Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.3, с. 72–87

УДК 519.833.2
ББК 22.18

# ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ С АСИММЕТРИЧНЫМИ ИГРОКАМИ*

Анна Н. Реттиева
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул.Пушкинская, 11
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

Исследована теоретико-игровая модель экологического менеджмента в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на бесконечном промежутке времени. Целью работы является определение кооперативного выигрыша при наличии различных коэффициентов дисконтирования у игроков. Предложено использование арбитражного решения Нэша для построения кооперативных стратегий игроков. Исследованы две переговорные схемы: для всего периода продолжения игры и рекурсивная арбитражная процедура.

*Ключевые слова*: задача управления биоресурсами, асимметричные игроки, арбитражное решение Нэша.

## 1. Введение

В статье исследована теоретико-игровая модель эксплуатации ресурсов в дискретном времени. В игре участвуют игроки (страны или рыболовецкие артели), производящие вылов биоресурсов на промежутке времени $[0, n]$. В данной работе игроки используют различные

---



* Поддержано грантами РФФИ № 13-01-91158-ГФЕН_а и 13-01-00033_а, программой стратегического развития ПетрГУ

коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени.

Основной проблемой в данной ситуации является то, что нет возможности определить выигрыши игроков при кооперативном поведении стандартными способами. В работе [3] было предложено построение кооперативного выигрыша как суммы индивидуальных, но данный подход является нетрадиционным для кооперативной теории игр, где при кооперации определяется общий выигрыш всех участников, а потом используются схемы его распределения.

В работе [2] было предложено использование арбитражной схемы Нэша для построения общего коэффициента дисконтирования и определения кооперативного выигрыша. В данной статье мы отказываемся от идеи построения общего коэффициента дисконтирования и определяем кооперативные стратегии с использованием арбитражной процедуры Нэша. Предложено две переговорные схемы: для всего периода продолжения игры и рекурсивная арбитражная процедура, в которой арбитражная схема применяется на каждом шаге игры.

## 2. Модель и равновесие по Нэшу

Пусть два игрока (страны или рыболовецкие артели) эксплуатируют рыбный ресурс на протяжении $n$ временных промежутков. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = (\varepsilon x_t - u_{1t} - u_{2t})^{\alpha}\,, \ \ x_0 = x\,, \tag{2.1}$$

где $x_t \geq 0$ – размер популяции в момент $t$, $\varepsilon \in (0,1)$ – коэффициент смертности, $\alpha \in (0,1)$ – коэффициент рождаемости, $u_{it} \geq 0$ – вылов игрока $i$, $i = 1,2$.

Предполагается логарифмический вид функций выигрышей игроков и наличие различных коэффициентов дисконтирования. Общий доход игроков на промежутке времени $[0,n]$ имеет вид

$$J_i = \sum_{t=0}^{n} \delta_i^t \ln(u_{it})\,, \tag{2.2}$$

где $0 < \delta_i < 1$ – коэффициент дисконтирования игрока $i$, $i = 1,2$.

Определим равновесие по Нэшу, используя метод динамического программирования (см. [5,6]).

**Теорема 2.1.** *Равновесие по Нэшу в задаче (2.1), (2.2) имеет вид*

$$u_{1n}^N = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_2^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j \sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j - 1}\varepsilon x\,,\ \ u_{2n}^N = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_1^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j \sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j - 1}\varepsilon x\,,$$

*где* $a_i = \alpha\delta_i\,,\ i = 1,2$. *А индивидуальные выигрыши –*

$$V_i^n(x,\delta_i) = \sum_{j=0}^{n}(a_i)^j \ln(x) + \sum_{j=1}^{n}(\delta_i)^{n-j} A_i^j - (\delta_i)^n \ln(2)\,, \tag{2.3}$$

*где*

$$A_i^j = \ln\Big[\big(\frac{\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{j} a_p^k}{\sum\limits_{k=0}^{j-1} a_1^k \sum\limits_{k=0}^{j-1} a_2^k - 1}\big)^{\sum\limits_{k=0}^{j} a_i^k}\big(\sum_{k=1}^{j} a_i^k\big)^{\sum\limits_{k=1}^{j} a_i^k}\Big]\,,\ i,p = 1,2\,,\ i \neq p\,.$$

Основной задачей в случае кооперации является построение общего выигрыша при наличии различных коэффициентов дисконтирования. Один из способов был предложен в [3], где функция общего выигрыша строилась как сумма индивидуальных выигрышей кооперирующихся игроков. В предыдущей работе [2] было показано как определить общий коэффициент дисконтирования в случае, когда кооперативные выигрыш распределяется пропорционально или в некоторой пропорции. В данной модели общий коэффициент дисконтирования не строится, а для определения кооперативных выигрышей используется арбитражная схема Нэша.

