

УДК 517.977.8+517.977.52

ББК 22.161.8+22.18

ОБ ИГРЕ ЗОРГЕРА*

ДМИТРИЙ В. ХЛОПИН

Институт математики и механики

имени Н.Н. Красовского УрО РАН

620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

e-mail: khlopin@imm.uran.ru, glukanat@mail.ru

В примере 6.2 моей статьи [2] имеются ошибки. Эта заметка – лишь выправленный пример 6.2. Сам пример посвящен нелинейной модификации борьбы двух фирм за долю рынка.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, дифференциальные игры, задача на бесконечном промежутке, программные стратегии.

Пример 6.2. Для некоторых r_1, r_2, q_1, q_2 ($q_1, q_2 > 0$) рассмотрим игру (см. [4])

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \sqrt{1 - x_1} - u_2 \sqrt{x_1}, & \dot{x}_2 &= u_2 \sqrt{1 - x_2} - u_1 \sqrt{x_2}, & (6.2a) \\ x_1(0) &= x_{*1} > 0, & x_2(0) &= x_{*2} > 0, & x_{*1} + x_{*2} = 1, u_i \geq 0, \end{aligned}$$

в которой цель игроков – максимизация при больших T

$$J_i(T) = \int_0^T e^{-r_i t} \left[q_i x_i - \frac{1}{4} u_i^2 \right] dt \quad \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Будем искать для $r_1, r_2 > 0$ ограниченные на всяком компакте функции u_1^0, u_2^0 такие, что пара программных стратегий (u_1^0, u_2^0) доставляет равновесие по Нэшу вдоль пары каких-либо тестовых последовательностей $\tau_1 \triangleq (\tau_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \tau_2 \triangleq (\tau_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\tau_1, \tau_2 \uparrow \infty$). Пусть (u_1^0, u_2^0) именно таковы; обозначим через x_1^0, x_2^0 порожденные ими траектории.

Простые соображения оптимальности показывают, что равновесные траектории отделены от линий $x_i = 1, x_i = 0$, а в силу стационарной динамики, отделены равномерно на всей оси. Кроме того, для каждого $t > 0$ введем $U_i(t) \triangleq [0, u_i^0(t) + 1]$. Теперь (u_1^0, u_2^0) создает равновесие по Нэшу вдоль τ_1, τ_2 и при дополнительных ограничениях $u_i \in U_i(t)$. Следовательно можно считать, что условия [2, теорема 4.1] выполнены, и у всякого игрока i для u_i^0 найдется τ_i -исчезающее решение $(x_i^0, \lambda_i^0, \psi_i^0)$ принципа максимума, в частности, поточечно сходящиеся к нему решения $(x_i^n, \lambda_i^n, \psi_i^n)$ системы принципа максимума [2, (3.2a)–(3.2c)] вместе с краевым условием $\psi_i^n(\tau_i^n) = 0$ [2, (3.2d)].

Теперь $\mathcal{H}_i = \psi_{ii}[u_i\sqrt{1-x_i} - u_j\sqrt{x_i}] + \psi_{ij}[u_j\sqrt{1-x_j} - u_i\sqrt{x_j}] + \lambda_i e^{-r_i t} [q_i x_i - \frac{u_i^2}{4}]$. Далее, в этой игре для игрока i сопряженное уравнение (см. [2, (3.2c)]) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{ii}^n &= \frac{\psi_{ii}^n}{2} \left[\frac{u_i^0}{\sqrt{1-x_i^n}} + \frac{u_j^0}{\sqrt{x_i^n}} \right] - \lambda_i e^{-r_i t} q_i, \\ \dot{\psi}_{ij}^n &= \frac{\psi_{ij}^n}{2} \left[\frac{u_j^0}{\sqrt{1-x_j^n}} + \frac{u_i^0}{\sqrt{x_j^n}} \right], \quad \{i, j\} = \{1, 2\}.\end{aligned}\tag{6.2b}$$

Отсюда из условия трансверсальности [2, (3.2d)] выполнено $\psi_{ij}^n(\tau_i^n) = 0$. Теперь всегда $\psi_{ij}^n \equiv 0$, откуда $\psi_{ij}^0 \equiv 0$. Тогда можно переобозначить $\psi_i^n = \psi_{ii}^n, \psi_i^0 = \psi_{ii}^0$.

