Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.4, с. 84–104

УДК 519.83
ББК 22.18

ДВУХСТУПЕНЧАТЫЕ СЕТЕВЫЕ ИГРЫ*

Леон А. Петросян[1]
Артем А. Седаков[2]
Анатолий О. Бочкарев[3]
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
– процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35
e-mail: [1]spbuoasis7@peterlink.ru, [2]a.sedakov@spbu.ru,
[3]sciencewrk@apmath.spbu.ru

В работе исследуются двухступенчатые сетевые игры, на первом шаге которых игроки формируют сеть, а на втором – выбирают стратегии с учетом сформированной сети. Рассматриваются как некооперативный вариант игры, так и кооперативный. В некооперативной постановке в качестве решения используется равновесие по Нэшу, в кооперативной – дележ – вектор Шепли. Показывается, что вектор Шепли не является динамически устойчивым (состоятельным во времени) решением.

Ключевые слова: сеть, равновесие, кооперация, характеристическая функция, дележ, динамическая устойчивость (состоятельность во времени).

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-91160-ГФЕН_а и СПбГУ в рамках проекта 9.38.77.2011.

1. Введение

В работе проводится исследование влияния связей между игроками на принятие решений о выборе стратегий. Взаимные связи отражают возможность влияния игроков друг на друга и определяются сетью. Процесс моделируется двухступенчатой сетевой игрой, в которой на первом этапе игры игроки формируют сеть, а на втором этапе игры игроки выбирают «поведение», определяющее их выигрыши. Такая сетевая игра рассматривается в стратегической форме и, следуя Куну [1], под стратегией игрока мы будем понимать правило, которое однозначно определяет выбор этого игрока как на первом, так и на втором этапах двухступенчатой игры (в зависимости от выбора игроков на первом этапе). Так под стратегией игрока на первом этапе мы будем понимать сужение стратегии этого игрока на первый этап игры, а под стратегией игрока на втором этапе – сужение его стратегии на второй этап. Предполагается, что выигрыш каждого игрока зависит только от стратегий на втором этапе, выбранных им и его непосредственными «соседями» в сформированной на первом этапе игры сети.

Подобная постановка, также моделируемая двухступенчатой сетевой игрой, рассматривалась в работах [8, 9]. В указанных работах на первом этапе игры игроками формируется сеть, а затем на втором этапе игры рассматривается одинаковая для всех игроков координационная игра (2×2).

Указанный подход базируется на работах, в которых отдельно изучаются как процессы формирования самой сети и ее изменения с течением игры, так и правила определения выигрышей и исследование различных принципов оптимальности в играх на фиксированной сети [6–8]. Например, в работе [6] в качестве решения сетевой игры в стратегической форме рассматривается сеть Нэша, кроме этого строится некоторый стохастический процесс эволюции сети, который сходится к «предельному» состоянию. В работе [5] динамика сети исследуется с точки зрения абсолютного равновесия, в предположении, что игроки имеют возможность пересматривать текущую сетевую структуру, но лишь во время своего «хода». С другой стороны, в работе [10] исследуются принципы оптимальности (в том числе и кооперативные) в сетевых играх безотносительно к вопросу формирования самой сети.

Стоит отметить, что в указанных постановках не делалось попыток исследовать динамическую устойчивость (состоятельность во времени) кооперативных решений в сетевых играх. Понятие динамической устойчивости изначально было представлено а работах [2, 3] для дифференциальных игр со многими участниками. Позднее был установлен факт, что многие кооперативные решения не являются динамически устойчивыми и в других классах игр. В работе будет показано, что даже в кооперативных двухступенчатых сетевых играх возникает проблема динамической неустойчивости кооперативных решений. В частности, вектор Шепли [11] не является динамически устойчивым (состоятельным во времени).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится формализация двухступенчатой сетевой игры: первого этапа – формирования сети игроками, и второго – выбора игроками стратегий на втором этапе и определение выигрышей игроков с учетом сформированной сети. В частности, в разделе 2.2 рассматриваются два варианта поведения игроков на втором этапе игры: некооперативное поведение, при котором стратегии на втором этапе выбираются независимо, и кооперативное поведение, при котором игроки совместно выбирают стратегии на втором этапе. В разделе 3 рассматривается кооперативный вариант двухступенчатой сетевой игры, в котором предполагается как совместное формирование сети игроками, так и совместный выбор стратегий на втором этапе игры с целью максимизации суммарного выигрыша игроков. Исследуется вопрос динамической устойчивости (состоятельности во времени) кооперативных решений.

2. Формализация двухступенчатой сетевой игры

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество игроков, которые могут взаимодействовать друг с другом. Взаимодействие между игроками подразумевает наличие между ними некой связи и, как следствие, коммуникацию. Отсутствие взаимодействия между игроками, наоборот, означает отсутствие между ними связи и возможности коммуникации. В рамках таких предположений, говорят, что кооперация игроков ограничена, а ограничением выступает структура взаимодействия, т.е. сеть, определяющая связи. Поэтому в подобных моделях оправдано применение теории сетевых игр, основным элементом которой является сеть. Под сетью понимается объект (N, g). Здесь N представляет собой множество узлов (совпадает со множеством игроков), а $g \in N \times N$ – конечное множество ребер. Если элемент $(i, j) \in g$, это означает, что между игроками i и j есть связь, порождающая коммуникацию этих игроков в сети. В дальнейшем, с целью упрощения обозначений, саму сеть будем отождествлять с множеством ребер и обозначать через g, а ребро (i, j) сети – просто как пару ij. Мы предполагаем, что $ij = ji$.

