Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.1, с. 74–103

УДК 517.952, 517.977
ББК 22.18

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РИСКУ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ

Дмитрий А. Серков*
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: serkov@imm.uran.ru

В работе изучаются свойства оптимального риска и способы построения оптимальной по риску стратегии в случаях, когда помеха стеснена неизвестным функциональным ограничениям из некоторого семейства. Показано, что для одного класса управляемых систем задача разрешима в классе стратегий с полной памятью при этом оптимальный риск совпадает с оптимальным риском в классе квазистратегий. Приводится описание оптимального риска и оптимальной по риску стратегии на основе конструкций метода программных итераций. Даны примеры построения такой оптимальной стратегии, случаи и условия вырождения итерационного процесса.

---

*Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления» при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также при поддержке гранта РФФИ (проект 12-01-00290).

Ключевые слова: стратегии с полной памятью, критерий Сэвиджа, функционально ограниченные помехи, квазистратегии, метод программных итераций.

1. Введение

В работе на основе методов теории гарантирующего позиционного управления (см. [2,3,6,10]) исследуется задача минимизации риска – задача оптимального управления при наличии динамических помех в формализации на основе критерия Сэвиджа [13].

Рассматриваемая управляемая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Значения управляющих воздействий и помехи в каждый момент времени лежат в известных компактных множествах. Реализации помехи, кроме того, стеснены некоторым неизвестным заранее функциональным ограничением из заданного семейства. Реализации управления формируются стратегиями с полной памятью. Показатель качества, определенный на траекториях управляемой системы, предполагается непрерывным на соответствующем пространстве непрерывных функций.

Известно, что стратегия с полной памятью разрешает задачу оптимального гарантированного управления при L_2–компактных ограничениях на помеху и при других функциональных ограничениях, сводящихся к ним [5,11]. Опираясь на подходы и результаты из этих публикаций в работе показано, что для достаточно широкого класса управляемых систем, оптимальный риск совпадает со значением оптимального риска в классе квазистратегий; установлено совпадение величины оптимального риска в классе квазистратегий с неподвижной точкой программных итераций [8,9] функционала сожаления; приведена программная конструкция для разрешающей стратегии с полной памятью; рассмотрены случаи регулярности этой конструкции (аналоги случаев регулярности программного максимина [2,3,6,10]), а также случаи вырождения итерационного процесса, позволяющие эффективно вычислять значения стратегии; даны иллюстративные примеры.

2. Динамика системы

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in T \triangleq [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

и начальным условием $x(t_0) = z_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n$, где «$\triangleq$» означает «равно по определению». Реализации управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$ предполагаются измеримыми по Борелю функциями, удовлетворяющими геометрическим ограничениям

$$u(\tau) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q, \quad \tau \in T.$$

Множества всех таких реализаций управления и помехи обозначим соответственно $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Множества G_0, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ суть компакты в соответствующих евклидовых пространствах.

В отношении функции $f(\cdot)$ будем предполагать, что

– она определена и непрерывна по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;

– локально липшицева по второй переменной:

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leqslant L_f(S)\|x_1 - x_2\|,$$

где $(\tau, x_1), (\tau, x_2) \in S$, $u \in \mathcal{P}$, $v \in \mathcal{Q}$, S – любое ограниченное подмножество из $\mathbb{R}^{n+1}$, $L_f(S)$ – константа Липшица, зависящая от множества S;

– удовлетворяет условию подлинейного роста:

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leqslant K(1 + \|x\|), \quad K \geqslant 0$$

при любых $(\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$.

При указанных условиях решение в смысле Каратеодори задачи Коши (2.1) существует на всем интервале $[t_0, \vartheta]$ и единственно для любых реализациях управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ [1, Гл.2]. Для всех $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обозначим $x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot))$ решение в смысле Каратеодори задачи (2.1) с начальным условием $x(t_*) = x_*$.

Выделим компактное в $\mathbb{R}^{n+1}$ подмножество G пространства состояний системы (2.1), содержащее все движения, начинающиеся из G_0:

$$G \triangleq \mathbf{cl}_{T\times\mathbb{R}^n}\Big\{(\tau, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \\ x = x(\tau, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), z_0 \in G_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\Big\},$$

где $\mathbf{cl}_X Z$ обозначает замыкание множества $Z \subseteq X$ в топологии пространства X.

Для произвольных $(t_*, z_*) \in G$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ введем следующие обозначения:

$$X(t_*, z_*, \mathcal{U}, v(\cdot)) \triangleq \mathbf{cl}_{C([t_*,\vartheta];\mathbb{R}^n)}\big\{x(\cdot, t_*, z_*, u(\cdot), v(\cdot)) \mid u(\cdot) \in \mathcal{U}\big\},$$

$$X(G_0) \triangleq \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)} \bigcup_{\substack{z_0\in G_0\\ v(\cdot)\in\mathcal{V}}} X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)),$$

где $C([t_*, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных функций из $[t_*, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой равномерной сходимости. В дальнейшем для $z_0 \in G_0$ будут также использоваться обозначения

$$X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \triangleq X(t_0, z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \quad X(G_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \triangleq \bigcup_{z_0\in G_0} X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)).$$

Пусть

$$\Delta_T \triangleq \left\{\Delta \in 2^T \setminus \{\varnothing\} \;\Big|\; |\Delta| < \infty,\ \min_{\tau\in\Delta} \tau = t_0,\ \max_{\tau\in\Delta} \tau = \vartheta\right\}.$$

Для всякого $\Delta \in \Delta_T$ определим число $\mathbf{d}(\Delta) \triangleq \max\limits_{\tau\in\Delta\setminus\{\vartheta\}} \{\min\limits_{\substack{\tau'\in\Delta\\ \tau'>\tau}} \tau' - \tau\}$ (далее – *диаметр разбиения* Δ) и единственный кортеж $(\tau_i)_{i\in 1..n_\Delta} \in T^{n_\Delta}$, $n_\Delta \triangleq |\Delta|$, сохраняющий естественный порядок в T: $\tau_i > \tau_{i-1}$, $i \in 2..n_\Delta$. Элементы Δ_T будем называть *разбиениями* отрезка T. Каждое разбиение $\Delta \in \Delta_T$ порождает дизъюнктное покрытие интервала $[t_0, \vartheta)$ системой интервалов $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $\tau_{i-1}, \tau_i \in \Delta$, $i \in 2..n_\Delta$.

Следуя [9] определим множество стратегий с полной памятью. Назовем *обратной связью с полной памятью на разбиении* $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ и обозначим $\mathbf{U}^\Delta \triangleq (\mathbf{U}_i(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ всякое конечное семейство операторов вида

$$\mathbf{U}_i(\cdot) : C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{P}, \qquad i \in 0..(n_\Delta - 1).$$

Назовем *позиционной стратегией с полной памятью* и обозначим $\mathbb{U}$ всякое семейство $(\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta\in\Delta_T}$ обратных связей с полной памятью, заданных на всех разбиениях $\Delta \in \Delta_T$. Множество всех позиционных стратегий с полной памятью обозначим $\mathbf{S}$.

Назовем *пошаговым движением* из $z_0 \in \mathbb{R}^n$ и *реализацией управления* при обратной связи $\mathbf{U}^\Delta = (\mathbf{U}_i(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta-1)}$ на разбиении Δ при помехе $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и обозначим

$$x(\cdot) \triangleq x(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)), \quad u(\cdot) \triangleq u(\cdot, z_0, \mathbf{U}^\Delta, v(\cdot)),$$

соответственно, функции, удовлетворяющие равенствам

$$x(\cdot) = x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v(\cdot)), \quad u(t) = \mathbf{U}_i(x(\cdot)|_{[t_0,\tau_i]}),$$
$$t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ i \in 0..(n_\Delta - 1).$$

Пусть имеются $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$, и $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{V}$. Определим пучок движений $X(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$ как множества всех элементов $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности

$$\{(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k}) \in G_0 \times \mathbf{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U} \mid k \in \mathbb{N}\},$$

удовлетворяющие условиям

$$\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} \|x(\cdot) - x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}^{\Delta_k}, v_k(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.2}$$

Определим пучок движений $X^+(z_0, \mathbb{U}, \mathbf{V})$ как множество всех элементов $x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n)$, для которых найдутся последовательности вида

$$\{(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}^{\Delta_k}) \in G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U} \mid k \in \mathbb{N}\},$$

удовлетворяющие условиям (2.2) и условию

$$\lim_{k\to\infty} \|v(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0$$

при некотором $v(\cdot) \in \mathbf{V}$.

Пусть имеется функционал качества

$$\gamma(\cdot) : C(T; \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R} \tag{2.3}$$

непрерывный в равномерной топологии пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$.