Из условия максимума гамильтониана [2, (3.1c)] управление $u_i^0(t)$ почти всюду максимизирует выражение $\psi_i^0(t)u_i\sqrt{1-x_i^0} - \lambda_i^0 e^{-r_i t} \frac{u_i^2}{4}$ среди $u_i \in U_i(t)$. Поскольку $u_i^0(t)$ — внутренняя точка $U_i(t)$, то $\lambda_i^0 > 0$ и $\lambda_i^0 e^{-r_i t} u_i^0(t) = 2\sqrt{1-x_i^0} \psi_i^0$. Тогда можно считать [2, (5.2a)], что $\lambda_i^0 = \lambda_j^0 = \lambda_i^n = \lambda_j^n = 1$, откуда имеем соотношение $u_i^0(t) = 2e^{r_i t} \sqrt{1-x_i^0} \psi_i^0$.

Заметим, что в случае $\psi_i^n(T) = 0$ из (6.2b) следует $\dot{\psi}_i^n(T) = -q_i e^{-r_i T} < 0$, что обеспечивает $\dot{\psi}_i^n(t) < 0$ в некоторой окрестности точки T ; значит множество позиций $\{(\psi_1, \psi_2) \mid \psi_1 \leq 0 \text{ или } \psi_2 \leq 0\}$ не выпускает решения уравнения (6.2b). Поскольку $\psi_i^n(\tau_i^n) = 0$ в силу [2, (3.2d)], то траектория ψ_i^n к моменту τ_n' еще не захвачена, откуда $\psi_i^n(t) > 0$ при $t < \tau_n'$. Теперь, переходя к пределу, получаем $\psi_i^0(t) \geq 0$ для всех $t > 0$ при $i = 1, 2$.

Введем ϕ_i правилом $\phi_i(t) \triangleq \psi_i^0(t)e^{r_i t} \geq 0$. Тогда $u_i^0(t) =$

$$= 2\psi_i^0 e^{r_i t} \sqrt{1 - x_i^0} = 2\phi_i \sqrt{1 - x_i^0}, \text{ и для } \phi_i \text{ в силу [2, (3.2b)]}$$

$$\dot{\phi}_i = r_i \phi_i - q_i + \phi_i \left[\frac{u_i^0}{2\sqrt{1 - x_i^0}} + \frac{u_j^0}{2\sqrt{x_i^0}} \right] = r_i \phi_i - q_i + \phi_i [\phi_1 + \phi_2].$$

Теперь уже и пара (ϕ_1, ϕ_2) является решением системы уравнений

$$\dot{y}_i = [r_i + y_1 + y_2]y_i - q_i \quad \{i, j\} = \{1, 2\}. \quad (6.2c)$$

Введем $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ правилом: $p(s) \triangleq s^2 - q_1 - q_2 + s \min\{r_1, r_2\}$. Заметим, что если у задачи Коши $\dot{s} = p(s), p(t_*) = s_* \geq 0$ ее решение s начинает возрастать, то оно непродолжимо, то есть уходит к $+\infty$ за конечное время. Если в некоторый момент t_* имело место $p(\phi_1(t_*) + \phi_2(t_*)) > 0$, то возьмем $s_* \triangleq p(\phi_1(t_*) + \phi_2(t_*)) > 0$, теперь в силу

$$\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2 = (\phi_1 + \phi_2)^2 + r_1 \phi_1 + r_2 \phi_2 - q_1 - q_2 \geq p(\phi_1 + \phi_2)$$

сумма $\phi_1 + \phi_2$, начиная с t_* , будет не меньше такого непродолжимого решения s , что невозможно, поскольку ϕ_1, ϕ_2 , как и ψ_1, ψ_2 , определены на всей полуоси. Итак, всегда $p(\phi_i(t) + \phi_2(t)) \leq 0$.