## 3. Кооперативное равновесие

Предлагается два варианта построения кооперативного поведения при помощи арбитражной процедуры Нэша:

1. Кооперативные стратегии определяются из решения арбитражной схемы для всего периода продолжения игры.

2. Используется рекурсивная арбитражная процедура, где арбитражная схема Нэша применяется на каждом шаге игры.

### 3.1. n-шаговая игра и арбитражная схема Нэша

Кооперативные стратегии и выигрыши определяются из решения задачи максимизации произведения Нэша для всего периода продолжения игры, т.е. решается следующая задача:

$$(V_1^{nc}(x,\delta_1) - V_1^n(x,\delta_1))(V_2^{nc}(x,\delta_2) - V_2^n(x,\delta_2)) =$$
$$= (\sum_{t=0}^{n} \delta_1^t \ln(u_{1t}^c) - V_1^n(x,\delta_1))(\sum_{t=0}^{n} \delta_2^t \ln(u_{2t}^c) - V_2^n(x,\delta_2)) \to \max\,,$$

где $V_i^n(x,\delta_i)$ – некооперативные выигрыши, определенные в (2.3).

Сначала рассмотрим одношаговую игру и предположим, что в конце игры страны делят оставшийся ресурс поровну. Пусть начальный размер популяции – $x$.

Стратегии игроков будем искать в линейном виде $u_{11}^c = \gamma_1^1 x$ и $u_{21}^c = \gamma_2^1 x$. Тогда выигрыш первого игрока в одношаговой игре имеет вид

$$\begin{aligned} H_1^1(\gamma_1^1,\gamma_2^1) &= \ln(\gamma_1^1 x) + \delta_1 \ln(\frac{1}{2}(\varepsilon x - \gamma_1^1 x - \gamma_2^1 x)^\alpha) = \\ &= (1+a_1)\ln(x) + \ln(\gamma_1^1) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_1^1 - \gamma_2^1) - \delta_1 \ln(2) \end{aligned}$$

и, аналогично, второго –

$$H_2^1(\gamma_1^1,\gamma_2^1) = (1+a_2)\ln(x) + \ln(\gamma_2^1) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_1^1 - \gamma_2^1) - \delta_2 \ln(2)\,.$$

Следовательно, функция выигрыша первого игрока в двухшаговой игре примет вид

$$\begin{aligned} H_1^2(\gamma_1^1,\gamma_1^2,\gamma_1^2,\gamma_2^2) = \ln(\gamma_1^2 x) + \delta_1 H_1^1(\gamma_1^1,\gamma_2^1) = \\ = \ln(\gamma_1^2 x) + \delta_1(1+a_1)\ln(\varepsilon x - \gamma_1^2 x - \gamma_2^2)^\alpha + \\ +\delta_1(\ln(\gamma_1^1) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_1^1 - \gamma_2^1) - \delta_1 \ln(2)) = \\ = (1+a_1+a_1^2)\ln(x) + \ln(\gamma_1^2) + a_1(1+a_1)\ln(\varepsilon - \gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \\ +\delta_1 \ln(\gamma_1^1) + \delta_1 a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_1^1 - \gamma_2^1) - \delta_1^2 \ln(2)\,, \end{aligned}$$

а второго –

$$\begin{aligned} H_2^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2) = (1+a_2+a_2^2)\ln(x) + \ln(\gamma_2^2) + \\ +a_2(1+a_2)\ln(\varepsilon - \gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \delta_2 \ln(\gamma_2^1) + \delta_2 a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_1^1 - \gamma_2^1) - \delta_2^2 \ln(2)\,. \end{aligned}$$

Кооперативные стратегии в двухшаговой игре определяются из решения следующей задачи:

$$H^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2)=$$
$$=(H_1^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2)-V_1^2(x,\delta_1))(H_2^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2)-V_2^2(x,\delta_2))=$$
$$=(H_1^2-V_1^2)(H_2^2-V_2^2)\to\max_{\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2}.$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\Big(\frac{\delta_1}{\gamma_1^1}-\frac{\delta_1 a_1}{\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1}\Big)(H_2^2-V_2^2)-\frac{\delta_2 a_2}{\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1}(H_1^2-V_1^2)=0\,, \tag{3.1}$$
$$-\frac{\delta_1 a_1}{\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1}(H_2^2-V_2^2)+\Big(\frac{\delta_2}{\gamma_2^1}-\frac{\delta_2 a_2}{\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1}\Big)(H_1^2-V_1^2)=0\,, \tag{3.2}$$
$$\Big(\frac{1}{\gamma_1^2}-\frac{a_1+a_1^2}{\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\Big)(H_2^2-V_2^2)-\frac{a_2+a_2^2}{\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2}(H_1^2-V_1^2)=0\,, \tag{3.3}$$
$$-\frac{a_1+a_1^2}{\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2}(H_2^2-V_2^2)+\Big(\frac{1}{\gamma_2^2}-\frac{a_2+a_2^2}{\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\Big)(H_1^2-V_1^2)=0\,. \tag{3.4}$$

