Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.1, с. 27–44

УДК 519.833
ББК 22.18

УРАВНОВЕШИВАНИЕ КОНФЛИКТОВ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. I. АНАЛОГ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ*

Владислав И. Жуковский
МГУ им М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Константин Н. Кудрявцев
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
454080, Челябинск, пр-кт Ленина, 76
e-mail: kudrk@mail333.com

Формализуется и устанавливается существование (в смешанных стратегиях) одного из видов гарантированных равновесий в бескоалиционной игре при неопределенности.

Ключевые слова: седловая точка, бескоалиционная игра, неопределенности, смешанные стратегии, равновесие по Нэшу, векторные оптимумы по Слейтеру.

Mais comme tout est compense' dans meilleur des mondes possiles[1].

---

* Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00783

[1]Но так как все уравновешено в этом лучшем из миров (фр.); из письма А.И. Герцена к Н.А. Герцен 7 июня 1851 г.; приобретающее иронический смысл соединение двух употребительных выражений: из книги французского философа Азинса (1766-1845) «Об уравновешенности в судьбах людей» и из философской повести Вольтера (1694-1778) «Кандид».

1. Введение

1.1. Однокритериальная задача при неопределенности

Однокритериальную задачу при неопределенности (ОЗН) образует тройка

$$\langle\, \mathrm{X}_1, \mathrm{Y}, f_1(x_1, y)\,\rangle, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{X}_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ – множество x_1 стратегий ЛПР (лица, принимающего решения), $\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество неопределенных факторов y, $f_1(x_1, y)$ – определенная на $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y}$ функция полезности (выигрыша) ЛПР, которую он стремится возможно увеличить, учитывая реальность появления любого $y \in \mathrm{Y}$.

Для задачи (1.1) теория игр предлагает решения двух видов:

во-первых, седловая точка $(x_1^0, y^0) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{Y}$, определяемая равенствами:

$$\max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} f_1(x_1, y^0) = f_1(x_1^0, y^0) = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^0, y), \tag{1.2}$$

во-вторых, максимин f_1^g и максиминная стратегия $x_1^g \in \mathrm{X}_1$, введенная Вальдом [10] в 1939 г.:

$$f_1^g = \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1^g, y) = \max_{x_1 \in \mathrm{X}_1} \min_{y \in \mathrm{Y}} f_1(x_1, y). \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. Именно цепочка равенств (1.2) и используется далее при формализации гарантированного балансового равновесия как решения бескоалиционной игры N лиц при неопределенности (БИН) – – первого вида предлагаемых гарантированных равновесий.

1.2. Вспомогательные сведения

Приведем некоторые сведения из теорий исследования операций, многокритериальных задач, бескоалиционных игр. Так в [2, с. 160] доказывается следующий факт:

Утверждение 1.1. *Предположим, что*

1^0. *скалярная функция $F(x, y)$ непрерывна на произведении компактов $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^n$, $\mathrm{Y} \subset \mathbf{R}^m$ и Y – выпукло;*

2^0. *функция $F(x, y)$ при каждом $x \in \mathrm{X}$ строго выпукла по y на Y, то есть для каждого $x \in \mathrm{X}$ и при любых $y^{(1)}, y^{(2)} \in \mathrm{Y}$*

$$F(x, \alpha y^{(1)} + (1-\alpha) y^{(2)}) < \alpha F(x, y^{(1)}) + (1-\alpha) F(x, y^{(2)})$$

при всяких $\alpha = const \in (0,1)$.