Рассмотрим двухшаговую игровую ситуацию: на первом этапе игроки выбирают партнеров (других игроков), с кем они готовы формировать связи, тем самым формируя сеть. На втором этапе с учетом сформировавшейся сети игроки выбирают стратегии, которые впоследствии определяют их выигрыши при уже сформированных на первом этапе связях. Рассмотрим более подробно каждый из этапов.

2.1. Первый этап: задача формирования связей

Для множества игроков N определим правило формирования связей стандартным образом: посредством одновременного выбора. Результатом такого выбора является сеть.

Пусть $M_i \subseteq N \setminus \{i\}$ – множество тех игроков, которым игрок $i \in N$ может предложить формирование связи, а величина $a_i \in \in \{0, \ldots, n-1\}$ представляет собой максимальное количество связей, который игрок i может поддерживать (а следовательно и предложить).

Стратегией игрока $i \in N$ на первом этапе называется n-мерный вектор $g_i = (g_{i1}, \ldots, g_{in})$, компоненты которого определяются согласно правилу

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ желает сформировать связь с } j \in M_i, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{2.1}$$

при этом вектор g_i удовлетворяет ограничению

$$\sum_{j \in N} g_{ij} \leqslant a_i. \tag{2.2}$$

Условие $g_{ii} = 0$, $i \in N$ исключает возможность образования в сети петель, а условие (2.2) означает, что число возможных связей у игрока ограничено. При $M_i = N \setminus \{i\}$ игрок i может предлагать связи любым игрокам, а при $a_i = n - 1$ этот игрок может поддерживать любое количество связей.

Множество стратегий игрока $i \in N$ на первом этапе, удовлетворяющих (2.1)–(2.2), обозначим через G_i. Декартово произведение $\prod_{i \in N} G_i$ множеств стратегий игроков на первом этапе назовем множеством ситуаций на первом этапе игры – в части формирования связей. Предполагается, что игроки выбирают стратегии на первом этапе одновременно и независимо друг от друга. В частности, игрок $i \in N$ выбирает $g_i \in G_i$, и в результате выбора стратегий всеми игроками формируется ситуация $(g_1, \ldots, g_n)$.

В данной задаче в ситуации $(g_1, \ldots, g_n)$ в сети g устанавливаются связи ij тогда и только тогда, когда $g_{ij} = g_{ji} = 1$. Смысл данного подхода основан на том, что формируемая сеть содержит только те связи, на которые согласны оба игрока.

Пример 2.1. Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, и игроки выбирают следующие стратегии на первом этапе: $g_1 = (0, 1, 1, 0)$, $g_2 = (0, 0, 1, 0)$, $g_3 = (1, 0, 0, 1)$, $g_4 = (0, 0, 1, 0)$.

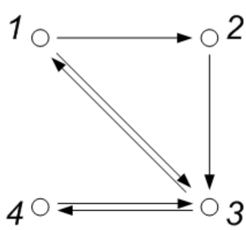

Рисунок 1. Представление стратегий

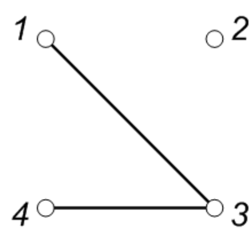

Рисунок 2. Итоговая сеть

Итоговая сеть (рис. 2) содержит лишь ребра $\{13, 34\}$.

2.2. Второй этап: выбор стратегий в сети

После того как сеть g реализовалась, игроки выбирают свои стратегии на втором этапе игры. Определим соседей игрока i в сети g, как элементы множества $N_i(g) = \{j \in N \setminus \{i\} : ij \in g\}$. Не исключая возможности того, что сформированная на первом этапе сеть может не устроить игроков, наделим их способностью разрывать уже заключенные связи.

Определим компоненты n-мерного вектора $d_i(g)$ следующим образом:

$$d_{ij}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ оставляет заключенную на первом} \\ & \text{этапе игры связь с игроком } j \in N_i(g) \\ & \text{в сети } g, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Множество векторов $d_i(g)$, удовлетворяющих (2.3), обозначим через $D_i(g)$, $i \in N$. Очевидно, набор $(d_1(g), \ldots, d_n(g))$ влияет на сформированную на первом этапе сеть g, из которой может быть исключен ряд связей. Набор $(d_1(g), \ldots, d_n(g))$, примененный к сети g, меняет ее структуру, превращая ее в новую сеть, которую обозначим через g^d. Новая сеть g^d получается из сети g исключением тех связей ij, для которых либо $d_{ij}(g) = 0$, $d_{ji}(g) = 0$.

Помимо этого, на втором этапе игрок $i \in N$ имеет возможность выбора управления u_i из некоторого конечного множества U_i. Тогда стратегией игрока $i \in N$ на втором этапе оказывается пара $(d_i(g), u_i)$, определяющая, с одной стороны, подлежащие к разрыву связи $d_i(g)$, а с другой – выбор управления u_i, $i \in N$.