3. Формализация задачи управления на основе критерия Сэвиджа

Рассмотрим две формализации задачи управления на основе критерия Сэвиджа [13]. Для управляемой системы (2.1) и показателя качества (2.3) определим величины оптимального результата и сожаления: пусть заданы начальное состояние $z_0 \in G_0$ помеха $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и движение $x(\cdot)$ из пучка $X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, при реализации помехи $v(\cdot)$. Этими данными определены величина $\rho(z_0, v(\cdot))$ *оптимального результата* при помехе $v(\cdot)$

$$\rho(z_0, v(\cdot)) \triangleq \inf_{x'(\cdot)\in X(z_0,\mathcal{U},v(\cdot))} \gamma(x'(\cdot)), \tag{3.1}$$

и величина $\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot))$ *сожаления*

$$\gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \triangleq \gamma(x(\cdot)) - \rho(x(t_0), v(\cdot)) \tag{3.2}$$

при реализации движения $x(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$.

В этих обозначениях *сожаление при выборе стратегии* $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ *и реализации помехи* $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ определим величиной

$$\sup_{x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)),$$

а *риск* $\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* U *при программных ограничениях на помеху* иа *оптимальный риск* $\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0)$ *при программных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0, соответственно, величинами

$$\mathbf{r}_{\text{P}}(z_0, \mathbb{U}) \triangleq \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \qquad \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) \triangleq \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0, \mathbb{U}).$$

В случае, когда реализации помехи ограничены некоторым заранее не известным подмножеством $\mathbf{V} \in \mathbf{comp}_{L_2(T;\mathbb{R}^q)}(\mathcal{V})$, также отталкиваясь от значений сожаления (3.2) на соответствующих пошаговых движениях и переходя к верхним пределам этих величин, придем к следующему определению *риска* $\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U})$ *стратегии* $\mathbb{U}$ и *оптимального риска* $\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0)$ *при* L_2*–компактных ограничениях на помеху* для начального состояния z_0:

$$\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}) \triangleq \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U},\{v(\cdot)\})}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)), \qquad \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) \triangleq \inf_{\mathbb{U}\in\mathbf{S}} \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}).$$

Следуя [6, с.24], назовем *квазистратегией* всякое отображение

$$\alpha(\cdot) : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U},$$

для которого при любых $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполняется

$$\alpha(v(\cdot))_\tau = \alpha((v, v')_\tau(\cdot))_\tau.$$

Здесь и далее используется обозначение

$$(v, v')_\tau(t) \triangleq \begin{cases} v(t), & t \in [t_0, \tau), \\ v'(t), & t \in [\tau, \vartheta]. \end{cases}$$

Обозначим $\mathbf{Q}$ – множество всех квазистратегий и определим риск квазистратегии $\alpha(\cdot)$ и оптимальный риск в классе $\mathbf{Q}$ квазистратегий, соответственно, выражениями:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)) \triangleq \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)), v(\cdot)),$$
$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \triangleq \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathbf{Q}} \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha(\cdot)).$$

Замечание 3.1. Нетрудно видеть, что определение оптимального риска в классе квазистратегий при L_2–компактных ограничениях на помехи приведет к той же величине: квазистратегии с точки зрения оптимального гарантированного результата нечувствительны к функциональным ограничениям на помехи.

Стратегию $\mathbb{U}_0 \in \mathbf{S}$ будем называть *оптимальной по риску при программных ограничениях на помеху* (*при* L_2*–компактных ограничениях на помеху*) для начального состояния $z_0 \in G_0$, если выполняется равенство $\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0)$ $(\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0))$.

Теорема 3.1. *Для каждого* $z_0 \in G_0$ *справедливы соотношения*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0). \tag{3.3}$$

3.1. Пример 1

Рассмотрим на простом примере введенные определения. Пусть управляемая система описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = u(\tau) + v(\tau), & \tau \in [t_0, \vartheta] \triangleq T,\ 0 < a < b, \\ x(t_0) = z_0 \in \mathbb{R}, & u(\tau) \in \mathcal{P} \triangleq [-a, a],\ v(\tau) \in \mathcal{Q} \triangleq [-b, b]. \end{cases}$$

Показатель качества выберем в виде $\gamma(x(\cdot)) \triangleq |x(\vartheta)|$ и обозначим

$$\begin{gathered}
A_{b+a} \triangleq \{(\tau, x) \in G \mid \tau \leqslant \vartheta, |x| \geqslant (b+a)(\vartheta-\tau)\}, \\
A_{b-a} \triangleq \{(\tau, x) \in G \mid \tau \leqslant \vartheta, |x| \leqslant (b-a)(\vartheta-\tau)\}, \\
A_{b\pm a} \triangleq A_{b+a} \cup A_{b-a}, \\
\tau_* \triangleq \tau_*(t,z) \triangleq \begin{cases} t + \frac{b-a}{b}(\vartheta - t), & (t,z) \in A_{b-a}, \\ t + \frac{(b-a)(\vartheta-t)+|z|}{2b}, & (t,z) \in G \setminus A_{b\pm a}, \\ \vartheta, & (t,z) \in A_{b+a}, \end{cases} \\
A_{(t,z)} \triangleq \big\{(\tau, x) \in G \mid \tau \in [t, \vartheta],\ |x| \leqslant \max\{0, b(\tau_*(t,z) - \tau)\}\big\}.
\end{gathered}$$

В непосредственно проверяется, что в рассматриваемой задаче управления имеют место соотношения

$$\rho(z_0, v(\cdot)) = \max\left\{0,\ \left|z_0 + \int\limits_T v(s)\,ds\right| - a(\vartheta - t_0)\right\},$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) = \begin{cases} \frac{b-a}{b} a(\vartheta - t_0), & (t_0, z_0) \in A_{b-a}, \\ \frac{b-a}{b} \cdot \frac{(b+a)(\vartheta - t_0) - |z_0|}{2}, & (t_0, z_0) \notin A_{b\pm a}, \\ 0, & (t_0, z_0) \in A_{b+a}. \end{cases}$$

Стратегия $\mathbb{U} \triangleq (\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta \in \Delta_T} \in \mathbf{S}$, в которой все элементы $\mathbf{U}_i$ обратной связи с полной памятью $\mathbf{U}^\Delta \triangleq (\mathbf{U}_i)_{i \in 0..(n_\Delta - 1)}$ на произвольном разбиении Δ имеют вид

$$\mathbf{U}_i(x(\cdot)) \triangleq \begin{cases} 0, & (\tau_i, x(\tau_i)) \in A_{(t_0, x(t_0))}, \\ -a\,\mathrm{sign}(x(\tau_i)), & (\tau_i, x(\tau_i)) \notin A_{(t_0, x(t_0))}, \end{cases}$$

является оптимальной по риску при программных помехах для начальной позиции z_0.

4. Оптимальная по риску стратегия

Поскольку наименьшая из величина в (3.3) – это оптимальный риск в классе квазистратегий, особый интерес представляют те функциональные ограничения на помехи и те условия, при которых соответствующий оптимальный риск в классе позиционных стратегий с полной памятью совпадает с оптимальным риском в классе квазистратегий. В этом случае класс позиционных стратегий с полной памятью является (при данном начальном состоянии) неулучшаемым в том смысле, что использование при выработке значений допустимого управления любой информации о прошлых и текущих значениях реализуемой допустимой помехи не является для управляющей стороны существенной – не позволяет ей улучшить значение оптимального риска.

Далее приводятся условия на управляемую систему, при которых достигается упомянутый неулучшаемый результат, и вид разрешающей стратегии с полной памятью.

Предлагаемая оптимальная по риску стратегия (обозначим ее $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}$) при построении управления симулирует движение вспомогательной управляемой системы – y-модели. Для формировании движения y-модели на очередном интервале разбиения по наблюдениям за движением управляемой системы строится помеха как решение обратной задачи динамики [4,12], близкая в подходящем смысле к помехе в исходной системе. Управление в y-модели определяется как контруправление, экстремальное к множеству оптимальных траекторий системы при этой восстановленной помехе. Выбранное таким образом управление затем используется в «реальной» управляемой системе (2.1) на следующем интервале разбиения. При измельчении шага разбиения движения y-модели будут сходиться в $C(T;\mathbb{R}^n)$ к оптимальным движениям, а движения исходной системы – к соответствующим движениям y-модели. Эти сходимости обеспечивают оптимальное значение критерия Сэвиджа и, как следствие, оптимальность по риску стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}$.