Тогда будет непрерывной m*-вектор–функция* $y(x) : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$*, определяемая равенством*

$$\min_{y \in \mathrm{Y}} F(x,y) = F(x, y(x)) \quad \forall x \in \mathrm{X}. \tag{1.4}$$

Приведем некоторые сведения из теории многокритериальных задач. Для двух векторов $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \ldots, f_N^{(k)})$ $(k = 1,2)$

$$\begin{aligned}
&f^{(1)} = f^{(2)} \Longleftrightarrow [f_i^{(1)} = f_i^{(2)} \ \ (i \in \mathbf{N})];\\
&f^{(1)} \neq f^{(2)} \Longleftrightarrow \rceil\,(f^{(1)} = f^{(2)});\\
&f^{(1)} \geqslant f^{(2)} \Longleftrightarrow [f_i^{(1)} \geqslant f_i^{(2)} \ \ (i \in \mathbf{N})];\\
&f^{(1)} \geq f^{(2)} \Longleftrightarrow (f^{(1)} \geqslant f^{(2)}) \ \wedge \ (f^{(1)} \neq f^{(2)});\\
&f^{(1)} \not\geq f^{(2)} \Longleftrightarrow \rceil\,(f^{(1)} \geq f^{(2)});\\
&f^{(1)} > f^{(2)} \Longleftrightarrow [f_i^{(1)} > f_i^{(2)} \ \ (i \in \mathbf{N})];\\
&f^{(1)} \not> f^{(2)} \Longleftrightarrow \rceil\,(f^{(1)} > f^{(2)}).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Далее n-вектор $x \in \mathrm{X}$ называем *ситуацией*, m-вектор $y \in \mathrm{Y}$ – неопределенным фактором, причем $y \in \mathrm{Y}$ – *чистой неопределенностью*, а $y(\cdot) \in \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}$ – *контрситуацией*, здесь Y^{X} – множество всех m-вектор–функций $y(x)$, заданных на множестве X со значениями в Y; в дальнейшем ограничимся контрситуациями $y(\cdot) : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, непрерывными на X, то есть $y(\cdot) \in C(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Определение 1.1. *Для* N*-критериальной задачи* $\Gamma = \langle\, \mathrm{Y}, f(x,y) \,\rangle$ *при фиксированной ситуации* $x^* \in \mathrm{X}$ *чистая неопределенность*
a) $y_S \in \mathrm{Y}$ *минимальна по Слейтеру в* Γ*, если*

$$f(x^*, y) \not< f(x^*, y_S) \quad \forall\, y \in \mathrm{Y},$$

b) $y_P \in \mathrm{Y}$ *минимальна по Парето в* Γ*, если*

$$f(x^*, y) \not\leq f(x^*, y_P) \quad \forall\, y \in \mathrm{Y}.$$

Для N*-критериальной задачи* $\Gamma(x) = \langle\, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, f(x,y) \,\rangle$ $\forall x \in \mathrm{X}$*, определенной для каждого* $x \in \mathrm{X}$*, контрситуация*
c) $y_S(x) \in \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}$ *минимальна по Слейтеру, если при каждом* $x \in \mathrm{X}$

$$f(x, y) \not< f(x, y_S(x)) \quad \forall\, y \in \mathrm{Y},$$

d) $y_P(x) \in \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}$ *минимальна по Парето, если при каждом* $x \in \mathrm{X}$

$$f(x, y) \not\leq f(x, y_P(x)) \quad \forall y \in \mathrm{Y}.$$

Утверждение 1.2. $a)$ *Если в* $\Gamma(x^*) = \langle\, \mathrm{Y}, f(x^*, y)\, \rangle$ *множество* Y *есть компакт, а* $f(x^*, y)$ *непрерывна на* Y*, то множество* Y_S *минимальных по Слейтеру чистых неопределенностей* y_S *будет* [8, *с.*137] *непустым компактом;*

$b)$ *чистая неопределенность* $y_S \in \mathrm{Y}$*, найденная из равенства*

$$\min_{y\in \mathrm{Y}} \sum_{i\in \mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^*, y) = \sum_{i\in \mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^*, y_S) \tag{1.6}$$

при каких–либо $\alpha_i = const \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i > 0$*, будет* [8, *с.* 68 – 69] *минимальной по Слейтеру для* $\Gamma(x^*)$*;*