Вычитая (3.2) из (3.1) и (3.4) из (3.3), получим

$$(H_2^2-V_2^2)=\frac{\delta_2}{\delta_1}\frac{\gamma_1^1}{\gamma_2^1}(H_1^2-V_1^2)\,, \tag{3.5}$$
$$(H_2^2-V_2^2)=\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}(H_1^2-V_1^2)\,. \tag{3.6}$$

Откуда

$$\frac{\delta_2}{\delta_1}\frac{\gamma_1^1}{\gamma_2^1}=\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}$$

или

$$\frac{a_2}{a_1}\frac{\gamma_1^1}{\gamma_2^1}=\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\,. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.1) и (3.2), получим

$$\frac{\delta_2}{\gamma_2^1}\Big(1-\frac{a_1\gamma_1^1+a_2\gamma_2^1}{\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1}\Big)(H_1^2-V_1^2)=0\,,$$
$$\frac{1}{\gamma_2^2}\Big(1-\frac{(a_1+a_1^2)\gamma_1^2+(a_2+a_2^2)\gamma_2^2}{\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2}\Big)(H_1^2-V_1^2)=0\,.$$

Откуда

$$\gamma_2^1=\frac{\varepsilon-\gamma_1^1(1+a_1)}{1+a_2}\,,\ \gamma_2^2=\frac{\varepsilon-\gamma_1^2(1+a_1+a_1^2)}{1+a_2+a_2^2}\,. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получим следующее соотношение:

$$\gamma_1^2 = \frac{\varepsilon\gamma_1^1(a_2+a_2^2)}{\varepsilon a_1(1+a_2+a_2^2)+\gamma_1^1((a_2+a_2^2)(1+a_1+a_1^2)-(a_1+a_1^2)(1+a_2+a_2^2))}\,. \tag{3.9}$$

Следовательно, все параметры выражены через одну неизвестную стратегию первого игрока на первом шаге – $\gamma_1^1$, для определения которой необходимо решить одно из уравнений (3.1)–(3.4). К сожалению, аналитического решения не существует, поэтому ниже будут представлены результаты численного моделирования.

Теперь перейдем к трехшаговой игре, где выигрыши игроков принимают вид

$$\begin{aligned}
H_1^3(\gamma_1^1,\gamma_1^2,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3) &= \ln(\gamma_1^3 x) + \delta_1 H_1^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2) = \\
&= \ln(\gamma_1^3 x) + \delta_1(1+a_1+a_1^2)\ln(\varepsilon x - \gamma_1^3 x - \gamma_2^3)^\alpha + \\
&+\delta_1(\ln(\gamma_1^2) + a_1(1+a_1)\ln(\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2) + \delta_1\ln(\gamma_1^1) + \\
&+a_1\delta_1\ln(\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1) - \delta_1^2\ln(2)) = \\
= (1+a_1+a_1^2+a_1^3)\ln(x) + \ln(\gamma_1^3) &+ a_1(1+a_1+a_1^2)\ln(\varepsilon-\gamma_1^3-\gamma_2^3) + \\
&+\delta_1\ln(\gamma_1^2) + \delta_1 a_1(1+a_1)\ln(\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2) + \\
&+\delta_1^2\ln(\gamma_1^1) + a_1\delta_1^2\ln(\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1) - \delta_1^3\ln(2)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2^3(\gamma_1^1,\gamma_1^2,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3) &= (1+a_2+a_2^2+a_2^3)\ln(x) + \ln(\gamma_2^3) + \\
&+a_2(1+a_2+a_2^2)\ln(\varepsilon-\gamma_1^3-\gamma_2^3) + \delta_2\ln(\gamma_2^2) + \\
+\delta_2 a_2(1+a_2)\ln(\varepsilon-\gamma_1^2-\gamma_2^2) &+ \delta_2^2\ln(\gamma_2^1) + a_2\delta_2^2\ln(\varepsilon-\gamma_1^1-\gamma_2^1) - \delta_2^3\ln(2)\,.
\end{aligned}$$

Для построения кооперативных стратегий решается задача максимизации

$$\begin{aligned}
H^3(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3) &= (H_1^3(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3) - V_1^3(x,\delta_1))\,\cdot \\
&\cdot(H_2^2(\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3) - V_2^3(x,\delta_2)) = \\
&= (H_1^3 - V_1^3)(H_2^3 - V_2^3) \to \max_{\gamma_1^1,\gamma_2^1,\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_1^3,\gamma_2^3}\,.
\end{aligned}$$

Аналогично, из условий первого порядка $\dfrac{\partial H^3}{\partial \gamma_i^j} = 0$, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$ получим соотношения (3.8),(3.9) и

$$\gamma_2^3 = \frac{\varepsilon - \gamma_1^3(1+a_1+a_1^2+a_1^3)}{1+a_2+a_2^2+a_1^3}\,, \tag{3.10}$$

$$\gamma_1^3 = \frac{\varepsilon\gamma_1^1(a_2^2+a_2^3)}{\varepsilon a_1^2\sum\limits_{j=0}^{3} a_2^j + \gamma_1^1((a_2^2+a_2^3)\sum\limits_{j=0}^{3} a_1^j - (a_1^2+a_1^3)\sum\limits_{j=0}^{3} a_2^j)}\,. \tag{3.11}$$

Снова все параметры выражаются через одну неизвестную $\gamma_1^1$, для нахождения которой необходимо решить одно из уравнений первого порядка.