Приведем формальное определение стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}$. В определении используются «целевые» множества $\mathcal{W}(z,\bar{v}(\cdot)) \subseteq C(T;\mathbb{R}^n)$, полученные из траекторий, порождаемых «почти оптимальными» квазистратегиями при восстановленной реализации помехи $\bar{v}(\cdot)$ (4.9): для всех $z \in G_0$, $\tau \in T$, $y(\cdot) \in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ и $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{W}(z,\bar{v}(\cdot)) \triangleq \bigcap_{\varepsilon>0} \mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)}\Big\{ \bigcup_{\substack{\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z,\alpha(\cdot)) \\ \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z)+\varepsilon}} x(\cdot,t_0,z,\alpha(\bar{v}(\cdot)),\bar{v}(\cdot)) \Big\}, \qquad (4.1)$$

где $\mathbf{cl}_{C(T;\mathbb{R}^n)} A$ означает «замыкание множества A в топологии пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$», и проекция $w(\cdot|\tau,y(\cdot),\bar{v}(\cdot))$ некоторого элемента

$y(\cdot) \in C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)$ на это множество

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in \underset{w(\cdot)\in\mathcal{W}(y(t_0),\bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))|_{[t_0,\tau]}}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \quad (4.2)$$

Здесь использовано обозначение

$$\bar{v}_{[t_0,\tau]}(t) \triangleq \begin{cases} \bar{v}(t), & t \in [t_0,\tau], \\ \bar{v}(\tau), & t \in [\tau,\vartheta]. \end{cases}$$

Определим также множества вида

$$\nu(u, x(\cdot), \tau, \tau') \triangleq \underset{v\in\mathcal{Q}}{\operatorname{argmin}} \left\| \frac{x(\tau') - x(\tau)}{\tau' - \tau} - f(\tau, x(\tau), u, v) \right\|, \quad (4.3)$$

заданные для произвольных $u \in \mathcal{P}$, $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, $x(\cdot) \in C(T;\mathbb{R}^n)$.

Для произвольного разбиения $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta} \in \Delta_T$ определим его подмножество $\Delta' \triangleq \{\tau'_i \triangleq \tau_{i'(i)} \mid i \in 1..n_{\Delta'}\} \in \Delta_T$, также являющееся разбиением интервала управления T:

$$i'(i) \triangleq \min\{k \in 0..n_\Delta \mid \tau_k \geqslant i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'}\}, \quad i \in 0..n_{\Delta'},$$
$$n_{\Delta'} \triangleq \min\{n \in \mathbb{N} \mid n^2\, \mathbf{d}(\Delta) \geqslant 1\}.$$

Для любого $\tau \in T$ обозначим $i_\tau \triangleq \max\{i \in 0..n_{\Delta'} \mid \tau'_i \leqslant t\}$; при этом будет справедливо включение $\tau \in [\tau'_{i_\tau}, \tau'_{i_\tau+1})$.

Замечание 4.1. Разбиение $\Delta' \subset \Delta$ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{d}(\Delta') \leqslant (\vartheta - t_0)\sqrt{\mathbf{d}(\Delta)} + \mathbf{d}(\Delta)$$

и является «почти равномерными» – сумма отклонений его моментов от ближайших моментов равномерного разбиения $\{t_0 + i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'} \mid i \in 0..n_{\Delta'}\}$ оцениваются величиной $\mathbf{d}(\Delta')$:

$$\sum_{i\in 0..n_{\Delta'}} |\tau_i^{\Delta'} - i(\vartheta - t_0)/n_{\Delta'}| \leqslant (n_{\Delta'} + 1)\,\mathbf{d}(\Delta) \leqslant \sqrt{\mathbf{d}(\Delta)} + 2\,\mathbf{d}(\Delta). \quad (4.4)$$

Определим обратную связь $\mathbf{U}_{\mathrm{S}}^{\Delta} = (\mathbf{U}_{\mathrm{S}i}(\cdot))_{i\in 0..(n_\Delta - 1)}$ на произвольном разбиении $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ следующим образом: вначале индуктивно определим значения элементов $\mathbf{U}_{\mathrm{S}i'(i)}$ для всех моментов τ'_i, $i \in 0..(n_{\Delta'} - 1)$ разбиения Δ' – формально это соответствует определению обратной связи с полной памятью $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta'}$ на разбиении Δ'. После этого распространим значения обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta'}$ на все элементы обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{S}}^{\Delta}$.

Перейдем к определению обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta'}$ на разбиении Δ'.

База индукции: зафиксируем некоторые $u_* \in \mathcal{P}$, $v_* \in \mathcal{Q}$ и для всех

$$x_0(\cdot) \in C([t_0, \tau_0], \mathbb{R}^n), \qquad x_{i'(1)}(\cdot) \in C([t_0, \tau_{i'(1)}], \mathbb{R}^n)$$

положим (заметим $0 = i'(0)$):

$$\mathbf{U}_{\mathrm{s}0}(x_0(\cdot)) \triangleq \mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(1)}(x_{i'(1)}(\cdot)) \triangleq u_*, \qquad y_0(\tau_0) = x_0(\tau_0), \qquad \bar{v}_0 \triangleq v_*.$$

Шаг индукции: если при некотором $i \in 1..(n_{\Delta'} - 2)$ значения обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(k)}(x_{i'(k)}(\cdot)) \in \mathcal{P}$ определены для всех $x_{i'(k)}(\cdot) \in \in C([t_0, \tau'_k], \mathbb{R}^n)$, $k \in 0..i$, а элементы $y_k(\cdot) \in C([t_0, \tau'_k], \mathbb{R}^n)$, $\bar{v}_k \in \mathcal{Q}$ – для всех $k \in 0..(i-1)$, то для любых $\tau \in [\tau'_{i-1}, \tau'_i]$, $x_{i'(i+1)}(\cdot) \in C([t_0, \tau'_{i+1}], \mathbb{R}^n)$ положим

$$\bar{v}_i \in \nu\big(\mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(i)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)|_{[t_0,\tau'_i]}), x_{i'(i+1)}(\cdot), \tau'_i, \tau'_{i+1}\big), \tag{4.5}$$

$$y_i(\tau) = y_{i-1}(\tau'_{i-1}) + \int_{\tau'_{i-1}}^{\tau} f(t, y_i(t), \mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(i)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)|_{[t_0,\tau'_i]}), \bar{v}_{i-1})dt, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(i+1)}(x_{i'(i+1)}(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle y_i(\tau'_i) - w(\tau'_i \mid \tau'_i, y_i(\cdot)), f(\tau'_i, y_i(\tau'_i), u, \bar{v}_i)\rangle. \tag{4.7}$$

Обратная связь с полной памятью $\mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta'}$ на разбиении Δ' определена. Теперь для определения обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{S}}^{\Delta}$ на произвольном разбиении $\Delta \in \Delta_T$ при всех $i \in 0..n_\Delta$, $i \notin \{i'(k) \mid k \in 0..n_\Delta\}$, $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i], \mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathbf{U}_{\mathrm{s}i}(x_i(\cdot)) \triangleq \mathbf{U}_{\mathrm{s}i'(i_{\tau_i})}(x_i(\cdot)|_{[t_0,\tau_{i'(i_{\tau_i})}]}). \tag{4.8}$$

Тем самым определена и стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{s}} \triangleq (\mathbf{U}^\Delta)_{\Delta \in \Delta_T}$.

Обозначим $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}_{\Delta'}$ помеху, восстановленную в процессе управления:

$$\bar{v}(\tau) \triangleq \bar{v}_{i_\tau}, \quad \tau \in [\tau'_{i_\tau}, \tau'_{i_\tau+1}). \tag{4.9}$$

Замечание 4.2. В определении обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{S}}^{\Delta}$, по–существу, участвуют лишь моменты из разбиения Δ': элементы $\mathbf{U}_{\mathrm{s}i}$ обратной связи $\mathbf{U}_{\mathrm{S}}^{\Delta}$, отвечающие другим моментам разбиения Δ, не изменяют значения обратной связи.

Стратегия $\mathbb{U}_{\text{s}}$ является универсальной, то есть не зависит от начальной позиции z_0 управляемой системы (2.1).

Для $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{P}$ введем в рассмотрение фактор–множество $\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim}$ множества $\mathcal{Q}$, порожденное отношением эквивалентности $\underset{txu}{\sim}$:

$$(v_1 \underset{txu}{\sim} v_2) \Leftrightarrow (f(t,x,u,v_1) = f(t,x,u,v_2)), \qquad v_1, v_2 \in \mathcal{Q}.$$

Теорема 4.1. *Пусть для системы* (2.1) *фактор–множества* $\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim}$ *не зависят от* u, x*:*

$$\mathcal{Q}/\underset{txu}{\sim} = \mathcal{Q}/\underset{tx'u'}{\sim} \triangleq \mathbb{Q}_t \qquad \text{для всех } u, u' \in \mathcal{P},\ (t,x),(t,x') \in G. \quad (4.10)$$

Тогда для любого начального состояния $z_0 \in G_0$ *справедливы равенства*

$$\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0). \quad (4.11)$$

Стратегия $\mathbb{U}_{\text{s}}$*, заданная выражениями* (4.1), (4.2), (4.5) – (4.8) *является стратегией, оптимальной по риску при* L_2*–компактных ограничениях на помехи для любого начального состояния* $z_0 \in G_0$*.*

Замечание 4.3. Нетрудно видеть, что при выполнении условий теоремы 4.1 стратегия $\mathbb{U}_{\text{s}}$ будет также оптимальной по риску при программных ограничениях на помеху.