$c)$ *чистая неопределенность* $y_P \in \mathrm{Y}$*, найденная из*

$$\min_{y\in \mathrm{Y}} \sum_{i\in \mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^*, y) = \sum_{i\in \mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^*, y_P) \tag{1.7}$$

при $\alpha_i = const > 0$ $(i\in\mathbf{N})$ *минимальна по Парето для* $\Gamma(x^*)$ [8, *с.* 71];

$d)$ *из* (1.5) *также следует, что множество минимальных по Слейтеру неопределенностей* $\mathrm{Y}_S \supseteq \mathrm{Y}_P$ *– множество минимальных по Парето чистых неопределенностей* y_P *для* $\Gamma(x^*)$*.*

Перейдем к бескоалиционной игре N лиц

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbf{N}}\, \rangle, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{N} = \{1, \ldots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков; $\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество чистых стратегий x_i для i-го игрока $(i\in\mathbf{N})$; в игре (1.8) игроки, не объединяясь в коалиции, одновременно выбирают каждый свою стратегию $x_i \in \mathrm{X}_i$, в результате образуется ситуация $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathrm{X} = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i$; на множестве $\mathrm{X} \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbf{N}} n_i)$ определена априори скалярная функция выигрыша i-го игрока $f_i[x]$, значение которой в конкретной ситуации есть выигрыш i-го игрока. На содержательном уровне, цель i-го игрока в игре (1.8): выбор такой своей стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$, чтобы в реализовавшейся ситуации x его выигрыш стал возможно большим.

В 1949 г. Джоном Нэшем было формализовано решение игры (1.8) – ситуация, в последствии названная «равновесной по Нэшу» (опубликовано в [9]).

Определение 1.2. *Ситуация* $x^e = (x_1^e, \ldots, x_N^e) \in \mathrm{X}$ *называется равновесной по Нэшу в игре* (1.8), *если*

$$\max_{x_i \in \mathrm{X}_i} f_i[x^e || x_i] = f_i[x^e] \quad (i \in \mathbf{N});$$

здесь $[x^e || x_i] = [x_1^e, \ldots, x_{i-1}^e, x_i, x_{i+1}^e, \ldots, x_N^e]$.

Замечание 1.2. Из определения 1.2 при условиях компактности X_i и непрерывности $f_i[x]$ на X следует [6, с. 174]: множество X^e ситуаций равновесия по Нэшу x^e игры (1.8) образует компактное (может и пустое) подмножество в X.

С помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке в [4, с. 93] приведено доказательство следующего утверждения

Теорема 1.1. *Пусть в игре* (1.8)
1^o) *множества* X_i *выпуклы и компактны,*
2^o) *каждая из функций выигрыша* $f_i[x]$ *непрерывна на* X *и вогнута по* x_i *при любых фиксированных значениях остальных переменных* $(i \in \mathbf{N})$.

Тогда в (1.8) *существует ситуация равновесия по Нэшу.*

Пусть теперь в игре (1.8) множества X_i суть компакты, и $f_i[x]$ непрерывны на X. Игре (1.8) поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\nu_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{f_i[\nu]\}_{i \in \mathbf{N}} \,\rangle, \tag{1.9}$$

здесь $\mathbf{N}$ то же, что в игре (1.8), $\{\nu_i\}$ – множество смешанных стратегий i-го игрока, именно $\nu_i(\cdot)$ – вероятностная мера – неотрицательная скалярная счетно–аддитивная функция, определенная на борелевской σ-алгебре подмножеств компакта X_i, нормированная единицей, $\nu(dx) = \nu_1(dx_1) \cdot \ldots \cdot \nu_N(dx_N)$ – мера–произведение, множество ситуаций в смешанных стратегиях $\nu(\cdot)$ обозначим $\{\nu\}$;

наконец, функция выигрыша i-го игрока в (1.9), именно

$$f_i[\nu] = \int\limits_{\mathrm{X}} f_i[x]\nu(dx) = \int\limits_{\mathrm{X}_1} \ldots \int\limits_{\mathrm{X}_N} f_i[x]\nu_N(dx_N) \cdot \ldots \cdot \nu_1(dx_1),$$

рассматривается как математическое ожидание $f_i[x]$ из (1.8) (с учетом теоремы Фубини о перестановке порядка интегрирования).