Новая сеть g^d и выбранные управления u_i, $i \in N$ определяют функцию выигрыша K_i игрока, которая по условиям игры зависит только от выбранной стратегии на втором этапе самого игрока и стратегий его соседей, оставшихся в сети g^d: $K_i(u_i, u_{N_i(g^d)})$, $i \in N$, – вещественная неотрицательная функция, заданная на множестве $U_i \times \prod\limits_{j \in N_i(g^d)} U_j$. Здесь через $u_{N_i(g^d)}$ обозначен набор u_j всех соседей $j \in N_i(g^d)$ игрока i в сети g^d. Кроме этого предположим, что функции K_i удовлетворяют следующему свойству: для любых g и g', и игрока i если $|N_i(g)| \geqslant |N_i(g')|$, то $K_i(u_i, u_{N_i(g)}) \geqslant K_i(u_i, u_{N_i(g')})$ для всех $(u_i, u_{N_i(g)}) \in U_i \times \prod\limits_{j \in N_i(g)} U_j$ и $(u_i, u_{N_i(g')}) \in U_i \times \prod\limits_{j \in N_i(g')} U_j$. Пусть на первом этапе игры реализовалась сеть g. Рассмотрим две стратегии игрока $i \in N$ на втором этапе: $(d_i(g), u_i)$ и $(d'_i(g), u_i)$. Здесь $d'_i(g)$ отличается от $d_i(g)$ тем, что игрок i исключил из сети g большее количество связей, чем при использовании $d_i(g)$, входящей в набор $(d_1(g), \ldots, d_n(g))$. Обозначим через $g^{d'}$ сеть, образованную из сети

g в результате реализации ситуации $d'(g) = (d_1(g), \ldots, d_{i-1}(g), d'_i(g), d_{i+1}(g), \ldots, d_n(g))$. Это означает, что $|N_i(g^d)| \geqslant |N_i(g^{d'})|$, и выигрыш игрока i уменьшается с уменьшением общего числа связей. Следовательно стратегия этого игрока на втором этапе $(d'_i(g), u_i)$ доминируется стратегией $(d_i(g), u_i)$. В дальнейшем при рассмотрении примеров подобные доминируемые стратегии мы будем исключать из рассмотрения.

Некооперативная двухступенчатая сетевая игра. Определим игру в нормальной форме $(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$, где N – множество игроков; $X_i = G_i \times D_i(g) \times U_i$ – множество стратегий игрока $i \in N$; H_i – функция выигрыша игрока $i \in N$, заданная на множестве $\prod\limits_{i\in N} X_i$ по правилу

$$H_i(g_1, \ldots, g_n, d_1(g), \ldots, d_n(g), u_1, \ldots, u_n) = K_i(u_i, u_{N_i(g^d)}).$$

Здесь стратегия игрока i – элемент множества X_i – определяет поведение игрока как на первом, так и на втором этапах игры: на основе стратегий игроков на первом этапе $(g_1, \ldots, g_n)$ формируется сеть g согласно правилу формирования связей и в дальнейшем видоизменяется в сеть g^d набором $(d_1(g), \ldots, d_n(g))$, выбранном на втором этапе, который вместе с элементами $u_i \in U_i$, $i \in N$ определяет выигрыши игроков.

При такой постановке игроки на первом этапе независимо друг от друга выбирают стратегии $g_i \in G_i$, $i \in N$, что приводит к формированию сети g, а затем на втором этапе независимо друг от друга выбирают пары $(d_i(g), u_i) \in D_i(g) \times U_i$, $i \in N$, формируя новую сеть g^d. В реализовавшейся ситуации игроки получают выигрыши $K_i(u_i, u_{N_i(g^d)})$. На этом игра заканчивается. В качестве решения игры можно рассматривать ситуацию равновесия по Нэшу.

Определение 2.1. *Набор стратегий* $(g_1^*, \ldots, g_n^*; (d_1^*(g^*), u_1^*), \ldots, (d_n^*(g^*), u_n^*))$ *образует ситуацию равновесия по Нэшу в двухступенчатой сетевой игре, если неравенство*

$$\begin{aligned} &H_i(g_1^*, \ldots, g_n^*; (d_1^*(g^*), u_1^*), \ldots, (d_n^*(g^*), u_n^*)) \geqslant \\ &\geqslant H_i\left(g_1^*, \ldots, g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^* \ldots, g_n^*; (d_1^*(g), u_1^*), \ldots, (d_{i-1}^*(g), u_{i-1}^*),\right. \\ &\qquad \left.(d_i(g), u_i), (d_{i+1}^*(g), u_{i+1}^*), \ldots, (d_n^*(g), u_n^*)\right) \end{aligned}$$

выполняется для всех $i \in N$, $g_i \in G_i$ *и* $(d_i(g), u_i) \in D_i(g) \times U_i$, *а сеть* g *формируется набором стратегий на первом шаге* $(g_1^*, \ldots, g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^*, \ldots, g_n^*)$.

Отметим, что при такой постановке в двухступенчатой сетевой всегда существует ситуация равновесия по Нэшу по крайней мере в смешанных стратегиях.

Пример 2.2. В качестве иллюстрации рассмотрим игру трех лиц при следующих ограничениях: игроки могут поддерживать только одну связь; игрок 3 может предлагать связь только игроку 1; ребро в сети формируется если на эту связь согласны оба игрока. При сделанных предположениях заключаем следующее: $N = \{1, 2, 3\}$; игроки, которым игроки 1, 2 и 3 могут предлагать связи, $M_1 = \{2, 3\}, M_2 = \{1, 3\}, M_3 = \{1\}$; количество поддерживаемых игроками связей $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Таким образом, множества допустимых стратегий игроков на первом этапе имеют вид: $G_1 = \{(0, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$, $G_2 = \{(0, 0, 0); (1, 0, 0); (0, 0, 1)\}$, $G_3 = \{(0, 0, 0); (1, 0, 0)\}$, а возможные итоговые сети, формируемые на первом этапе следующие: пустая сеть (сеть, в которой множество ребер пусто, $g = \varnothing$), $g = \{12\}$, $g = \{13\}$.