Замечание 4.4. Условию (4.10) удовлетворяет, например, следующее семейство управляемых систем:

$$\dot{x}(t) = f_1(t,x(t),u(t)) + f_2(t,x(t),u(t)) \cdot f_3(t,v(t)),$$

где $f_2(\cdot)$ – матрица–функция размерности $n \times q$, $f_1(\cdot)$, – вектор–функция (столбец) размерности n, и $f_3(\cdot)$ – вектор–функция размерности q и для всех $t \in T$ ядро линейного оператора $f_2(t,x,u)$: $\mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^n$ не зависит от параметров x, u при их изменении в пределах $x \in G|_t$, $u \in \mathcal{P}$.

5. Программные итерации функционала сожаления

Обозначим $\mathbf{CV}^*_t$, $t \in T$ множество всех непрерывных функционалов, определенных на прямом произведении множеств

$$X(G_0)|_{[t_0,t]} \times \mathcal{V}|_{[t_0,t]} \subset C([t_0,t],\mathbb{R}^n) \times L_2([t_0,t],\mathbb{R}^q)$$

с топологией, индуцированной топологией произведения объемлющих пространств, и положим $\mathbf{CV}^*_T \triangleq \prod\limits_{t\in T} \mathbf{CV}^*_t$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{\Gamma}$ (программной итерации, см. [7–9]), преобразующий всякое семейство $(\Psi_t)_{t\in T} \in \mathbf{CV}^*_T$ в семейство функционалов $(\mathbf{\Gamma}(\Psi_t))_{t\in T} \in \mathbf{CV}^*_T$ вида

$$\mathbf{\Gamma}(\Psi_t)(x(\cdot),v(\cdot)) \triangleq \sup_{\substack{\tau\in[t,\vartheta]\\ v'(\cdot)\in\mathcal{V}}} \inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \Psi_\tau((x,x')_t(\cdot),(v,v')_t(\cdot)).$$

Введем в рассмотрение семейство функционалов $(\varepsilon^0_t)_{t\in T} \in \mathbf{CV}^*_T$ (программных максиминов функционала сожаления): для произвольных $t \in T$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(G_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ положим

$$\varepsilon^0_t(x(\cdot),v(\cdot)) \triangleq \sup_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} \inf_{\substack{x'(\cdot)\in\\ X(t,x(t),\mathcal{U},v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x,x')_t(\cdot),(v,v')_t(\cdot))$$

итерации оператора $\mathbf{\Gamma}$ на семействе $(\varepsilon^0_t)_{t\in T}$, а также предельные значения итераций

$$\varepsilon^k_t(\cdot) \triangleq \mathbf{\Gamma}(\varepsilon^{k-1}_t(\cdot)),\ \varepsilon_t(x(\cdot),v(\cdot)) \triangleq \lim_{k\to\infty} \varepsilon^k_t(x(\cdot),v(\cdot)), k \in \mathbb{N}\ , t \in T. \quad (5.1)$$

При всех $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot), x'(\cdot) \in X(G_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ с одинаковым начальным состоянием $x(t_0) = x'(t_0)$ выполнены равенства

$$\varepsilon_t(x(\cdot),v(\cdot)) \geqslant 0, \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_\vartheta(x(\cdot),v(\cdot)) = \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot),v(\cdot)), \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot)) = \varepsilon_{t_0}(x'(\cdot),v'(\cdot)).$$

Иными словами, значение $\varepsilon_{t_0}(x(\cdot),v(\cdot))$ функционала $\varepsilon_{t_0}(\cdot)$ полностью определяется вектором $x(t_0)$. Заметим также, что неравенства (5.2) суть следствия включения $x(\cdot) \in X(G_0,\mathcal{U},v(\cdot))$ и, вообще говоря, не выполняется при произвольном $x(\cdot) \in X(G_0)$.

Теорема 5.1. *Для любых* $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0,\mathcal{U}, v(\cdot))$ *справедливы равенства*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)).$$

Определим новый вариант стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{S}}$ (за которым мы оставим прежнее обозначение), отличающийся от предыдущего только описанием «целевых множеств» и проекцией на них движений y–модели: для всех $\tau \in T$, $y(\cdot) \in C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$, $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{I}_t(z, \bar{v}(\cdot)) \triangleq \{x(\cdot) \in X(z,\mathcal{U}, \bar{v}(\cdot)) \mid \varepsilon_t(x(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), \bar{v}(\cdot))\}, \quad (5.4)$$

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in \underset{w(\cdot)\in\mathcal{I}_\tau(y(t_0),\bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))|_{[t_0,\tau]}}{\operatorname{argmin}} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \quad (5.5)$$

Теорема 5.2. *Пусть для системы* (2.1) *выполнено условие* (4.10). *Тогда для любых* $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0,\mathcal{U}, v(\cdot))$ *справедливы равенства*

$$\varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0).$$

Стратегия $\mathbb{U}_{\mathrm{S}}$, *заданная выражениями* (5.4), (5.5), (4.5) – (4.8) *является стратегией, оптимальной по риску при* L_2*–компактных ограничениях на помехи для любого начального состояния* $z_0 \in G_0$.

Известно, что метод программных итераций позволяет продвинуться в конструктивном направлении в задачах оптимизации гарантированного результата. Эти возможности возникают в известных случаях вырождения сходимости (5.1). Эти возможности, присутствуют и в задачах оптимизации риска и поиска риск–оптимальных стратегий. Можно проверить, что в рассмотренном выше примере 1 уже первая итерация совпадает с оптимальным риском.

В следующем разделе будут рассмотрены условия, при которых сам программный максимин (нулевая итерация) совпадает с оптимальным риском.

6. Случай риск–регулярности

Рассмотрим случай, когда в некотором начальном состоянии программный максимин функционала сожаления $\varepsilon^0_{t_0}(\cdot)$ совпадает с величиной оптимального риска $\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(\cdot)$ при L_2–компактных ограничениях на помеху. По аналогии со свойством регулярности в задачах оптимизации гарантии [2,3,6,10] будем называть это свойство риск–регулярностью.

Замечание 6.1. В силу определений свойство риск–регулярности означает равенство
$$\mathbf{r}_{\text{c}}(z_0) = 0 \tag{6.1}$$
и, значит, для этого начального состояния в $\mathbf{S}$ существует стратегия, которая гарантирует оптимальный результат $\rho(z_0, v(\cdot))$ какова бы ни была помеха $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. То есть, эта стратегия действует столь же эффективно, как если бы помеха $v(\cdot)$ была известна ей заранее. Понятно, что круг задач управления, в которых существуют такие стратегии, сравнительно узок и вместе с тем, как и в задачах оптимизации гарантированного результата, это свойство позволяет эффективно строить решения соответствующей задачи.

Замечание 6.2. Свойство риск–регулярности задачи управления, вообще говоря, не следует из классического свойства регулярности: так в примере 1 во всех начальных состояниях имеет место регулярный случай – цена игры совпадает с программным максимином показателя качества. Вместе с тем, оптимальный риск в этой задаче не везде равняется нулю.

Для произвольных $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $z_0 \in G_0$ введем в рассмотрение множество $R(z_0, v(\cdot)) \subset C(T; \mathbb{R}^n)$ вида
$$R(z_0, v(\cdot)) \triangleq \operatorname*{argmin}_{x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))} \gamma(x(\cdot)).$$
Определение корректно, так как множество $X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot)) \subset C(T; \mathbb{R}^n)$ компактно в равномерной топологии пространства $C(T; \mathbb{R}^n)$, а функционал $\gamma(\cdot)$ непрерывен в этой же топологии.