Определение 1.3. *Ситуация в смешанных стратегиях* $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ *называется равновесной по Нэшу в игре* (1.9), *если*

$$\max_{\nu_i(\cdot)\in\{\nu_i\}} f_i[\nu^e||\nu_i] = f_i[\nu^e] \quad i \in \mathbf{N},$$

где $\nu^e||\nu_i = \nu_1^e(dx_1)\ldots\nu_{i-1}^e(dx_{i-1})\nu_i(dx_i)\nu_{i+1}^e(dx_{i+1})\ldots\nu_N^e(dx_N)$, $\nu^e(dx) = \nu_1^e(dx_1)\cdot\ldots\cdot\nu_N^e(dx_N)$.

В [4, с. 117-119] (с помощью теоремы Гликсберга о неподвижной точке) приведено доказательство следующего утверждения:

Теорема 1.2. *Если в игре* (1.8) *множества* X_i *суть компакты, а функции выигрыша* $f_i[x]$ *непрерывны на* $\mathrm{X} = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i$, *то в игре* (1.9) *существует ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.*

В заключение этого раздела приведем цитату из книги [1, с. 170]: «Интуиция не приспособлена к осознанию игрового противостояния... Смешанные стратегии и равновесие Нэша – вот два революционных понятия, которые, хотя и описываются в каждом учебнике, но так и остаются в тени миропонимания».

В последующем параграфе приводится первое из возможных понятий гарантированного равновесия в бескоалиционной игре при учете неопределенностей, устанавливается существование в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр ограничениях.

2. Балансовые равновесия (аналог седловой точки)

2.1. Формализация

Первый из рассматриваемых видов гарантированных равновесий для бескоалиционных игр при неопределенности был предложен В.И. Жуковским в 1994 г. в книге [7, с.233] и активно использовался им же для различных видов равновесий в [5]. Идея здесь предельно проста: заменять операцию минимума в (1.2) на векторный минимум (минимум по Слейтеру, Парето, Борвейну, Джоффриону или на A-минимум из [11]), а операцию максимума – на построение равновесной по Нэшу ситуации (или активно равновесной, или равновесной по Бержу–Вайсману, или на равновесие угроз и контругроз из [5]).

Итак, будем рассматривать бескоалиционную игру N лиц с чистыми стратегиями игроков и чистыми неопределенностями

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle. \tag{2.1}$$

В (2.1) $\mathbf{N} = \{1,\dots,N\}$ – множество порядковых номеров игроков,
$\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество стратегий (чистых) x_i у i-го игрока,
$\mathrm{Y} \subseteq \mathbf{R}^m$ – множество (чистых) неопределенностей y,
в игре (2.1) игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают одновременно свои стратегии x_i, в результате образуется ситуация $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathrm{X} = \prod\limits_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{X}_i$, независимо от их выбора в игре (2.1) реализуется какая-либо чистая неопределенность $y \in \mathrm{Y}$; на всех таких парах $(x,y) \in \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ определена функция выигрыша $f_i(x,y)$ для каждого i-го игрока ($i \in \mathbf{N}$).

Задача любого i-го игрока (на «словесном» уровне): выбор в игре (2.1) такой своей чистой стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$, чтобы добиться возможно большего своего выигрыша – значения $f_i(x,y)$, при этом каждый из игроков вынужден рассчитывать на реализацию любой, заранее непредсказуемой чистой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$ (названных Е.С. Венцель в [3] «дурными неопределенностями» из-за непредсказуемости их конкретной реализации (в Y)).