Предположим для простоты, что вторые компоненты U_i декартовых произведений $D_i(g) \times U_i$ (множество стратегий игрока $i = 1, 2, 3$ на втором этапе) для выбранной сети g у всех игроков одинаковые: $U_1 = U_2 = U_3 = \{A, B\}$, а значения функций выигрыша имеют следующий вид:

$N_1(g) = \varnothing$	$K_1(A) = 1$	$K_1(B) = 0$		
$N_1(g) = \{2\}$	$K_1(A, A) = 3$	$K_1(A, B) = 1$	$K_1(B, A) = 2$	$K_1(B, B) = 5$
$N_1(g) = \{3\}$	$K_1(A, A) = 4$	$K_1(A, B) = 1$	$K_1(B, A) = 2$	$K_1(B, B) = 3$
$N_2(g) = \varnothing$	$K_2(A) = 1$	$K_2(B) = 0$		
$N_2(g) = \{1\}$	$K_2(A, A) = 6$	$K_2(A, B) = 1$	$K_2(B, A) = 1$	$K_2(B, B) = 2$
$N_3(g) = \varnothing$	$K_3(A) = 2$	$K_3(B) = 0$		
$N_3(g) = \{1\}$	$K_3(A, A) = 2$	$K_3(A, B) = 5$	$K_3(B, A) = 8$	$K_3(B, B) = 4$

Для нахождения равновесия по Нэшу в двухступенчатой сетевой игре воспользуемся принципом динамического программирования, с помощью которого сначала при фиксированной сети g найдем равновесные стратегии игроков $(d_1^*(g), u_1^*), (d_2^*(g), u_2^*), (d_3^*(g), u_3^*)$ на втором этапе игры.

Если имеется сеть $g = \varnothing$, то необходимо найти равновесие по Нэшу в следующей игре:

$$\begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,0,2) \\ (0,1,2) & (0,0,2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1,1,0) & (1,0,0) \\ (0,1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}.$$

Здесь первый игрок выбирает строки матрицы (первая соответствует выбору стратегии A, вторая – B), второй игрок выбирает столбцы матрицы (первый соответствует выбору стратегии A, второй – B), третий игрок выбирает одну из двух матриц (первая соответствует выбору стратегии A, вторая – B). В приведенной игре существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(d_1^*(g), u_1^*) = (d_2^*(g), u_2^*) = (d_3^*(g), u_3^*) = ((0,0,0), A)$ с выигрышами $K_1(A) = K_2(A) = 1, K_3(A) = 2$.

В сети $g = \{12\}$ необходимо найти равновесие по Нэшу в следующей игре:

$$\begin{pmatrix} (3,6,2) & (1,1,2) \\ (2,1,2) & (5,2,2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3,6,0) & (1,1,0) \\ (2,1,0) & (5,2,0), \end{pmatrix}.$$

Здесь существуют две ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $(d_1^*(g), u_1^*) = ((0,1,0), A)$, $(d_2^*(g), u_2^*) = ((1,0,0), A)$, $(d_3^*(g), u_3^*) = ((0,0,0), A)$ с выигрышами $K_1(A, A) = 3$, $K_2(A, A) = 6$, $K_3(A) = 2$, и $(d_1^*(g), u_1^*) = ((0,1,0), B)$, $(d_2^*(g), u_2^*) = ((1,0,0), B)$, $(d_3^*(g), u_3^*) = ((0,0,0), A)$ с выигрышами игроков $K_1(B, B) = 5, K_2(B, B) = K_3(A) = 2$.

В сети $g = \{13\}$ необходимо найти равновесие по Нэшу в следующей игре:

$$\begin{pmatrix} (4,1,2) & (4,0,2) \\ (2,1,5) & (2,0,5) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1,1,8) & (1,0,8) \\ (3,1,4) & (3,0,4) \end{pmatrix}.$$

Здесь существует ситуация равновесия по Нэшу только в смешанных стратегиях $(d_1^*(g), u_1^*) = ((0,0,1), \{\mathbb{P}(A) = 1/7; \mathbb{P}(B) = 6/7\})$, $u_2^* = ((0,0,0), A)$, $(d_3^*(g), u_3^*) = ((1,0,0), \{\mathbb{P}(A) = 1/2; \mathbb{P}(B) = 1/2\})$ с ожидаемыми выигрышами игроков $K_1(u_1^*, u_3^*) = 2\frac{1}{2}$, $K_2(A) = 1$, $K_3(u_3^*, u_1^*) = 4\frac{4}{7}$. Тем самым мы нашли ситуации равновесия по Нэшу на втором этапе для любых сетей, которые могут реализоваться на первом этапе.

Рассмотрим теперь первый этап игры – выбор стратегий, формирующих сеть. Здесь имеют место две одновременные игры (с выигрышами игроков в ситуации равновесия по Нэшу на втором этапе при соответствующей реализации сети), поскольку на втором этапе возможны две ситуации равновесия по Нэшу:

$$\begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (3,6,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (3,6,2) & (1,1,2) \\ (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}) & (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}) & (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}) \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (5,2,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (5,2,2) & (1,1,2) \\ (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}) & (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}) & (2\frac{1}{2},1,4\frac{4}{7}). \end{pmatrix}.$$

Здесь в каждой из игр строки матриц соответствуют выборам стратегий первого игрока из множества G_1, столбцы матрицы соответствуют выборам стратегий второго игрока из множества G_2, а одна из двух матриц соответствуют выбору стратегий третьего игрока из множества G_3.

В указанных играх существует несколько ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, при которых каждая из сетей $g = \varnothing$, $g = \{12\}$ или $g = \{13\}$ может быть реализована. Например, в первой игре ситуация $g_1^* = (0,1,0)$, $g_2^* = (1,0,0)$, $g_3^* = (0,0,0)$, $(d_1^*(g), u_1^*) = ((0,1,0), A)$, $(d_2^*(g), u_2^*) = ((1,0,0), A)$, $(d_3^*(g), u_3^*) = ((0,0,0), A)$ является равновесием по Нэшу, в которой формируется сеть $g^* = \{12\}$, и игроки получают выигрыши $K_1(A,A) = 3$, $K_2(A,A) = 6$, $K_3(A) = 2$.