Условие 6.1. *В начальном состоянии $z_0 \in G_0$ для произвольного момента $t \in T$ и произвольного конечного множества помех $v_j(\cdot) \in \in \mathcal{V}$, $j \in 1..m$ справедлива импликация*
$$v_1(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = v_m(\cdot)|_{[t_0,t]} \;\Rightarrow\; \bigcap_{j \in 1..m} R(z_0, v_j(\cdot))|_{[t_0,t]} \neq \varnothing. \tag{6.2}$$

Определим стратегию $\mathbb{U}^0_{\text{s}}$, которая отличается от $\mathbb{U}_{\text{s}}$ только описанием «целевых множеств» и проекцией на них движений y–модели:

для всех $z_0 \in G_0$, $\tau \in T$, $y(\cdot) \in C([t_0, \tau], \mathbb{R}^n)$, $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{Z}_\tau(z_0, v(\cdot)) \triangleq \bigcap_{v'(\cdot)\in\mathcal{V}} R(z_0, (v, v')_\tau(\cdot))|_{[t_0,\tau]}, \tag{6.3}$$

$$w(\cdot|\tau, y(\cdot), \bar{v}(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{w(\cdot)\in\mathcal{Z}_\tau(y(t_0),\bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))} \|w(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([t_0,\tau],\mathbb{R}^n)}. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1. *Если для некоторого* $z_0 \in G_0$ *имеет место равенство* (6.1)*, то в этом начальном состоянии* z_0 *выполнено условие* 6.1*.*

Если выполнено условие (4.10) *и в начальном состоянии* $z_0 \in G_0$ *выполнено условие 6.1, то имеют место равенства*

$$0 = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0)$$

и стратегия $\mathbb{U}^0_{\text{S}}$*, заданная выражениями* (6.3), (6.4), (4.5) – (4.8)*, является стратегией оптимальной по риску при* L_2*–компактных ограничениях на помеху для начального состояния* $z_0 \in G_0$*.*

6.1. Пример 2

Проиллюстрируем применение теоремы 6.1 на задаче управления из примера 1 в случае $a \geqslant b$. Проверяется, что при любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ движение вида

$$x(t, z_0, v(\cdot)) \triangleq \begin{cases} y(t, z_0, v(\cdot)), & t \in [t_0, t^*), \\ 0, & t \in [t^*, \vartheta], \end{cases} \tag{6.5}$$

$$y(t, z_0, v(\cdot)) \triangleq z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\, ds - (t - t_0) a \operatorname{sign}(z_0),$$

$$t^* \triangleq \min\{\vartheta, \min\{t \in T \mid y(t, z_0, v(\cdot)) = 0\}\}$$

принадлежит $R(z_0, v(\cdot))$ и для любых $t \in T$, $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, выполняется импликация

$$(v'(\cdot)|_{[t_0,t]} = v(\cdot)|_{[t_0,t]}) \quad \Rightarrow \quad (x(t, z_0, v'(\cdot))|_{[t_0,t]} = x(t, z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]}).$$

Из этих соотношений следует выполнение условия 6.1. Другие условия теоремы также выполняются. Значит, в силу теоремы, для всех начальных состояний $z_0 \in G_0$ верно равенство $\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) = 0$.

Рассмотрим следующую (позиционную) стратегию $\mathbb{U}_0$: для любого разбиения $\Delta \in \Delta_T$, $\Delta = (\tau_i)_{i\in 0..n_\Delta}$ и любого элемента $\mathbf{U}_i$, $i \in \in 0..(n_\Delta - 1)$ обратной связи $\mathbf{U}_0^\Delta \in \mathbb{U}_0$ и для всех $x_i(\cdot) \in C([t_0, \tau_i]; \mathbb{R}^n)$ положим

$$\mathbf{U}_i(x_i(\cdot)) \triangleq -a\,\mathrm{sign}(x_i(\tau_i)).$$

Это стратегия экстремального прицеливания на множество $\{(\tau, 0) \mid \tau \in T\}$. Не сложно проверить, что именно эта стратегия порождает движения вида (6.5) и, соответственно, имеет нулевой риск

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_0) = \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}} |x(\vartheta, z_0, v(\cdot))| - \rho(z_0, v(\cdot)) = 0.$$

7. Доказательства

Для упрощения обозначений и в силу того, что значение управления изменяется только в моменты разбиения Δ' в приводимом далее доказательстве будем игнорировать моменты $\tau \in \Delta \setminus \Delta'$ и соответствующие элементы обратной связи. Нумерация и обозначения будут использоваться так, как если бы $\Delta = \Delta'$. Главное, что нам потребуется – это стремление к нулю диаметра этих разбиений при стремлении к нулю диаметров исходных разбиений и оценка (4.4).

Итак, для произвольно выбранных $z_0 \in G_0$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ рассмотрим произвольное движение $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{s}}, \{v_0(\cdot)\})$. По определению имеются $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$ и последовательности вида

$$\{(z_{0k}, v_k(\cdot), \Delta_k, \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta_k}) \in G_0 \times \mathcal{V} \times \Delta_T \times \mathbb{U} \mid k \in \mathbb{N}\},$$

такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_0(\cdot) - v_k(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)} = 0$,

$$\lim_{k\to\infty} z_{0k} = z_0, \tag{7.1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - x_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{7.2}$$

Здесь и далее для всех $k \in \mathbb{N}$ используются обозначения

$$x_k(\cdot) \triangleq x(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta_k}, v_k(\cdot)), \quad u_k(\cdot) \triangleq u(\cdot, z_{0k}, \mathbf{U}_{\mathrm{L}}^{\Delta_k}, v_k(\cdot)).$$

Напомним, что по определению $u_k(\cdot)$ кусочно–постоянны. Обозначим также

$$x_{ki} \triangleq x_k(\tau_{ki}), \quad u_{ki} \triangleq u_k(\tau_{ki}), \quad \tau_{ki} \in \Delta_k, \quad i \in 0..(k-1)$$

значения этих функций в моменты разбиения Δ_k. Движение y-модели, в соответствии с (4.6), определяется уравнениями

$$y_k(\tau) = z_{0k} + \int\limits_{t_0}^{\tau} f(s, y_k(s), \bar{u}_k(s), \bar{v}_k(s))\, ds, \quad \tau \in T,$$

и, исходя из того, что $\bar{u}_k(\cdot)$, $\bar{v}_k(\cdot)$ кусочно–постоянны, обозначим

$$y_{ki} \triangleq y_k(\tau_{ki}), \quad \bar{v}_{ki} \triangleq \bar{v}_k(\tau_{ki}), \quad \bar{u}_{ki} \triangleq \bar{u}_k(\tau_{ki}), \quad i \in 0..(k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В момент $\tau_{k(i+1)}$, $i \in 0..(k-1)$, следуя (4.3), (4.5), определим значение $\bar{v}_{ki} \in \mathcal{Q}$ помехи $\bar{v}_k(\cdot)$, действующей в y–модели на интервале $[\tau_{ki}, \tau_{k(i+1)})$: $\bar{v}_{ki} \in \nu(u_{ki}, x_k(\cdot), \tau_{ki}, \tau_{k(i+1)})$.

В соответствии с определениями (4.7), (4.2), управление $\bar{u}_{ki} \in \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям

$$\bar{u}_{ki} \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{P}} \langle y_{ki} - w_{ki}(\tau_{ki}), f(\tau_{ki}, y_{ki}, u, \bar{v}_{ki}) \rangle, \tag{7.3}$$

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{w(\cdot) \in \\ \mathcal{W}(x_k(t_0), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}, \tag{7.4}$$

$$u_{k(i+1)} = \bar{u}_{ki}, \quad i \in 0..(k-1),\ k \in \mathbb{N}.$$

7.1. Доказательство теоремы 3.1

Последнее неравенство следует из включения

$$X(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}) \subset X^+(z_0, \mathbb{U}, \{v(\cdot)\}),$$

справедливого при всех $z_0 \in G_0$, $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

Для обоснования первого неравенства обратимся к классу $\tilde{\mathbf{Q}}$ многозначных квазистратегий $\alpha : \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0,\vartheta]\}}$ на пространстве обобщенных управлений (см.[6–8]).

Для всякой стратегии $\mathbb{U} \in \mathbf{S}$ рассмотрим многозначное отображение $\alpha_{\mathbb{U}} : \mathcal{V} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0,\vartheta]\}}$ вида

$$\begin{aligned}\mathcal{V} \ni v(\cdot) \mapsto\ & \alpha_{\mathbb{U}}(v(\cdot)) \\ & \triangleq \{\eta \in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\} \mid \varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \in X(z_0, \mathbb{U}, v(\cdot))\},\end{aligned}$$

где $\{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\}$ – множество всех допустимых программных управлений, согласованных на интервале $[t_0, \vartheta]$ с сосредоточенной помехой $v(\cdot)$ (см. [6, Гл. IV, § 2, с. 162]). Тогда отображение $\alpha_{\mathbb{U}}$ является многозначной квазистратегией на пространстве обобщенных управлений, определенной на подмножестве $\mathcal{V} \subset \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}$. Из определения $\alpha_{\mathbb{U}}$ сразу получим неравенство

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_{\mathbb{U}}) \triangleq \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ \eta\in\alpha_{\mathbb{U}}(v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta), v(\cdot)) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V}\\ x(\cdot)\in X(z_0,\mathbb{U},v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) = \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0, \mathbb{U}),$$

откуда в силу произвольного выбора $\mathbb{U}$ вытекают неравенства

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) \triangleq \inf_{\alpha\in\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha) \leqslant \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_{\mathbb{U}}) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{P}}(z_0). \tag{7.5}$$

С другой стороны, исходя из непрерывности по первой переменной функционала $\gamma_{\mathbf{s}}$ и плотности при каждом $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ пучка движений $X(z_0,\mathcal{U}, v(\cdot))$, порожденного сосредоточенными программными управлениями, в пучке программных движений $\{\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \mid \eta \in$ $\in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\}\}$, порожденных программными управлениями η, согласованными с помехой $v(\cdot)$ (см. [6, Гл. IV]), можно установить равенство

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0). \tag{7.6}$$

Из соотношений (7.5), (7.6) следует искомое неравенство.