Продолжая процесс для $n$-шаговой игры, получим выигрыши игроков в следующем виде:

$$H_1^n(\gamma_1^1,\ldots,\gamma_1^n,\gamma_2^1,\ldots,\gamma_2^n) = \sum_{j=0}^{n} a_1^j\ln(x) + \sum_{j=1}^{n}\delta_1^{n-j}\ln(\gamma_1^j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_1^{n-j}\sum_{i=1}^{j} a_1^i\ln(\varepsilon-\gamma_1^j-\gamma_2^j) - \delta_1^n\ln(2) =$$

$$= \frac{1-a_1^{n+1}}{1-a_1}\ln(x) + \sum_{j=1}^{n}\delta_1^{n-j}\ln(\gamma_1^j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_1^{n-j}\frac{a_1(1-a_1^j)}{1-a_1}\ln(\varepsilon-\gamma_1^j-\gamma_2^j) - \delta_1^n\ln(2)$$

и

$$H_2^n(\gamma_1^1,\ldots,\gamma_1^n,\gamma_2^1,\ldots,\gamma_2^n) =$$

$$= \frac{1-a_2^{n+1}}{1-a_2}\ln(x) + \sum_{j=1}^{n}\delta_2^{n-j}\ln(\gamma_2^j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_2^{n-j}\frac{a_2(1-a_2^j)}{1-a_2}\ln(\varepsilon-\gamma_1^j-\gamma_2^j) - \delta_2^n\ln(2)\,.$$

Кооперативные стратегии игроков связаны как

$$\gamma_1^n = \frac{\varepsilon\gamma_1^1 a_2^{n-1}(1+a_2)}{\varepsilon a_1^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j + \gamma_1^1((a_2^{n-1}+a_2^n)\sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j - (a_1^{n-1}+a_1^n)\sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j)} =$$

$$= \frac{\varepsilon\gamma_1^1 a_2^{n-1}(1-a_2^2)(1-a_1)}{\varepsilon a_1^{n-1}(1-a_1)(1-a_2^{n+1}) + \gamma_1^1(a_2^{n-1}(1-a_2^2) - a_1^{n-1}(1-a_1^2-a_2^{n-1}(a_2^2-a_1^2)))}, \tag{3.12}$$

$$\gamma_2^n = \frac{\varepsilon-\gamma_1^n\sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j} = \frac{\varepsilon(1-a_1)(1-a_2)-\gamma_1^n(1-a_2)(1-a_1^{n+1})}{(1-a_1)(1-a_2^{n+1})}\,. \tag{3.13}$$

А стратегия первого игрока на первом шаге – $\gamma_1^1$ определяется из решения одного из уравнения условия максимума, например, последнего

$$a_1^{n-1}(\varepsilon - \gamma_1^1(1+a_1))(H_1^n - V_1^n) - a_2^{n-1}(1+a_2)\gamma_1^1(H_2^n - V_2^n) = 0\,. \quad (3.14)$$

Численное моделирование было проведено для 20-шаговой игры со следующими параметрами:

$$\varepsilon = 0.6\,, \quad \alpha_2 = 0.3\,, \quad x_0 = 0.8\,,$$
$$\delta_1 = 0.85\,, \quad \delta_2 = 0.9\,.$$

Из численного решения уравнения (3.14) получено $\gamma_1^1 = 0.177837$. Кооперативные и некооперативные выигрыши имеют вид

$$V_1^{nc}(x,\delta_1) = -13.2103 > V_1^N(x,\delta_1) = -14.6439\,,$$

$$V_2^{nc}(x,\delta_2) = -20.5328 > V_2^N(x,\delta_2) = -23.2596\,.$$

Заметим, что кооперативное поведение выгоднее для обоих игроков.

На рис. 1 представлен размер популяции и, как и ранее, заметим, что кооперативное поведение не только выгоднее игрокам, но и лучше для экологической ситуации, т.к. допускает более щадящий режим эксплуатации. На рис. 2–3 показаны выловы обоих игроков.