Двухступенчатая сетевая игра с возможностью кооперации на втором этапе. При таком рассмотрении мы предполагаем, что игра происходит следующим образом. На первом этапе игроки независимо друг от друга выбирают стратегии $g_i \in G_i$, $i \in N$, что приводит к формированию сети g, а на втором этапе совместными действиями договариваются выбрать такой набор пар $(d_i^*(g), u_i^*) \in D_i(g) \times U_i$, $i \in N$, который приводит к максимальному суммарному выигрышу всех игроков.

Теорема 2.1. *Максимальный суммарный выигрыш игроков определяется по формуле*

$$\sum_{i \in N} K_i(u_i^*, u_{N_i(g)}^*) = \max_{u_i \in U_i, i \in N} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}). \tag{2.4}$$

Доказательство. Выбирая набор пар $(d_i(g), u_i) \in D_i(g) \times U_i$, игроки максимизируют суммарный выигрыш, т.е. величину

$$\max_{(d_i(g),u_i),i\in N} \sum_{i\in N} K_i(u_i, u_{N_i(g^d)}).$$

Поскольку в силу свойств функций K_i любое исключение существующей связи $ij \in g$ уменьшает выигрыш коалиции N, все компоненты векторов $d_i(g)$, $i : N_i(g) \neq \varnothing$ состоят из единиц (в максимизирующих стратегиях), что не приводит к изменению сети g на втором этапе, а также к изменению соседей игроков $(N_i(g^d) = N_i(g))$, поэтому

$$\max_{(d_i(g),u_i),i\in N} \sum_{i\in N} K_i(u_i, u_{N_i(g^d)}) = \max_{u_i\in U_i,i\in N} \sum_{i\in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}).$$

Отсюда и получаем (2.4). □

Следующей задачей является распределение максимального суммарного выигрыша между всеми игроками. После этого игра заканчивается.

С целью распределения максимального суммарного выигрыша строится вспомогательная кооперативная игра, характеристическая функция в которой определяется для любого подмножества $S \subseteq N$ – коалиции – по правилу:

$$\begin{aligned} v(g,N) &= \sum_{i\in N} K_i(u_i^*, u_{N_i(g)}^*), \\ v(g,S) &= \max_{u_i\in U_i,i\in S} \sum_{i\in S} K_i(u_i, u_{N_i(g)\cap S}), \\ v(g,\varnothing) &= 0, \end{aligned}$$

при условии, что сеть g фиксирована.

Обычно значение $v(g,S)$ определяется как максимальный гарантированный выигрыш коалиции S (максимин) при фиксированной сети g в антагонистической игре, разыгрываемой между двумя игроками: коалицией S, максимизирующей суммарный выигрыш игроков этой коалиции, и коалицией $N \setminus S$, минимизирующей суммарный выигрыш игроков из S.

Теорема 2.2. *При неотрицательных функциях выигрышей игроков K_i, $i \in N$ максимальный гарантированный выигрыш коалиции S определяется по формуле*

$$v(g,S) = \max_{u_i \in U_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g) \cap S}). \tag{2.5}$$

Доказательство. Максимальный гарантированный выигрыш коалиции $S \subset N$ по определению равен

$$\max_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in S}} \min_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d)}).$$

Здесь, очевидно, максимум берется по всем стратегиям игроков на втором этапе коалиции S, а минимум берется по всем стратегиям игроков на втором этапе коалиции $N \setminus S$. Поскольку наличие связи $ij \in g$, $i \in S$, $j \in N \setminus S$ делает большим выигрыш коалиции S в силу свойств функций K_i, нежели ее отсутствие, то игрок $j \in N \setminus S$ будучи соседом с i с целью минимизации выигрыша коалиции S в своей компоненте стратегии $d_j(g)$ заменяет соответствующую единицу на ноль, исключая тем самым связь ij. Таким образом для минимизации величины $\sum\limits_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d)})$ игроки коалиции $N \setminus S$ разрывают все связи с игроками коалиции S. В этом случае для игрока $i \in S$ его соседями станут игроки $N_i(g^d) \cap S$, а его выигрыш уже не будет зависеть от u_j, $j \in N \setminus S$, и любая связь вида $ij \in g$, $i \in S$, $j \in N \setminus S$ будет исключена. Следовательно,

$$\max_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in S}} \min_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d)}) = \max_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in S}} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d) \cap S}).$$

Далее, исключение связи $ij \in g$, $i, j \in S$ уменьшает выигрыш коалиции S, поэтому для максимизации величины $\sum\limits_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d) \cap S})$ все связи между игроками внутри S должны остаться, и соседями игрока $i \in N$ станут игроки из множества $N_i(g) \cap S$. Тогда

$$\max_{\substack{(d_i(g),u_i),\\ i \in S}} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g^d) \cap S}) = \max_{u_i \in U_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g) \cap S}),$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

При таком предположении определение значения $v(g,S)$ является более простой задачей нежели нахождение максимина и представляет собой решение задачи максимизации.

Заметим, что значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $\{i\}$, определяемое следующим образом

$$v(g,\{i\}) = \max_{u_i \in U_i} K_i(u_i, u_{N_i(g)\cap\{i\}}) = \max_{u_i \in U_i} K_i(u_i), \tag{2.6}$$

не зависит от сети g.

