $\varphi = (\varphi_i, i \in I)$ – смешанная стратегия нападения, где φ_i – вероятность выбора чистой стратегии $x^{(i)}$. Аналогично определяется смешанная стратегия защиты $\psi = (\psi_j, j \in J)$ – вероятностное распределение на точках $y^{(j)}$, $j \in J$. Множества всех смешанных стратегий нападения и защиты указанных видов обозначим соответственно Φ и Ψ . Определим величины $\hat{v}, \underline{w}, \bar{w}$ и стратегии $\hat{y}, \varphi^0, \psi^0$:

$$\hat{v} = \min_{y \in Y} \max_{i \in I} F(x^{(i)}, y) = \max_{i \in I} F(x^{(i)}, \hat{y}), \quad \underline{w} = \max_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) =$$

$$= \min_{y \in Y} F(\varphi^0, y), \quad \bar{w} = \min_{\psi \in \Psi} \max_{x \in X} F(x, \psi) = \max_{x \in X} F(x, \psi^0),$$

где $F(\varphi, y) = \sum_{i \in I} \varphi_i F(x^{(i)}, y)$, $F(x, \psi) = \sum_{j \in J} \psi_j F(x, y^{(j)})$.

Предложение 5.1. 1) $\underline{w} = \hat{v}$. Если $\bar{v} = \hat{v}$, то $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$ – решение игры Γ в смешанных стратегиях.

2) Если $B \leq b_j$, $j \in J$, то $\bar{w} = \underline{v}$ и $(x^0, \psi^0, \underline{v})$ – решение игры Γ в смешанных стратегиях.

Доказательство. Поскольку $p_{ij} \in (0, 1)$, то и $\lambda_{ij} = (1 - p_{ij})^{1/a_i} \in (0, 1)$, $i \in I$, $j \in J$. Логарифм функции

$$F(x^{(i)}, y) = \prod_{j \in J(y)} (1 - \lambda_{ij}^A)^{y_j/b_j} = \prod_{j \in J} (1 - \lambda_{ij}^A)^{y_j/b_j}$$

линеен на множестве Y . Поэтому функция $F(x^{(i)}, y)$ выпукла на Y . Следовательно, функция $F(\varphi, y)$ линейна по φ и выпукла по y . По теореме фон Неймана (см., например, [1, теорема 6.3]) функция $F(\varphi, y)$ имеет седловую точку на произведении $\Phi \times Y$. Отсюда

$$\underline{w} = \max_{\varphi \in \Phi} \min_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min_{y \in Y} \max_{\varphi \in \Phi} F(\varphi, y) = \min_{y \in Y} \max_{i \in I} F(x^{(i)}, y) = \hat{v}.$$

При этом (φ^0, \hat{y}) – седловая точка функция $F(\varphi, y)$.

Пусть $B \leq b_j$, $j \in J$. Покажем, что при каждом $j \in J$ функция

$$F(x, y^{(j)}) = 1 - \prod_{i \in I(x)} (1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{B/b_j}) = 1 - \prod_{i \in I} (1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{B/b_j})$$

вогнута на множестве X . В самом деле, по лемме 4.1 логарифм функции $\prod_{i \in I} (1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{B/b_j})$ является выпуклым на множестве X . Следовательно, и сама функция $\prod_{i \in I} (1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{B/b_j})$ также выпукла, а функция $F(x, y^{(j)})$ вогнута на X . Отсюда функция $F(x, \psi)$ вогнута по x и линейна по ψ . По теореме фон Неймана функция $F(x, \psi)$ имеет седловую точку (x^0, ψ^0) на $X \times \Psi$ и $\bar{w} = \underline{v}$ – значение игры. \square

Замечание 5.1. Второе утверждение говорит о том, что при малом бюджете защита должна использовать только одно средство, рандомизируя его выбор.

Замечание 5.2. Для поиска стратегии \hat{y} требуется найти минимум выпуклой функции $\max_{i \in I} F(x^{(i)}, y)$ на множестве Y . Здесь целесообразно использовать МВП [4].