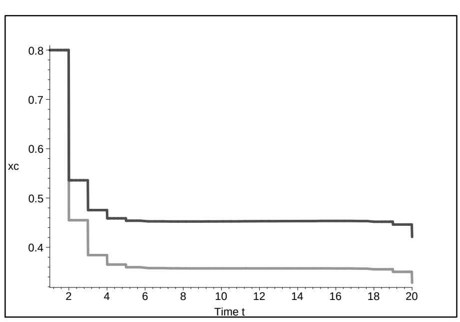


Рисунок 1. Размер популяции: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

**Теорема 3.1.** *Арбитражная схема Нэша дает преимущество игроку с меньшим коэффициентом дисконтирования при стремлении горизонта планирования к бесконечности.*

*Доказательство.* Пусть $\delta_1 < \delta_2$. Из (3.20), (3.21) устремляя $n$ к бесконечности, получим

$$\gamma_1^n \to \varepsilon(1 - a_1)\,,\ \gamma_2^n \to 0\,.$$

Если же $\delta_2 < \delta_1$, то ситуация наоборот:

$$\gamma_1^n \to 0\,,\ \gamma_2^n \to \varepsilon(1 - a_2)\,. \qquad \square$$

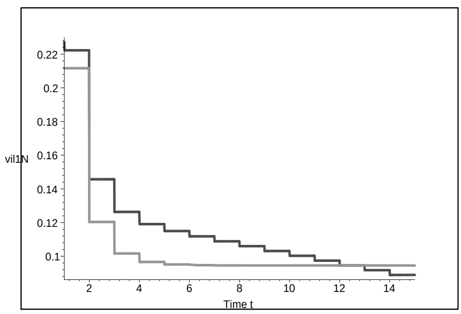


Рисунок 2. Вылов первого игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

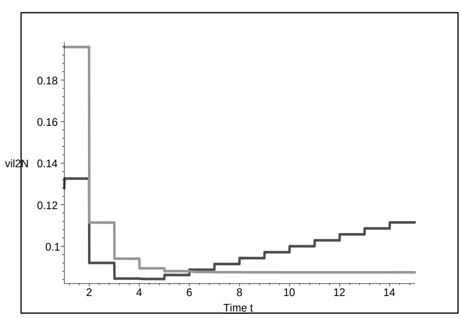


Рисунок 3. Вылов второго игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

### 3.2. $n$-шаговая игра и рекурсивная арбитражная процедура

Здесь, в отличие от предыдущего раздела, кооперативное поведение определяется с помощью рекурсивной арбитражной процедуры.

В каждый момент времени кооперативные стратегии находятся из арбитражного решения, где в качестве точки статус-кво выступают некооператвные выигрыши.

Начинаем рассмотрение с одношаговой игры и предполагаем, что в конце игры игроки делят оставшийся ресурс поровну. Пусть начальный размер популяции – $x$.

Предположим, что игроки играют индивидуально, тогда выигрыш первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} H_1^{1N} &= \ln(u_1^1) + \delta_1 \ln(\frac{1}{2}(\varepsilon x - u_1^1 - u_2^1)^\alpha) = \\ &= \ln(u_1^1) + a_1 \ln(\varepsilon x - u_1^1 - u_2^1) - \delta_1 \ln(2) \end{aligned}$$

и, аналогично, выигрыш второго –

$$H_2^{1N} = \ln(u_2^1) + a_2 \ln(\varepsilon x - u_1^1 - u_2^1) - \delta_2 \ln(2)\,.$$

Максимизируя выигрыши игроков, получим некооперативные стратегии обоих игроков

$$u_1^{1N} = \frac{\varepsilon a_2}{(1+a_1)(1+a_2)-1}x\,,\ u_2^{1N} = \frac{\varepsilon a_1}{(1+a_1)(1+a_2)-1}x\,,$$

и выигрыши в равновесии по Нэшу

$$H_1^{1N} = (1+a_1)\ln(x) + A_1^1 - \delta_1 \ln(2)\,, \tag{3.15}$$

$$H_2^{1N} = (1+a_2)\ln(x) + A_2^1 - \delta_2 \ln(2)\,, \tag{3.16}$$

где $A_1^1$ и $A_2^1$ не зависят от $x$ и имеют вид

$$A_1^1 = \ln\frac{(\varepsilon a_2)^{1+a_1} a_1^{a_1}}{((1+a_1)(1+a_2)-1)^{1+a_1}}\,,\ A_2^1 = \ln\frac{(\varepsilon a_1)^{1+a_2} a_2^{a_2}}{((1+a_1)(1+a_2)-1)^{1+a_2}}\,.$$

Для определения кооперативных стратегии решается задача максимизации произведения Нэша

$$\begin{aligned} H^{1c} = (\ln(u_1) + a_1\ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) - \delta_1\ln(2) - H_1^{1N})\,\cdot \\ \cdot(\ln(u_2) + a_2\ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) - \delta_2\ln(2) - H_2^{1N}) = \\ = (H_1^{1c} - H_1^{1N})(H_2^{1c} - H_2^{1N}) \to \max\,, \end{aligned}$$

где $H_i^{1N}$ заданы в (3.15)–(3.16).