В качестве решения вспомогательной кооперативной игры понимается дележ – n-мерный вектор $\xi(g) = (\xi_1(g),\dots,\xi_n(g))$, удовлетворяющий условиям эффективности и индивидуальной рациональности:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} \xi_i(g) &= v(g,N), \\ \xi_i(g) &\geqslant v(g,\{i\}),\ i\in N. \end{aligned}$$

В качестве решения используем вектор Шепли $\phi(g) = (\phi_1(g),\dots,$ $\phi_n(g))$, компоненты которого определяются согласно следующей формуле:

$$\phi_i(g) = \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{(|N|-|S|)!(|S|-1)!}{|N|!}\left[v(g,S) - v(g,S\setminus\{i\})\right], \quad i\in N.$$

Определим двухступенчатую сетевую игру с возможностью кооперации на втором этапе как игру в нормальной форме $(N,\{G_i\}_{i\in N},$ $\{H_i\}_{i\in N})$, где N – множество игроков; G_i множество стратегий игрока $i\in N$; H_i – функция выигрыша игрока $i\in N$, заданная на множестве $\prod_{i\in N} G_i$ по правилу

$$H_i(g_1,\dots,g_n) = \phi_i(g).$$

Здесь при выбранном наборе стратегий $g_1,\dots,g_n$ на первом этапе формируется сеть g, а на втором этапе игроками совместно используются фиксированные стратегии $(d_i^*(g),u_i^*) \in D_i(g)\times U_i$, $i\in N$, которые максимизируют $\sum_{i\in N} K_i(u_i,u_{N_i(g)})$ и распределяют величину (2.4) согласно дележу $\phi(g) = (\phi_1(g),\dots,\phi_n(g))$.

Определение 2.2. *Набор стратегий* $(g_1^*, \dots, g_n^*)$ *образует ситуацию равновесия по Нэшу в двухступенчатой сетевой игре с возможностью кооперации на втором этапе, если неравенство*

$$H_i(g_1^*, \dots, g_n^*) \geqslant H_i(g_1^*, \dots, g_{i-1}^*, g_i, g_{i+1}^*, \dots, g_n^*)$$

выполняется для всех $i \in N$ *и* $g_i \in G_i$.

В рассматриваемой двухступенчатой сетевой с возможностью кооперации на втором этапе всегда существует ситуация равновесия по Нэшу по крайней мере в смешанных стратегиях.

Пример 2.3. Рассмотрим двухступенчатую сетевую игру с возможностью кооперации на втором этапе из примера 2.2. Для нахождения равновесия по Нэшу воспользуемся принципом динамического программирования, с помощью которого сначала при фиксированной сети найдем стратегии, максимизирующие (2.4), и дележ. В данном примере в качестве дележа выберем вектор Шепли.

Вычислим значения характеристической функции $v(g, S)$ для любой сети g и любой коалиции $S \subseteq N$:

	N	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$g = \varnothing$	4	2	3	3	1	1	2
$g = \{12\}$	11	9	3	3	1	1	2
$g = \{13\}$	10	2	9	3	1	1	2

Вычисляя вектор Шепли, получим:

$$\phi(g) = \begin{cases} (1,1,2), & \text{при } g = \varnothing, \\ (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2), & \text{при } g = \{12\}, \\ (4,1,5), & \text{при } g = \{13\}. \end{cases}$$

Перейдем к первому этапу игры. Здесь имеет место одновременная игра (с выигрышами игроков – компонентами вектора Шепли при соответствующей реализации сети) следующего вида:

$$\begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (1,1,2) & (1,1,2) & (1,1,2) \\ (1,1,2) & (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2) & (1,1,2) \\ (4,1,5) & (4,1,5) & (4,1,5) \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы соответствуют выборам стратегий первого игрока из множества G_1, столбцы матрицы соответствуют выборам стратегий второго игрока из множества G_2, а одна из двух матриц соответствует выборам стратегий третьего игрока из множества G_3.

В указанных играх существует несколько ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, при которых каждая из сетей $g = \varnothing$, $g = \{12\}$ или $g = \{13\}$ может быть реализована. Например, ситуация $g_1^* = (0, 0, 1)$, $g_2^* = (0, 0, 0)$, $g_3^* = (1, 0, 0)$, $(d_1^*(g^*), u_1^*) = ((0, 0, 1), A)$, $u_2^* = ((0, 0, 0), A)$, $(d_3^*(g^*), u_3^*) = ((1, 0, 0), B)$ является равновесием по Нэшу, в которой формируется сеть $g^* = \{13\}$, а игроки получают выигрыши $\phi_1(g^*) = 4$, $\phi_2(g^*) = 1$ и $\phi_3(g^*) = 5$.

3. Кооперативный вариант двухступенчатой сетевой игры

3.1. Определение кооперативной двухступенчатой сетевой игры

В настоящем разделе мы предполагаем, что игроки могут выбирать стратегии на обоих этапах совместно. Действуя как один игрок и выбирая $g_i \in G_i$, $u_i \in U_i$, $i \in N$, максимальная коалиция N максимизирует значение

$$\max_{g_i \in G_i, i \in N} \max_{u_i \in U_i, i \in N} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}). \tag{3.1}$$

Пусть максимум достигается при наборе стратегий игроков g_i^*, u_i^*, $i \in N$, а набор $(g_1^*, \ldots, g_n^*)$ порождает сеть g^*. Здесь так же как и в (2.4) для достижения максимального суммарного выигрыша игрокам коалиции N нет смысла исключать установленные связи, поэтому все компоненты вектора $d_i(g)$, $i : N_i(g) \neq \varnothing$ равны единице для любой сети g. Положим

$$\sum_{i \in N} K_i(u_i^*, u_{N_i(g^*)}^*) \;\; = \;\; \max_{g_i \in G_i, i \in N} \max_{u_i \in U_i, i \in N} \sum_{i \in N} K_i(u_i, u_{N_i(g)}).$$

Далее необходимо распределить максимальный суммарный выигрыш между всеми игроками согласно некоторому дележу. После этого игра заканчивается.