7.2. Доказательство теоремы 4.1

В силу леммы 7.2 (приведена ниже) множество

$$\mathcal{W}(x_k(t_0), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}$$

непусто, компактно в $C([t_0, \tau_{ki}]; \mathbb{R}^n)$ и не зависит от значений $\bar{v}_k(\tau)$ при $\tau \in [\tau_{ki}, \vartheta]$. Таким образом, определения (7.4) корректны.

Из условия (4.10) теоремы 4.1 и сходимости (7.2) в силу леммы 7.3 следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{7.7}$$

Если для движений y-модели будет также выполнено неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0), \tag{7.8}$$

то, с учетом (7.7) и непрерывности в $C(T, \mathbb{R}^n)$ показателя качества $\gamma(\cdot)$, получим оценку

$$\gamma(x_0(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) + \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0). \tag{7.9}$$

Так как неравенство (7.9) выполнено для произвольно выбранных $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{s}}, \{v_0(\cdot)\})$, то будут выполнены и соотношения

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U}_{\mathrm{s}},\{v(\cdot)\})}} \{\gamma(x(\cdot)) - \rho(z_0, v(\cdot))\} \triangleq \mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{s}}) \leqslant \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0),$$

которые в совокупности с неравенствами (3.3) эквивалентны равенствам (4.11) и оптимальности по риску стратегии $\mathbb{U}_{\mathrm{s}}$ при L_2–компактных ограничениях на помеху.

Итак, для завершения доказательства достаточно проверить выполнение соотношения (7.8).

При всех $\tau \in T$ обозначим $q_\tau \in \mathbb{Q}_\tau$ класс эквивалентности, содержащий элемент $v_0(\tau)$. В силу условия (4.10) имеем равенства

$$f(\tau, x, u, v) = f(\tau, x, u, v_0(\tau)), \qquad (\tau, x, u, v) \in G \times \mathcal{P} \times q_\tau.$$

Отсюда, учитывая равенства (7.30), (7.1) и непрерывность правой части рассматриваемой системы (2.1) по $v \in \mathcal{Q}$ равномерную по всем переменным в области определения, получим сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \|x(\cdot, t_0, z_{0k}, u(\cdot), \bar{v}_k(\cdot)) - x(\cdot, t_0, z_0, u(\cdot), v_0(\cdot))\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{7.10}$$

Из (7.10) и определения множеств $X(z_{0k}, \mathcal{U}, \bar{v}_k(\cdot))$ получим сходимость этих множеств к множеству $X(z_0, \mathcal{U}, v_0(\cdot))$ в метрике Хаусдорфа

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(X(z_{0k}, \mathcal{U}, \bar{v}_k(\cdot)), X(z_0, \mathcal{U}, v_0(\cdot))) = 0. \tag{7.11}$$

Отсюда, в силу определения функции оптимального результата (3.1) и непрерывности показателя качества, следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) = \rho(z_0, v_0(\cdot)). \tag{7.12}$$

Из равенств (7.11), (7.12), непрерывности функции $G_0 \ni z \mapsto \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z) \in$ $\in \mathbb{R}$ – оптимального риска в классе квазистратегий (лемма 7.1) следует сходимость сверху по включению в $C(T;\mathbb{R}^n)$ последовательности множеств $\mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))$ к множеству $\mathcal{W}(z_0,v_0(\cdot))$ (4.1): для произвольной последовательности $\{z_k(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot)) \mid k \in \mathbb{N}\}$ выполняется импликация

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k(\cdot) - z_0(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0(\cdot) \in \mathcal{W}(z_0,v_0(\cdot)).$$

Если из определений (7.3), (7.4) управления в y-модели следует сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\mathrm{H}}_{\mathrm{C(T;\mathbb{R}^n)}}(\mathcal{W}(x_k(t_0),\bar{v}_k(\cdot)),\{y_k(\cdot)\}) = 0, \tag{7.13}$$

то справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \gamma_{\mathbf{s}}(y_k(\cdot),\bar{v}_k(\cdot)) \\ &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \max_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))} \gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot),\bar{v}_k(\cdot)) \\ &\leqslant \lim_{k\to+\infty} \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_{0k}) = \mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0),\end{aligned}$$

из которой с учетом (7.12) получим искомое неравенство (7.8). В приведенных соотношениях первое неравенство следует из (7.13) и непрерывности $\gamma(\cdot)$, второе неравенство – из (7.29) (лемма 7.2), последнее равенство – из непрерывности функции $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(\cdot)$ (лемма 7.1).

Обоснование соотношения (7.13) следует схеме рассуждений из [3, лемма 96.1] с той разницей, что нам не надо заботиться об u–стабильности множеств $\mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))$: в силу определения (4.1) каждое движение $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{w}(\tau) \in \mathcal{F}_u(\tau,w(\tau),\bar{v}_{ki}), \qquad \text{для п.в. } \tau \in [\tau_{ki},\tau_{k(i+1)}], \tag{7.14}$$

и, стало быть, любое продолжение $w(\cdot) \in \mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))$ движения $w_{ki}(\cdot)$, определенного в (7.4), будет удовлетворять включению (7.14) с начальным условием $w(\tau_{ki}) = w_{ki}(\tau_{ki})$. Таким образом, свойство, необходимое в рассуждениях, в данном случае сводится к непустоте множества $\mathcal{W}(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))$ при всех нужных значениях аргументов (лемма 7.2).

7.3. Доказательство теоремы 5.1

Для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$ проверим неравенство

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) \geqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)). \tag{7.15}$$

С этой целью вначале, используя индукцию по $k \in \mathbb{N}$, установим для любой квазистратегии $\alpha(\cdot)$ и любых $k \in \mathbb{N}$, $t \in T$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ следующие неравенства:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \triangleq \sup_{v' \in \mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha v'}(\cdot), v'(\cdot)) \geqslant \varepsilon_t^k(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)), \tag{7.16}$$

где $x_{\alpha v}(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot))$.

В самом деле, для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \\
&\quad \geqslant \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha(v,v')_t}(t), \mathcal{U}, (v,v')_t(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha(v,v')_t}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \\
&\qquad\qquad = \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot))
\end{aligned}$$

Следовательно, переходя в левой части этих неравенств к верхней грани по $v, v' \in \mathcal{V}$, а в правой части – по $v' \in \mathcal{V}$, для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ получим неравенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) &= \sup_{v, v' \in \mathcal{V}} \gamma_{\mathbf{s}}(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \\
&\geqslant \sup_{v' \in \mathcal{V}} \inf_{\substack{x'(\cdot) \in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v,v')_t(\cdot)) \\
&= \varepsilon_t^0(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)).
\end{aligned}$$

составляющие базу индукции.

Шаг индукции: пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ при произвольных $\tau \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполнены неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \geqslant \varepsilon_\tau^k(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot)).$$

Тогда для любых $t \in T$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) &\geqslant \varepsilon^k_\tau(x_{\alpha(v,v')_t}(\cdot), (v, v')_t(\cdot)) \\ &\geqslant \inf_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t, x_{\alpha(v,v')_t}(t), \mathcal{U}, (v,v')_t(\cdot))}} \varepsilon^k_\tau((x_{\alpha(v,v')_t}, x')_t(\cdot), (v, v')_t(\cdot)) \\ &= \inf_{\substack{x'(\cdot)\in \\ X(t, x_{\alpha v}(t), \mathcal{U}, v'(\cdot))}} \varepsilon^k_\tau((x_{\alpha v}, x')_t(\cdot), (v, v')_t(\cdot)).\end{aligned}$$

Переходя в правой части этих неравенств к верхней грани по $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $\tau \in [t, \vartheta]$, в силу определений оператора $\mathbf{\Gamma}$ и функционала $\varepsilon^{k+1}_\tau(\cdot)$, получим неравенства $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0, \alpha) \geqslant \varepsilon^{k+1}_t(x_{\alpha v}(\cdot), v(\cdot))$, справедливые для произвольных $t \in T$, $\alpha(\cdot) \in \mathbf{Q}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Таким образом, обоснован шаг индукции.