Замечание 5.3. Для нахождения смешанной стратегии φ^0 следует воспользоваться необходимыми и достаточными условиями для точки минимума \hat{y} выпуклой дифференцируемой функции $F(\varphi^0, y)$: найдется такая константа C , что $F'_{y_j}(\varphi^0, \hat{y}) = C$, если $\hat{y}_j > 0$, и $F'_{y_j}(\varphi^0, \hat{y}) \geq C$, если $\hat{y}_j = 0$.

6. Поиск максиминных и минимаксных стратегий

При поиске максиминных и минимаксных стратегий следует использовать соображения доминирования.

Предложение 6.1. Пусть l -я строка матрицы (p_{ij}) доминирует k -ю, т.е. $p_{lj} \geq p_{kj}$ $j \in J$, $l \neq k \in I$. Тогда

1) Если $B \geq b_j$, $j = 1, \dots, n$, то найдется максиминная стратегия нападения, не использующая k -е средство.

2) Если стратегия $y \in Y$ удовлетворяет неравенствам $y_j \geq b_j$, $j \in J$, то при нахождении $\max_{x \in X} F(x, y)$ нападение k -е средство может не использовать.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $d \geq 1$. Сначала проверим справедливость неравенства

$$(1 - (1 - \alpha)^d)(1 - (1 - \beta)^d) \geq 1 - (1 - \alpha\beta)^d. \quad (6.1)$$

Для этого достаточно доказать два неравенства

$$\frac{1 - (1 - \alpha)^d}{1 - (1 - \alpha\beta)^d} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{1 - (1 - \beta)^d}.$$

Первое следует из $\beta - 1 \geq (1 - \alpha\beta)^d(\beta - 1) \geq (1 - \alpha)^d\beta - (1 - \alpha\beta)^d$, а второе – из неравенства $d \geq 1$.

Из условия доминирования вытекает, что $\lambda_{lj} \leq \lambda_{kj}$, $j \in J$. Пусть $x^0 \in X$ – максиминная стратегия нападения, удовлетворяющая условию $x_k^0 > 0$. Определим стратегию x' со следующими компонентами:

$x'_l = x_l^0 + x_k^0$, $x'_k = 0$, $x'_i = x_i^0$, $i \neq l, k$. Используя неравенство (6.1) при $\alpha = \lambda_{lj}^{x_l^0}$, $\beta = \lambda_{lj}^{x_k^0}$, $d = B/b_j$, получим

$$\begin{aligned} (1 - (1 - \lambda_{lj}^{x_l^0})^{B/b_j})(1 - (1 - \lambda_{kj}^{x_k^0})^{B/b_j}) &\geq (1 - (1 - \lambda_{lj}^{x_l^0})^{B/b_j})(1 - (1 - \lambda_{lj}^{x_k^0})^{B/b_j}) \geq \\ &\geq 1 - (1 - \lambda_{lj}^{x_l^0 + x_k^0})^{B/b_j} = 1 - (1 - \lambda_{lj}^{x'_l})^{B/b_j}, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Отсюда вытекают неравенства $F(x', y^{(j)}) \geq F(x^0, y^{(j)})$, $j \in J$. Следовательно, x' – максиминная стратегия и первое утверждение доказано. Второе доказывается аналогично. \square

Предложение 6.2. Пусть l -й столбец матрицы (p_{ij}) доминируется ее k -м столбцом, т.е. $p_{ik} \geq p_{il}$, $i \in I$, $k \neq l \in J$. Кроме того, предположим, что $b_k \geq b_l$. Тогда

1) Найдется минимаксная стратегия защиты, не использующая k -е средство.

2) Для любой стратегии нападения $x \in X$ выполнено неравенство $F(x, y^{(k)}) \geq F(x, y^{(l)})$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Возьмем произвольную стратегию нападения $x \in X$ и положим $\alpha_{ij} = (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{1/b_j}$, $i \in I$, $j \in J$. Тогда

$$\alpha_{ik} = (1 - \lambda_{ik}^{x_i})^{1/b_k} \geq (1 - \lambda_{ik}^{x_i})^{1/b_l} \geq (1 - \lambda_{il}^{x_i})^{1/b_l} = \alpha_{il}, \quad i \in I.$$