С целью распределения максимального суммарного выигрыша строится кооперативная игра в форме характеристической функции

(N, V), в которой характеристическая функция V определяется аналогично предыдущему случаю (см. раздел 2.2).

Имеет место теорема, аналогичная теоремам 2.1–2.2. Поскольку ее доказательство похоже на доказательства теорем 2.1 и 2.2, приведем лишь ее формулировку.

Теорема 3.1. *В кооперативной двухступенчатой сетевой игре характеристическая функция* $V(\cdot)$ *строится по следующему правилу:*

$$\begin{aligned} V(N) &= \sum_{i \in N} K_i(u_i^*, u^*_{N_i(g^*)}), \\ V(S) &= \max_{g_i \in G_i, i \in S} \max_{u_i \in U_i, i \in S} \sum_{i \in S} K_i(u_i, u_{N_i(g) \cap S}), \\ V(\varnothing) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $\{i\}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\{i\}) &= \max_{g_i \in G_i} \max_{u_i \in U_i} K_i(u_i, u_{N_i(g) \cap \{i\}}) \\ &= \max_{g_i \in G_i} \max_{u_i \in U_i} K_i(u_i) = \max_{u_i \in U_i} K_i(u_i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Под решением кооперативной двухступенчатой сетевой игры понимается дележ – n-мерный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, удовлетворяющий условиям $\sum\limits_{i \in N} \xi_i = V(N)$ и $\xi_i \geqslant V(\{i\})$, $i \in N$. В качестве дележа рассматривается вектор Шепли $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, компоненты которого определяются согласно следующей формуле:

$$\phi_i = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!} \left[V(S) - V(S \setminus \{i\}) \right], \quad i \in N.$$

3.2. Динамическая устойчивость кооперативных решений

Принципом оптимальности в двухступенчатой кооперативной сетевой игре будет называть правило, по которому множеству N и характеристической функции $v(S)$, $S \subseteq N$ ставится в соответствие некоторый дележ.

Пусть игроки перед началом игры договорились выбирать стратегии g_i^*, u_i^*, $i \in N$, максимизирующие величину (3.1), а затем распределить полученный максимальный суммарный выигрыш согласно заранее оговоренному принципу оптимальности, при котором реализуется дележ $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Это означает, что во всей двухступенчатой кооперативной игре игрок $i \in N$ в качестве своего выигрыша рассчитывает получить величину ξ_i. Что произойдет, если после первого этапа игры – выбора стратегий на первом этапе $g_1^*, \ldots, g_n^*$ – игроки на втором этапе пересчитают дележ согласно тому же принципу оптимальности? Стратегии $g_1^*, \ldots, g_n^*$ формируют на первом этапе игры сеть g^*, поэтому после пересчета дележа (согласно тому же принципу оптимальности, что и изначальный дележ ξ), игроки должны будут получить $\xi_i(g^*)$, $i \in N$ согласно значениям характеристической функции $v(g^*, S)$ для всех $S \subseteq N$.

Принцип оптимальности называется динамически устойчивым (состоятельным во времени), если выполняются равенства

$$\xi_i = \xi_i(g^*), \quad i \in N. \tag{3.3}$$

Равенства (3.3) означают, что если выбрать изначально некоторый принцип оптимальности и рассчитать по нему дележ ξ, который определит выигрыши игроков, а затем по прошествии одного этапа игры пересчитать заново выигрыши игроков, т.е. вычислить новый дележ $\xi(g^*)$ по тому же принципу оптимальности в игре, начинающейся со второго этапа в сети g^*, то компоненты такого дележа, а значит и выигрыши игроков, будут теми же самыми. Поскольку в подавляющем большинстве случаев равенства (3.3) не выполняются, то возникает проблема динамической неустойчивости принципа оптимальности: игрок $i \in N$, изначально ориентировавшийся на выигрыш ξ_i, может получить в качестве выигрыша величину $\xi_i(g^*)$. Для избежания подобной ситуации предлагается ввести некоторую схему пошаговых выплат – процедуру распределения дележа ξ.

Определение 3.1. *Процедурой распределения дележа ξ в кооперативной двухступенчатой сетевой игре при реализации стратегий* $(g_1^*, \ldots, g_n^*; u_1^*, \ldots, u_n^*)$*, максимизирующих* (3.1)*, называется матрица*

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} \end{pmatrix},$$

где

$$\xi_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}, \quad i \in N.$$

Величина β_{ik} представляет собой выплату игроку i на этапе $k = 1, 2$. Таким образом применяется следующая схема: игроку $i \in N$ на первом этапе выплачивается величина β_{i1}, на втором этапе – величина β_{i2}, с тем, чтобы за два этапа общая выплата $\beta_{i1}+\beta_{i2}$ в точности совпадала с тем выигрышем ξ_i, на который этот игрок изначально ориентировался.

Определение 3.2. *Процедура распределения дележа ξ в кооперативной двухступенчатой сетевой игре называется динамически устойчивой (состоятельной во времени) при реализации стратегий $(g_1^*, \ldots, g_n^*; u_1^*, \ldots, u_n^*)$, максимизирующих* (3.1)*, если*

$$\xi_i - \beta_{i1} = \xi_i(g^*), \quad \textit{для всех } i \in N.$$

Очевидно, что в кооперативной двухступенчатой сетевой игре динамически устойчивая процедура распределения дележа $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{i1} &= \xi_i - \xi_i(g^*), \\ \beta_{i2} &= \xi_i(g^*), \quad i \in N. \end{aligned}$$

Пример 3.1. Рассмотрим кооперативный вариант двухступенчатой сетевой игры из примера 2.2. Здесь максимальный суммарный выигрыш (3.1) равен 11, и он достигается при совместном выборе игроками следующих стратегий: $g_1^* = (0, 1, 0)$, $g_2^* = (1, 0, 0)$, $g_3^* = (0, 0, 0)$, $u_1^* = u_2^* = u_3^* = A$, при этом на первом этапе реализуется сеть $g^* = \{12\}$.