Ввиду соотношений $\varepsilon^{k-1}_t(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon^k_t(x(\cdot), v(\cdot))$ и определения (5.1) из неравенств (7.16) при $t = t_0$ следует искомое неравенство (7.20).

Для обоснования обратного неравенства (и для избежания многочисленных технических деталей) еще раз обратимся к классу $\tilde{\mathbf{Q}}$ многозначных квазистратегий $\alpha : \{\mathcal{E}_\lambda, [t_0, \vartheta]\} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}}$ на пространстве обобщенных управлений (см. [6, Гл. IV]).

Рассмотрим многозначное отображение $\alpha_0 : \mathcal{V} \mapsto 2^{\{\mathcal{H}_\lambda, [t_0, \vartheta]\}}$ вида

$$\alpha_0(v(\cdot)) \triangleq \{\eta \in \{\Pi(v(\cdot)), [t_0, \vartheta]\} \mid \varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta) \in \mathcal{I}_T(z, v(\cdot))\},$$

где для всех $z \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ множества $\mathcal{I}_T(z, v(\cdot)) \subset X(G_0)$ заданы выражением

$$\mathcal{I}_T(z, v(\cdot)) \triangleq \bigcap_{t\in T} \mathcal{I}_t(z, v(\cdot)).$$

Отметим, что при всех $z \in G_0$, $t \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ множества $\mathcal{I}_T(z, v(\cdot))$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{I}_T(z, v(\cdot)) \neq \varnothing, \tag{7.17}$$

$$\mathcal{I}_T(z, v(\cdot)) \in \mathbf{comp}(C(T, \mathbb{R}^n)), \tag{7.18}$$

$$\mathcal{I}_T(z, v(\cdot))|_{[t_0,t]} = \mathcal{I}_T(z, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]}. \tag{7.19}$$

Свойства (7.17), (7.18) следуют из непустоты, замкнутости и центрированности семейства множеств $(\mathcal{I}_t(z, v(\cdot)))|_{t\in T}$ (свойство центрированности устанавливается индуктивно на основании (7.31) (7.33)).

Проверим (7.19): пусть $z \in G_0$, $t \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, тогда пользуясь (7.33) и (7.32) и определением $\mathcal{I}_\tau(z, v(\cdot))$ получим

$$\mathcal{I}_T(z, (v, v')_t(\cdot))|_{[t_0,t]} \triangleq \left(\bigcap_{\tau \in T} \mathcal{I}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\right)\Bigg|_{[t_0,t]}$$
$$= \bigcap_{\tau \in T} \big(\mathcal{I}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \bigcap_{\tau \in [t_0,t]} \big(\mathcal{I}_\tau(z, (v, v')_t(\cdot))\big)|_{[t_0,t]}$$
$$= \bigcap_{\tau \in [t_0,t]} \big(\mathcal{I}_\tau(z, v(\cdot))\big)|_{[t_0,t]} = \bigcap_{\tau \in T} \big(\mathcal{I}_\tau(z, v(\cdot))\big)|_{[t_0,t]}$$
$$= \left(\bigcap_{\tau \in T} \mathcal{I}_\tau(z, v(\cdot))\right)\Bigg|_{[t_0,t]} \triangleq \mathcal{I}_T(z, v(\cdot))|_{[t_0,t]}.$$

Свойства (7.17)–(7.19) влекут включение $\alpha_0 \in \tilde{\mathbf{Q}}$. И, следовательно, для любых $z_0 \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x(\cdot) \in X(z_0, \mathcal{U}, v(\cdot))$, с учетом (5.3), выполняются соотношения

$$\mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) \leqslant \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0, \alpha_0) \triangleq \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ \eta \in \alpha_0(v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(\varphi(\cdot, t_0, z_0, \eta), v(\cdot))$$
$$\leqslant \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in \mathcal{I}_T(z, v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \sup_{\substack{v(\cdot) \in \mathcal{V} \\ x(\cdot) \in \mathcal{I}_\vartheta(z, v(\cdot))}} \gamma_{\mathbf{s}}(x(\cdot), v(\cdot)) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)).$$

Вновь пользуясь равенством (7.6), получим искомое неравенство

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\tilde{\mathrm{Q}}}(z_0) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)).$$

7.4. Доказательство теоремы 5.2

Выберем произвольные $z_0 \in G_0$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{s}}, \{v_0(\cdot)\})$. Для этих данных вновь воспользуемся обозначениями и фактами, приведенными в начале раздела 7, исключая определения величин $w_{ki}(\cdot)$, которые теперь, в соответствии с (5.5), имеют вид

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{w(\cdot) \in \\ \mathcal{I}_{\tau_{ki}}(x_k(t_0), (\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))|_{[t_0,\tau_{ki}]}}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}.$$

Схема доказательства теоремы 5.2 следующая: из равенства $\mathbf{r}_{\mathrm{Q}}(z_0) = \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot))$ (см. теорему 5.1) и неравенства

$$\mathbf{r}_{\mathrm{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\mathrm{s}}) \leqslant \varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)), \tag{7.20}$$

в котором стратегия с полной памятью $\mathbb{U}_{\text{s}}$ задана условиями теоремы 5.2, с учетом неравенств (3.3), получим соотношения

$$\varepsilon_{t_0}(x(\cdot), v(\cdot)) = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}_{\text{s}}),$$

эквивалентные утверждению теоремы.

Обоснование неравенства (7.20) следует схеме рассуждений при доказательстве соотношений (7.9) и опирается на свойства множеств $\mathcal{I}_t(z, \bar{v}(\cdot))$ (лемма 7.4).

7.5. Доказательство теоремы 6.1

Докажем первую часть теоремы. Пусть $z_0 \in G$, $t \in T$ и реализации помехи $v_i(\cdot) \in \mathcal{V}$, $i \in 1..m$ таковы, что

$$v_1(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = v_m(\cdot)|_{[t_0,t]}. \qquad (7.21)$$

Из условия (6.1) и неравенств (3.3) следует соотношение

$$\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = 0. \qquad (7.22)$$

Рассмотрим последовательность квазистратегий $\{\alpha_i \in \mathbf{Q} \mid i \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0, \alpha_i) \leqslant 1/i$, $i \in \mathbb{N}$. В силу (7.22) такая последовательность, конечно, существует. Обозначим

$$x_{ij}(\cdot) \triangleq x(\cdot, t_0, z_0, \alpha_i(v_j(\cdot)), v_j(\cdot)), \quad i \in \mathbb{N},\ j \in 1..m.$$

Из условия (7.21) следуют равенства

$$x_{i1}(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = x_{im}(\cdot)|_{[t_0,t]}, \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (7.23)$$

Переходя при необходимости (но не более m раз) к подпоследовательности последовательности индексов $i \in \mathbb{N}$ будем считать каждую из последовательностей $(x_{ij}(\cdot))_{i\in\mathbb{N}}$, $j \in 1..m$ сходящейся в $C(T; \mathbb{R}^n)$. Обозначим соответствующие пределы $x_{0j}(\cdot)$:

$$\lim_{i\to\infty} \|x_{ij}(\cdot) - x_{0j}(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \quad j \in 1..m.$$

Из равенств (7.23) следует

$$\bar{x}(\cdot) \triangleq x_{01}(\cdot)|_{[t_0,t]} = \ldots = x_{0m}(\cdot)|_{[t_0,t]}, \quad i \in \mathbb{N}. \qquad (7.24)$$

В силу непрерывности показателя качества $\gamma(\cdot)$ (2.3) в топологии пространства $C(T;\mathbb{R}^n)$ из определения движений $x_{0j}(\cdot)$ получим

$$\gamma(x_{0j}(\cdot)) = \lim_{i\to\infty} \gamma(x_{ij}(\cdot)) \\ \leqslant \lim_{i\to\infty} \rho(z_0, v_j(\cdot)) + 1/i = \rho(z_0, v_j(\cdot)), \quad j \in 1..m.$$

То есть, $x_{0j}(\cdot) \in R(z_0, v_j(\cdot))$, $j \in 1..m$. Из этих включений и равенств (7.24) получим соотношения $\bar{x}(\cdot) \in R(z_0, v_j(\cdot))|_{[t_0,t]}$, $\quad j \in 1..m$, обосновывающие следствие в импликации (6.2). Первая часть теоремы доказана.