Условия первого порядка имеют вид

$$\Big(\frac{1}{u_1}-\frac{a_1}{\varepsilon x-u_1-u_2}\Big)(H_2^{1c}-H_2^{1N})-\frac{a_2}{\varepsilon x-u_1-u_2}(H_1^{1c}-H_1^{1N})=0, \quad (3.17)$$

$$-\frac{a_1}{\varepsilon x-u_1-u_2}(H_2^{1c}-H_2^{1N})+\Big(\frac{1}{u_2}-\frac{a_2}{\varepsilon x-u_1-u_2}\Big)(H_1^{1c}-H_1^{1N})=0. \quad (3.18)$$

Вычитая (3.18) из (3.17), получим следующее соотношение:

$$u_2=\frac{\varepsilon x-u_1(1+a_1)}{1+a_2}\,.$$

Предположим, что кооперативные стратегии имеют линейный вид $u_1=\gamma_1^{1c}x\,,\ u_2=\gamma_2^{1c}x\,.$ Тогда, используя (3.17)–(3.19), они могут быть найдены из решения следующего уравнения:

$$\gamma_2^{1c}\Big(\ln(\gamma_2^{1c})+a_2\ln(\varepsilon-\gamma_1^{1c}-\gamma_2^{1c})-A_2^1\Big)=\gamma_1^{1c}\Big(\ln(\gamma_1^{1c})+a_1\ln(\varepsilon-\gamma_1^{1c}-\gamma_2^{1c})-A_1^1\Big) \quad (3.19)$$

со связью

$$\gamma_2^{1c}=\frac{\varepsilon-\gamma_1^{1c}(1+a_1)}{1+a_2}\,.$$

К сожалению, аналитическое решение не может быть найдено. Ниже будут представлены результаты численного моделирования.

Тогда кооперативные выигрыши в одношаговой игре имеют вид

$$H_1^{1c}=(1+a_1)\ln(x)+\ln(\gamma_1^{1c})+a_1\ln(\varepsilon-\gamma_1^{1c}-\gamma_2^{1c})-\delta_1\ln(2)\,, \quad (3.20)$$

$$H_2^{1c}=(1+a_2)\ln(x)+\ln(\gamma_2^{1c})+a_2\ln(\varepsilon-\gamma_1^{1c}-\gamma_2^{1c})-\delta_2\ln(2)\,. \quad (3.21)$$

Теперь перейдем к двухшаговой игре. Сначала предположим, что играют индивидуально до конца игры, тогда игроки максимизируют свои выигрыши вида

$$\begin{aligned} H_1^{2N} &= \ln(u_1^2)+\delta_1H_1^{1N}= \\ &= \ln(u_1^2)+a_1(1+a_1)\ln(\varepsilon x-u_1^2-u_2^2)+\delta_1A_1^1-(\delta_1)^2\ln(2)\,, \end{aligned}$$

и

$$H_2^{2N}=\ln(u_2^2)+a_2(1+a_2)\ln(\varepsilon x-u_1^2-u_2^2)+\delta_2A_2^1-(\delta_2)^2\ln(2)\,.$$

Максимизируя, получим некооперативные стратегии

$$u_i^{2N}=\frac{\varepsilon(a_j+a_j^2)}{(1+a_1+a_1^2)(1+a_2+a_2^2)-1}x\,,\ i,j=1,2\,,\ i\neq j\,,$$

и выигрыши в равновесии по Нэшу

$$H_1^{2N} = (1 + a_1 + a_1^2)\ln(x) + A_1^2 + \delta_1 A_1^1 - \delta_1^2 \ln(2)\,, \tag{3.22}$$
$$H_2^{2N} = (1 + a_2 + a_2^2)\ln(x) + A_2^2 + \delta_2 A_2^1 - \delta_2^2 \ln(2)\,, \tag{3.23}$$

где

$$A_i^2 = \ln \frac{(\varepsilon(a_j + a_j^2))^{1+a_i+a_i^2}(a_i + a_i^2)^{a_i+a_i^2}}{((1+a_1)(1+a_2)-1)^{1+a_i+a_i^2}}\,,\ i,j = 1,2\,,\ i \neq j\,.$$

Кооперативные стратегии определяются из решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} H^{2c} = (\ln(u_1) + \delta_1 H_1^{1c} - H_1^{2N})(\ln(u_2) + \delta_2 H_2^{1c} - H_2^{2N}) = \\ = \Big(\ln(u_1) + (a_1 + a_1^2)\ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \\ + \delta_1(\ln(\gamma_1^{1c}) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - \delta_1^2 \ln(2) - H_1^{2N}\Big) \cdot \\ \cdot \Big(\ln(u_2) + (a_2 + a_2^2)\ln(\varepsilon x - u_1 - u_2) + \\ + \delta_2(\ln(\gamma_2^{1c}) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - \delta_2^2 \ln(2) - H_2^{2N}) = \\ = (H_1^{2c} - H_1^{2N})(H_2^{2c} - H_2^{2N}\Big) \to \max\,, \end{aligned}$$

где $H_i^{1c}$ заданы в (3.20)–(3.21) и $H_i^{2N}$ определены в (3.22)–(3.23).