Пусть $y^0 \in Y$ – минимаксная стратегия защиты, удовлетворяющая условию $y_k^0 > 0$. Определим стратегию y' со следующими компонентами: $y'_l = y_l^0 + y_k^0$, $y'_k = 0$, $y'_j = y_j^0$, $j \neq l, k$. Используя неравенство (3.2), получим

$$f_{\alpha_{1l} \dots \alpha_{ml}}(y_l^0) f_{\alpha_{1k} \dots \alpha_{mk}}(y_k^0) \geq f_{\alpha_{1l} \dots \alpha_{ml}}(y_l^0 + y_k^0) = f_{\alpha_{1l} \dots \alpha_{ml}}(y'_l).$$

Отсюда $F(x, y^0) = \prod_{j \in J} f_{\alpha_{1j} \dots \alpha_{mj}}(y_j^0) \geq F(x, y')$. Поскольку стратегия $x \in X$ произвольна, y' – минимаксная стратегия и первое утверждение доказано. Докажем второе утверждение:

$$F(x, y^{(k)}) = f_{\alpha_{1k} \dots \alpha_{mk}}(B) \geq f_{\alpha_{1l} \dots \alpha_{ml}}(B) = F(x, y^{(l)}), \quad x \in X.$$

\square

Перейдем к обсуждению методов поиска максиминных и минимаксных стратегий. Пользуясь (4.1), запишем нижнее значение игры в виде

$$\underline{v} = 1 - \min_{x \in X} \max_{j \in J} \prod_{i \in I} (1 - (1 - \lambda_{ij}^{x_i})^{B/b_j}) = 1 - \min_{x \in X} \max_{j \in J} \prod_{i \in I} (1 - P_{ij}(x_i, B)).$$

Введем функции $g_j(x) = \sum_{i \in I} \ln(1 - P_{ij}(x_i, B))$, $j \in J$. Поскольку монотонное преобразование целевой функции не меняет минимизирующие стратегии, для поиска максиминной стратегии x^0 достаточно решить задачу

$$\min_{x \in X} \max_{j \in J} g_j(x) = \max_{j \in J} g_j(x^0). \quad (6.2)$$

Обсудим применение МВН. Пусть $B \leq b_j$, $j \in J$. В этом случае по лемме 4.1 функция максимума в задаче (6.2) выпукла на множестве X и МВН найдет минимизирующую стратегию x^0 . Пусть множество $J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid B > b_j\}$ не пусто. Тогда функции $g_j(x)$, $j \in J_1$, строго вогнуты на множестве X и МВН найдет лишь точку локального минимума функции $\max_{j \in J} g_j(x)$. Поэтому минимизацию следует повторять, начиная из нескольких начальных точек. Укажем эти начальные точки. При $j \in J_1$ пусть \hat{x}^j – точка максимума функции $g_j(x)$ на множестве X . По лемме Гиббса она удовлетворяет системе уравнений $g'_{j x_i}(x) = C$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} x_i = A$. При этом вектор \hat{x}^j имеет положительные компоненты. Произведем симплицеальное разбиение множества X , т.е. разобьем его на симплексы размерности $m - 1$, имеющие попарно непересекающиеся внутренности и вершинами которых служат точки из множества $\{x^{(i)}, i \in I\} \cup \{\hat{x}^j, j \in J_1\}$. Для этого возьмем точку \hat{x}^1 и разобьем множество X на m симплексов, имеющих общую вершину в точке \hat{x}^1 . Если какой-нибудь из построенных симплексов содержит внутри точку \hat{x}^j , то разобьем его на m симплексов, имеющих общую вершину в точке \hat{x}^j и т.д. В качестве начальных точек для МВН следует взять центры построенных симплексов.

Поиск минимаксной стратегии y^0 можно осуществить методом, в котором используется производная по направлению $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ функции максимума $M(y) = \max_{x \in X} F(x, y)$:

$$M'_\nu(y) = \max_{x \in X(y)} \sum_{j=1}^n \nu_j F'_{y_j}(x, y), \quad X(y) = \text{Arg max}_{x \in X} F(x, y).$$

Дадим краткое описание метода. Пусть $y^1 \in Y$ – некоторая начальная точка. Множество $X(y^1)$ строится МВН по аналогии с применением этого метода для решения задачи (6.2). Выпуклая оболочка $\mathcal{L}(y^1)$ векторов $y^{(j)} - y^1$, $j \in J$, содержит возможные направления в точке y^1 для множества Y . После того, как множество $X(y^1)$ найдено, нужно решить задачу

$$l(y^1) \stackrel{def}{=} \min_{\nu \in \mathcal{L}(y^1)} M'_\nu(y^1) = M'_{\nu(y^1)}(y^1).$$