При выполнении условия (6.2) множества $\mathcal{Z}_\tau(y(t_0), \bar{v}_{[t_0,\tau]}(\cdot))$ непусты и стратегия $\mathbb{U}^0_{\text{s}}$ корректно определена. Пусть выбраны произвольные $z_0 \in G_0$, $v_0(\cdot) \in \mathcal{V}$, $x_0(\cdot) \in X^+(z_0, \mathbb{U}^0_{\text{s}}, \{v_0(\cdot)\})$. Воспользуемся еще раз обозначениями, введенными в начале пункта 7, изменив в соответствии с (6.4) определения величин $w_{ki}(\cdot)$:

$$w_{ki}(\cdot) \in \operatorname*{argmin}_{\substack{w(\cdot)\in \\ \mathcal{Z}_{\tau_{ki}}(y_k(t_0),(\bar{v}_k)_{[t_0,\tau_{ki}]}(\cdot))}} \|w(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t_0,\tau_{ki}];\mathbb{R}^n)}.$$

Схема доказательства второй части теоремы следующая: для произвольно выбранных $v_0(\cdot)$, $x_0(\cdot)$ установим неравенство

$$\gamma(x_0(\cdot)) \leqslant \rho(x_0(t_0), v_0(\cdot)), \tag{7.25}$$

откуда, в силу произвольности выбора, получим соотношения

$$\mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}^0_{\text{s}}) \triangleq \sup_{\substack{v(\cdot)\in\mathcal{V} \\ x(\cdot)\in X^+(z_0,\mathbb{U}^0_{\text{s}},v(\cdot))}} \gamma(x(\cdot)) - \rho(x_(t_0), v_(\cdot)) \leqslant 0.$$

С учетом неравенств (3.3) и $0 \leqslant \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0)$ получим соотношения

$$0 = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{P}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0) = \mathbf{r}_{\text{C}}(z_0, \mathbb{U}^0_{\text{s}})$$

эквивалентные утверждению теоремы.

Если для движений y-модели будут выполняться неравенство

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \rho(z_0, v_0(\cdot)) \tag{7.26}$$

и равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C(T;\mathbb{R}^n)} = 0, \tag{7.27}$$

то мы получим оценку (7.25). Таким образом, остается лишь проверить выполнение соотношений (7.26), (7.27).

Равенство (7.27) следует из леммы 7.3.

Обратимся к неравенству (7.26). Пусть для движений y-модели имеет место сходимость

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\text{H}}_{\text{C}(\text{T};\mathbb{R}^{\text{n}})}(\mathcal{Z}_\vartheta(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)), \{y_k(\cdot)\}) = 0, \tag{7.28}$$

тогда справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\limsup_{k\to\infty} \gamma(y_k(\cdot)) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \max_{w(\cdot)\in\mathcal{Z}_\vartheta(z_{0k},\bar{v}_k(\cdot))} \gamma(w(\cdot))$$
$$\leqslant \limsup_{k\to\infty} \rho(z_{0k}, \bar{v}_k(\cdot)) = \rho(z_0, v_0(\cdot)),$$

обосновывающая искомое неравенство (7.26). В приведенных соотношениях первое неравенство следует из (7.28) и непрерывности $\gamma(\cdot)$, второе неравенство – из (7.34), последнее равенство – из сходимости (7.12), которая в свою очередь следует из условия (4.10).

Доказательство равенства (7.28) следует доказательству равенства (7.13), так как множество $\mathcal{Z}_t(z, v(\cdot))$ обладает всеми необходимыми свойствами (лемма 7.5), которые использовались при доказательстве этого соотношения.

Лемма 7.1. *Существует монотонная функция* $\mu_{\mathbf{r}_{\text{Q}}}(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ *такая, что* $\lim\limits_{\delta\to+0} \mu_{\mathbf{r}_{\text{Q}}}(\delta) = 0$ *и для всех* $z, z' \in G_0$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{r}_{\text{Q}}(z) - \mathbf{r}_{\text{Q}}(z')| \leqslant \mu_{\mathbf{r}_{\text{Q}}}(\|z - z'\|).$$

Лемма 7.2. *Для любых* $z \in G_0$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ *множество* $\mathcal{W}(z, v(\cdot))$ *не пусто, компактно в* $C(T, \mathbb{R}^n)$, *изменяется полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра* $z \in G_0$ *и удовлетворяет соотношениям*

$$\max_{w(\cdot)\in\mathcal{W}(z,v(\cdot))} \gamma_{\mathbf{s}}(w(\cdot), v(\cdot)) = \mathbf{r}_{\text{Q}}(z), \quad z \in \mathcal{W}(z)|_{t_0},\ z \in G_0, \tag{7.29}$$

$$\mathcal{W}(z, v(\cdot))|_{[t_0,\tau]} = \mathcal{W}(z, (v, v')_\tau(\cdot))|_{[t_0,\tau]}$$

для всех $\tau \in T$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$.

Лемма 7.3. *Пусть управляемая система* (2.1) *удовлетворяет условию* (4.10)*. Тогда из* (7.2) *следует* (7.7)*.*

Лемма 7.3 есть следствие аналогичного более сильного утверждения (см. [5, лемма 5.3]), опирающегося на определение движений $x_k(\cdot)$, $y_k(\cdot)$ и порождающих их реализаций управления и помехи. В частности, в этом утверждении устанавливаются следующие равенства

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^{\text{н}}_{\mathbb{R}^{\text{q}}}(\{\bar{v}_k(\tau)\}, q_\tau) = 0, \quad \text{при п.в. } \tau \in T. \tag{7.30}$$

Лемма 7.4. *Для любых $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $z_0 \in G_0$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ справедливы следующие соотношения:*

$$\mathcal{I}_t(z_0, v(\cdot)) \neq \varnothing, \tag{7.31}$$

$$\mathcal{I}_t(z_0, v(\cdot)) \in \mathbf{comp}(C(T, \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{I}_t(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t']} = \mathcal{I}_t(z_0, (v, v')_{t'}(\cdot))|_{[t_0,t']}, \tag{7.32}$$

$$\mathcal{I}_t(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]} \subset \mathcal{I}_{t'}(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]}. \tag{7.33}$$

Лемма 7.5. *Для произвольных $z_0 \in G_0$, $t, t' \in T$, $t \leqslant t'$, $v(\cdot), v'(\cdot) \in \in \mathcal{V}$ верны соотношения $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \subseteq \mathcal{Z}_{t'}(z_0, v(\cdot))|_{[t_0,t]}$, $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \in \in \mathbf{comp}(C([t_0, t]; \mathbb{R}^n))$, $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) = \mathcal{Z}_t(z_0, (v, v')_t(\cdot))$ и*

$$\mathcal{Z}_\vartheta(z_0, v(\cdot)) \subset R(z_0, v(\cdot)). \tag{7.34}$$

Кроме того, если выполнено условие 6.1, то $\mathcal{Z}_t(z_0, v(\cdot)) \neq \varnothing$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука, 1977.

2. Красовский Н. Н. *Дифференциальная игра сближения–уклонения, I, II* // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1973. № 2,3.

3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука. 1974.

4. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. *О моделировании управления в динамической системе* // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1983. № 2. С. 51–60.

5. Серков Д. А. *Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. Вып. 2. С. 71–95.

6. Субботин А. И., Ченцов А. Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука. 1981.

7. Ченцов А.Г. *Об игровой задаче на минимакс функционала* // Доклады АН СССР 1976. Т. 230. № 5. С. 1047–1050.

8. Ченцов А.Г. *Об игровой задаче сближения в заданный момент времени* // Математический сборник. 1976. Т. 99(141). № 3. С. 394–420.

9. Чистяков С.В. *К решению игровых задач преследования* // Прикл. матем. мех.. 1977. Т. 41. № 5. С. 825–832.

10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer-Verlag, 1988.

11. Kryazhimskii A.V. *The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full memory strategies* // Constantin Caratheodory: an intern, tribute. 1991. World Sci. Publ. P. 636–675.

12. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse Problem of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions.* London: Gordon and Breach., 1995.

13. Savage L.J. *The theory of statistical decision* // J. Amer. Stat. Association. 1951. N. 46. P. 55–67.

OPTIMAL RISK CONTROL UNDER FUNCTIONALLY RESTRICTED DISTURBANCES

Dmitry A. Serkov, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N.Krasovskii, Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Cand.Sc., Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, assistant professor (serkov@imm.uran.ru.)

Abstract: We study the optimal risk and how to build the strategy optimal for risk in cases where disturbance is constrained by some unknown functional limitation of a certain family. It is shown that for a class of controlled systems, the problem is solvable in the class of strategies with full memory; the optimal risk coincides with the optimal risk in the class quasi-strategy. The description of the optimal risk and the risk–optimal strategies based on the programmed iterations of the regret functional are provided. Examples of a risk–optimal strategy, cases and conditions of degeneration of the iterative process are given.

Keywords: strategy with full memory, Savage criterion, functionally limited disturbance, quasi-strategy, the method of program iterations.