Аналогично, из уравнений первого порядка получим следующее уравнение для нахождения $\gamma_1^{2c}$ и $\gamma_2^{2c}$

$$\begin{aligned} \gamma_2^{2c}\Big(\ln(\gamma_2^{2c}) + (a_2 + a_2^2)\ln(\varepsilon - \gamma_1^{2c} - \gamma_2^{2c}) + \\ + \delta_2(\ln(\gamma_2^{1c}) + a_2 \ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - A_2^2 - \delta_2 A_2^1\Big) = \\ = \gamma_1^{2c}\Big(\ln(\gamma_1^{2c}) + (a_1 + a_1^2)\ln(\varepsilon - \gamma_1^{2c} - \gamma_2^{2c}) + \\ + \delta_1(\ln(\gamma_1^{1c}) + a_1 \ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - A_1^2 - \delta_1 A_1^1\Big) \end{aligned} \tag{3.24}$$

со связью

$$\gamma_2^{2c} = \frac{\varepsilon - \gamma_1^{2c}(1 + a_1 + a_1^2)}{1 + a_2 + a_2^2}\,.$$

Тогда кооперативные выигрыши в двухшаговой игре имеют следующий вид:

$$H_1^{2c} = (1 + a_1 + a_1^2)\ln(x) + \ln(\gamma_1^{2c}) + (a_1 + a_1^2)\ln(\varepsilon - \gamma_1^{2c} - \gamma_2^{2c}) +$$
$$+\delta_1(\ln(\gamma_1^{1c}) + a_1\ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - \delta_1\ln(2)\,,$$
$$H_2^{2c} = (1 + a_2 + a_2^2)\ln(x) + \ln(\gamma_2^{2c}) + (a_2 + a_2^2)\ln(\varepsilon - \gamma_1^{2c} - \gamma_2^{2c}) +$$
$$+\delta_2(\ln(\gamma_2^{1c}) + a_2\ln(\varepsilon - \gamma_1^{1c} - \gamma_2^{1c})) - \delta_2\ln(2)\,.$$

Повторяя процесс для $n$-шаговой игры получим кооперативные выигрыши

$$H_1^{nc}(\gamma_1^1,\ldots,\gamma_1^n,\gamma_2^1,\ldots,\gamma_2^n) = \sum_{j=0}^{n} a_1^j\ln(x) +$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\delta_1^{n-j}\Big[\ln(\gamma_1^{(n-j)c}) + \sum_{i=1}^{n-j} a_1^i\ln(\varepsilon - \gamma_1^{(n-j)c} - \gamma_2^{(n-j)c})\Big] - \delta_1^n\ln(2) \quad (3.25)$$

и

$$H_2^{nc}(\gamma_1^1,\ldots,\gamma_1^n,\gamma_2^1,\ldots,\gamma_2^n) = \sum_{j=0}^{n} a_2^j\ln(x) +$$
$$+\sum_{j=0}^{n-1}\delta_2^{n-j}\Big[\ln(\gamma_2^{(n-j)c}) + \sum_{i=1}^{n-j} a_2^i\ln(\varepsilon - \gamma_1^{(n-j)c} - \gamma_2^{(n-j)c})\Big] - \delta_2^n\ln(2)\,. \quad (3.26)$$

Кооперативные стратегии могут быть найдено рекурсивно из уравнений

$$\gamma_2^{nc}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\delta_2^{n-j}\Big[\ln(\gamma_2^{(n-j)c}) + \sum_{i=1}^{n-j} a_2^i\ln(\varepsilon - \gamma_1^{(n-j)c} - \gamma_2^{(n-j)c})\Big] - \sum_{j=0}^{n-1}\delta_2^j A_2^{n-j}\Big) =$$
$$\gamma_1^{nc}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\delta_1^{n-j}\Big[\ln(\gamma_1^{(n-j)c}) + \sum_{i=1}^{n-j} a_1^i\ln(\varepsilon - \gamma_1^{(n-j)c} - \gamma_2^{(n-j)c})\Big] - \sum_{j=0}^{n-1}\delta_1^j A_1^{n-j}\Big) \quad (3.27)$$

со связью

$$\gamma_2^{nc} = \frac{\varepsilon - \gamma_1^{nc}\sum\limits_{i=0}^{n} a_1^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_2^i}\,,$$

где

$$A_i^n = \ln\Big[\Big(\frac{\varepsilon\sum\limits_{j=1}^{n} a_p^j}{\sum\limits_{j=0}^{n} a_1^j\sum\limits_{j=0}^{n} a_2^j - 1}\Big)^{\sum\limits_{j=0}^{n} a_i^j}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_i^j\Big)^{\sum\limits_{j=1}^{n} a_i^j}\Big]\,, i,p = 1,2\,,\ i \neq p\,.$$

Численное моделирование для 20-шаговой игры проведено для тех же параметров. На рис. 4 представлен размер популяции, а на рис. 5–6 – выловы игроков.