Если $l(y^1) = 0$, то y^1 – точка локального минимума функции $M(y)$. Если $l(y^1) < 0$, то необходимо, двигаясь по направлению $\nu(y^1)$ перейти в некоторую точку $y^2 \in Y$, такую, что $M(y^2) < M(y^1)$, и т.д. Выбор величины шага вдоль направления убывания и условия остановки можно взять те же, что и в МВН [4]. Отметим также, что при малых n минимаксную стратегию можно искать используя минимизацию по сетке, заданной на Y , сгущая сетку в окрестностях точек минимума. Этот метод используется в следующем примере.

Пример 6.1. Пусть $m = n = 3$, $A = B = 8$, $a_i = b_j = 1$, $i \in I$, $j \in J$,

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.2 + \varepsilon \\ 0.1 & 0.2 + \varepsilon & 0.3 \\ 0.2 + \varepsilon & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1. Результаты вычислений.

ε	0	0.04
\underline{v}	0.09	0.16
\hat{v}	0.13	0.15
\bar{v}	0.18	0.24
x^0	(6.06, 0.00, 1.94)	(5.74, 0.00, 2.26)
\hat{y}	(2.50, 2.67, 2.83)	(2.50, 2.70, 2.81)
y^0	(2.00, 2.25, 3.75)	(1.65, 2.45, 3.90)
\hat{x}^1	(0.78, 5.14, 2.08)	(0.82, 5.46, 1.72)
\hat{x}^2	(5.30, 2.14, 0.56)	(5.64, 1.77, 0.59)
\hat{x}^3	(1.98, 1.13, 4.89)	(1.63, 1.19, 5.18)

Заметим, что при $\varepsilon = 0.04$ выполнено неравенство $\hat{v} = \underline{w} < \underline{v}$, и нападению применять смешанные стратегии указанного вида не имеет смысла.

Авторы выражают благодарность доценту В.Ю. Решетову за обсуждение постановки задачи и рецензенту, отметившему ряд неточностей в доказательствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций*. М.: Издательский центр «Академия», 2008.
2. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики*. М.: МАКС-Пресс, 2005.
3. Васин А.А., Шумов В.В., Уразов А.С. *Об оптимальных стратегиях применения пограничных средств обнаружения*. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2011. № 2. С. 30–36.
4. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации*. М.: Факториал Пресс, 2002.
5. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций*. М.: Наука, 1971.
6. Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д. *Задачи и методы оптимального распределения ресурсов*. М.: Советское радио, 1968.
7. Давыдов Э.Г. *Исследование операций*. М.: Высшая школа, 1990.
8. Дрешер М. *Стратегические игры*. М.: Советское радио. 1964.
9. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике*. М.: Мир, 1964.
10. *Теория игр. Аннотированный указатель публикаций по 1968 г.* Под ред. проф. Н.Н. Воробьева. Л.: Наука, 1976.
11. *Теория игр. Аннотированный указатель публикаций отечественной и зарубежной литературы за 1969–1974 гг.* Под ред. проф. Н.Н. Воробьева. Л.: Наука, 1980.

12. Фейн У.У. *Роль связи в войне. Приложение теории игр к задачам военной связи.* В кн. [8] С. 246–259.
13. Nikoofal M.E., Zhuang J. *Robust Allocation of a Defensive Budget Considering an Attacker's Private Information.* Risk Analysis. 2012. V. 32. N 5. P. 930–943.

ZERO-SUM GAME OF RESOURCE ALLOCATION: ATTACKER AGAINST DEFENDER

Vladimir V. Morozov, Moscow State University, Cand.Sc.,
associated prof. (vmorosov@mail.ru).

Kamil D. Shalbuzov, Moscow State University, post-graduate
student (kamil.shalbuzov@gmail.com).

Abstract: The payoff of attacker is a probability of his strategy to overcome a defender's strategy. We derive the conditions of existence of pure and mixed solutions of the game. Method of feasible directions is considered for finding maximin and minimax strategies.

Keywords: zero-sum game, protection facility, resource allocation.