Поскольку вся траектория (ϕ_1, ϕ_2) содержится в компакте $\{(y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \geq 0, p(y_1 + y_2) \leq 0\}$, то она или особая точка, или предельный цикл, или притягивается к точке или циклу. Предельный цикл невозможен: на некотором его участке правые части в (6.2c) оказались бы положительными, начиная с этого момента периодическая (в случае цикла) функция $\phi_1 + \phi_2$ лишь возрастала бы, что невозможно. Аналогично невозможен случай наматывания на такой цикл. Следовательно траектория (ϕ_1, ϕ_2) — либо особая точка системы (6.2c), либо притягивающаяся к ней траектория.

В силу $q_1, q_2 > 0$ у двух гипербол $y_i(y_i + y_j + r_i) = q_i$ имеются точки пересечения, в первом квадранте такая точка ровно одна, и для (6.2c) она неустойчивый узел. Поскольку траектории не могут притягиваться к неустойчивому узлу, остается последняя возможность: (ϕ_1, ϕ_2) — особая точка системы (6.2c), то есть функции-константы ϕ_1, ϕ_2 суть координаты особой точки.

Зная ϕ_i , подставим закон $u_i^0 = 2\phi_i \sqrt{1 - x_i^0}$ в динамику (6.2a). Решая линейное уравнение $\dot{x}_i = 2\phi_i^0(1 - x_i) - 2\phi_j^0 x_i$, получим $x_i(t) = \frac{\phi_i}{\phi_i + \phi_j}(1 - e^{-2(\phi_i + \phi_j)t}) + x_i^* e^{-2(\phi_i + \phi_j)t}$, подставляя его в закон $u_i^0 =$

$= 2\phi_i\sqrt{1-x_i^0}$ получим оптимальное управление u_i^0 уже как функцию времени для всякой начальной позиции x_i^* .

Отметим, что эти управления порождают общее для всех последовательностей τ_1, τ_2 равновесие в случае $r_1, r_2 > 0$. Действительно, в силу $u_i^0(t) = 2\phi_i\sqrt{1-x_i^0} < 2\phi_i$ мультиотображения U_i можно считать глобально ограниченными, тогда f, g также глобально ограничены. При $r_1, r_2 > 0$ множители e^{-r_it} гарантируют выполнение условий [2, предложение 7.2], [2, замечание 7.1], [2, замечание 7.2]; поэтому существует τ -равновесие, не зависящее от выбора τ_1, τ_2 . Тогда это найденные выше правила $u_i^0(t) = 2\phi_i\sqrt{1-x_i^0}$.

Заметим, что в [4] рассматривался лишь случай $r_1, r_2 > 0$, а поиск равновесия сводился к проверке на оптимальность каждого управления, соответствующего хоть какому-то решению уравнения (6.2с). Ключевой факт, сузивший перебор в данном примере – неотрицательность ψ^0 – лишь следствие монотонности g_i ; см. [1, Теорема 5] (для $r_i > 0$) или [3, Corollary 7] ($\forall r_i$). Впрочем, доказательство [3, Corollary 7] также построено на понятии исчезающих решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеев С.М., Кряжковский А.В., Бесов К.О. *Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке времени в экономике* // УМН. 2012. Т. 67. №2(404). С. 3–64.
2. Хлопин Д.В. *Необходимые условия равновесия на бесконечном промежутке* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. вып. 2. С. 105–136.
3. Khlopin D.V. *Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems* // arXiv:1207.5358
4. Sorger G. *Competitive dynamic advertising: A modification of the Case game* // J. Economic Dynamics and Control. 1989. V. 13. P. 55–80.

ON SORGER GAME

Dmitry V. Khlopin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc. (khlopin@imm.uran.ru).

Abstract: This note is the correct version of [2, Example 6.2]. This example was devoted to Sorger game, the nonlinear modification of the Lanchester model of competition of two firms.

Keywords: Nash equilibrium, differential games, infinite horizon problem, open-loop strategy.