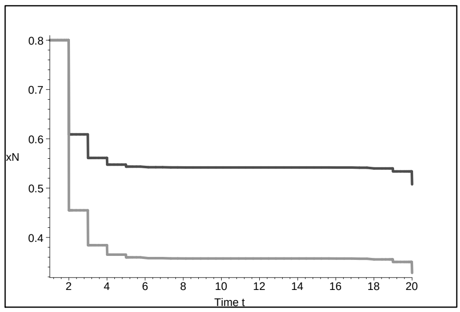


Рисунок 4. Размер популяции: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

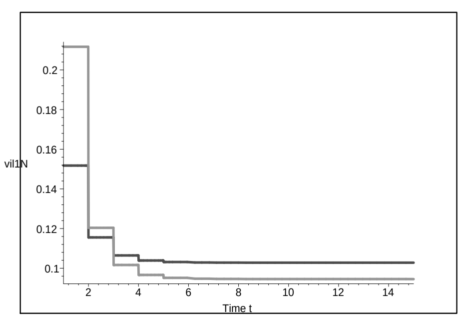


Рисунок 5. Вылов первого игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

Сравним кооперативные и некооперативные выигрыши

$$V_1^{nc}(x, \delta_1) = -14.1039 > V_1^N(x, \delta_1) = -14.6439\,,$$

$$V_2^{nc}(x, \delta_2) = -20.5108 > V_2^N(x, \delta_2) = -23.2596\,.$$

и заметим, что кооперация выгодна обоим игрокам.

Теперь сравним выигрыши игроков в данной рекурсивной процедуре с выигрышами из предыдущего раздела и заметим, что выигрыш второго игрока практически не меняется, а первого становится меньше. Можно сделать вывод, что использование рекурсивной арбитражной схемы Нэша невыгодно игроку с меньшим коэффициентом дисконтирования.

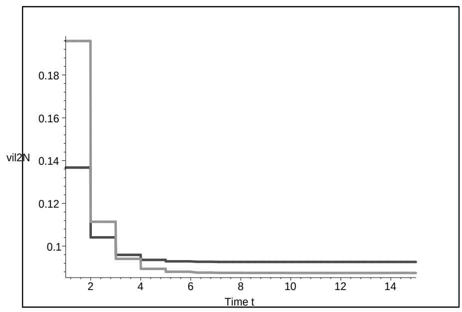


Рисунок 6. Вылов второго игрока: темная линия – кооперативное поведение, светлая – равновесие по Нэшу

## 4. Заключение

В статье исследована модель эксплуатации биоресурсов с игроками, которые используют различные коэффициенты дисконтирования. В отличии от предыдущей работы [2] кооперативные выигрыши строятся здесь без определения общего коэффициента дисконтирования.

Для построения кооперативных стратегий используются арбитражные процедуры двух видов: для всего периода продолжения игры и рекурсивно на каждом шаге. Замечено, что второй вариант не выгоден игроку с меньшим коэффициентом дисконтирования. Определены стратегии и выигрыши обоих игроков и приведены результаты численного моделирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Реттиева А.Н. *Дискретная задача разделения биоресурсов* // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 259–270.

2. Реттиева А.Н. *Дискретная задача управления биоресурсами с асимметричными игроками* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 4. С. 63–72.

3. Breton M., Keoula M.Y. *A great fish war model with asymmetric players* // Cahiers du GERAD G-2010-73, December 2010.

4. Levhari D., Mirman L.J. *The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash solution* // The Bell J. of Economics 1980. V. 11(1). P. 322–334.

5. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars and cooperation maintenance* // Ecological Modelling. 2010. V. 221. P. 1545–1553.

6. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars with many players* // International Game Theory Review. 2010. V. 12. N 4. P. 385–405.

# DISCRETE-TIME BIORESORCE MANAGEMENT PROBLEM WITH ASYMMETRIC PLAYERS

**Anna N. Rettieva**, Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc. (annaret@krc.karelia.ru).

*Abstract*: Discrete-time game-theoretic model related to a bioresource management problem (fish catching) is investigated. The players (countries or fishing firms) which harvest the fish stock are the participants of the game. Players differ in their time preferences and use different discount factors.
The main goal here is to construct the value function for the cooperative solution and to distribute the joint payoff among the players. We propose to use recursive Nash bargaining solution in order to determine cooperative behavior. We present two different approaches of bargaining procedure: as a solution for the hole game or as a solution on each time step.

*Keywords*: bioresource management problem, asymmetric players, Nash bargaining solution.