Определим значения характеристической функции $V(S)$ для всех $S \subseteq N$: $V(N) = 11$, $V(\{1, 2\}) = 9$, $V(\{1, 3\}) = 9$, $V(\{2, 3\}) = 3$, $V(\{1\}) = V(\{2\}) = 1$, $V(\{3\}) = 2$. По указанной функции можно рассчитать вектор Шепли: $\phi = (5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3)$. Вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности. Чтобы убедиться в динамической неустойчивости вектора Шепли, достаточно вычислить новый вектор Шепли $\phi(g^*)$ в подыгре, начиная со второго этапа игры с учетом реализации сети $g^* = \{12\}$, и проверить выполнение равенства (3.3). В подыгре, начинающейся со второго этапа, мы получаем следующие значения характеристической функции

$v(g^*, S)$ для всех $S \subseteq N$: $v(g^*, N) = 11$, $v(g^*, \{1,2\}) = 9$, $v(g^*, \{1,3\}) = v(g^*, \{2,3\}) = 3$, $v(g^*, \{1\}) = v(g^*, \{2\}) = 1$, $v(g^*, \{3\}) = 2$. В силу различия значений функций $V(S)$ и $v(g^*, S)$ вектор Шепли в подыгре начиная со второго этапа $\phi(g^*) = (4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 2)$ не будет совпадать с ϕ. Например, игрок 1, изначально рассчитывающий получить выигрыш $5\frac{1}{2}$ на самом деле может получить меньший выигрыш – $4\frac{1}{2}$.

Поскольку, равенство (3.3) не выполняется, вектор Шепли не является динамически устойчивым принципом оптимальности. Это означает, что необходимо построить динамически устойчивую процедуру распределения дележа (вектора Шепли):

$$\begin{aligned}
&\beta_{12} = \phi_1(g^*) = 4\tfrac{1}{2}, && \beta_{11} = \phi_1 - \phi_1(g^*) = 1,\\
&\beta_{22} = \phi_2(g^*) = 4\tfrac{1}{2}, && \beta_{21} = \phi_2 - \phi_2(g^*) = -2,\\
&\beta_{32} = \phi_3(g^*) = 2, && \beta_{31} = \phi_3 - \phi_3(g^*) = 1,
\end{aligned}$$

которая в матричном представлении имеет вид

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 4\frac{1}{2} \\ -2 & 4\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

При указанной динамически устойчивой процедуре распределения вектора Шепли игроки, изначально рассчитывающие получить в игре выигрыши $\phi = (5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3)$, получат их в два этапа: на первом этапе величины $\beta_{11} = 1$, $\beta_{21} = -2$, $\beta_{31} = 1$, а на втором – оставшиеся выигрыши $\beta_{12} = 4\frac{1}{2}$, $\beta_{22} = 4\frac{1}{2}$, $\beta_{32} = 2$. При этом стоит отметить, что выплаты на втором этапе есть компоненты вектора Шепли $\phi(g^*)$, получаемые при возможном пересчете дележа на втором этапе.

Авторы благодарят рецензентов за сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев В.В., Врублевская И.Н. *Позиционные игры (сб. статей под ред.).* М.: Наука, 1967.

2. Петросян Л.А. *Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1977. №19. С. 46–52.

3. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1979. №1. С. 52–59.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.

5. Петросян Л.А., Седаков А.А. *Многошаговые сетевые игры с полной информацией* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 2. С. 66–81.

6. Bala V., Goyal S. *A non-cooperative model of network formation* // Econometrica. 2000. V. 68(5). P. 1181–1231.

7. Dutta B., van den Nouweland A., Tijs S. *Link formation in cooperative situations* // International Journal of Game Theory. 1998. V. 27. P. 245–256.

8. Goyal S., Vega-Redondo F. *Network formation and social coordination* // Games and Economic Behavior. 2005. V. 50. P. 178–207.

9. Jackson M., Watts A. *On the formation of interaction networks in social coordination games* // Games and Economic Behavior. 2002. V. 41 (2). P. 265–291.

10. Jackson M.O., Wolinsky A. *A Strategic Model of Social and Economic Networks* // Journal of Economic Theory. 1996. V. 71. P. 44–74.

11. Shapley L.S. *A value for n-person games.* In: Kuhn W., Tucker A.W. (Eds.) Contributions to the Theory of Games II, Princeton. Princeton University Press. 1953. P. 307–317.

TWO-STAGE NETWORK GAMES

Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (spbuoasis7@peterlink.ru),
Artem A. Sedakov, Saint Petersburg State University, Cand.Sc. (a.sedakov@spbu.ru),
Anatolii O. Bochkarev, Saint Petersburg State University, Cand.Sc. (sciencewrk@apmath.spbu.ru).

Abstract: In the paper, two-stage network games are studied. First stage of the game is a network formation stage, while on the second stage players choose their strategies according to the network realized on the first stage. Both noncooperative and cooperative settings are considered. In the noncooperative case the Nash equilibrium is used as a solution concept, whereas in the cooperative setting an allocation (the Shapley value) is considered as a solution concept. It is proved that the Shapley value does not satisfy the time-consistency property.

Keywords: network, equilibrium, cooperation, characteristic function, allocation, time-consistency.