Определение 2.1. *Пару* $(\bar{x}^e, \bar{f}^S) \in \mathrm{X}\times\mathbf{R}^N$ *назовем гарантированным по Слейтеру балансовым равновесием игры* (2.1)*, если существует неопределенность* $y_S \in \mathrm{Y}$ *такая, что*
1^o) *ситуация* x^e *равновесна по Нэшу в игре*

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(x,y_S)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle \tag{2.2}$$

(*получаемой из* (2.1) *при* $y = y_S$)*, то есть по определению* 1.2

$$\max_{x_i\in\mathrm{X}_i} f_i(x^e||x_i, y_S) = f_i(x^e, y_S) \quad (i \in \mathbf{N}); \tag{2.3}$$

2^o) *неопределенность* y_S *минимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче*

$$\langle\, \mathrm{Y}, \{f_i(x^e,y)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle \tag{2.4}$$

(*получаемой из* (2.1) *при* $x = x^e$)*, то есть по определению* 1.1 *a*)

$$f(x^e,y) \not< f(x^e,y_S) \quad \forall y \in \mathrm{Y}; \tag{2.5}$$

3^o) *пара* $(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$ *максимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче*

$$\langle \{x^e, y_S\}, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbf{N}} \rangle \tag{2.6}$$

(*где каждый элемент* (x^e, y_S) *множества* $\{x^e, y_S\}$ *одновременно удовлетворяет* (2.3) *и* (2.5)), *то есть вектор*

$$\bar{f}^S = f(\bar{x}^e, \bar{y}_S) \not< f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \{x^e, y_S\}. \tag{2.7}$$

При этом ситуацию x^e *назовем гарантирующей по Слейтеру,* $\bar{f}^S$ *– гарантированным векторным выигрышем.*

2.2. Обсуждение балансового равновесия

Перейдем к *достоинствам* этого решения БИН.

Во-первых, игроки, используя свои стратегии из ситуации $\bar{x}^e$, «обеспечивают себе» векторную гарантию $\bar{f}^S$, ибо, согласно (2.5) при $x^e = \bar{x}^e$ все компоненты вектора $f_i(\bar{x}^e, y)$ $(i \in \mathbf{N})$ не могут стать одновременно меньше, чем соответствующие компоненты $f_i(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$ $(i \in \mathbf{N})$, причем эта гарантия, согласно (2.7), наибольшая (максимальна по Слейтеру) из всех остальных гарантий $f(x^e, y_S)$, достигаемых на любых парах (x^e, y_S), удовлетворяющих требованиям 1^o и 2^o определения 2.1.

Во-вторых, это равновесие $(\bar{x}^e, \bar{f}^S)$ расчитано на возможное «наибольшее противодействие неопределенности», то есть базируется на принципе гарантированного результата (поэтому и названо «гарантированным»).

В-третьих, это понятие «достаточно полно», ибо содержит, как частные случаи, основные понятия из теории игр (седловая точка, равновесие по Нэшу), и из теории многокритериальных задач (векторный оптимум по Слейтеру). Заметим, что здесь появляется возможность использования и других оптимумов – по Парето, Джоффриону, Борвейну, конусную оптимальность. Связь между подобными решениями в [5].

В-четвертых, понятие «гарантированного по Слейтеру равновесия» удобно как для практического построения, так и для доказательства факта существования, ибо, вводя еще одного фиктивного $N+1$-го игрока с множеством стратегий $y \in \mathrm{X}_{N+1} = \mathrm{Y}$ и функцией выигрыша

$$f_{N+1}(x,y) = -\sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i f_i(x,y)$$

(для какого–либо набора постоянных

$$\alpha_i = const \geqslant 0 \ (i \in \mathbf{N}) \ \wedge \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i > 0),$$

получаем вспомогательную бескоалиционную игру $N+1$ лиц (без неопределенностей)

$$\langle\, \{\mathbf{N}, N+1\}, \{\mathrm{X}_i \ (i \in \mathbf{N}), \mathrm{Y}\}, \{f_j(x,y)\}_{j=1,\ldots,N,N+1} \,\rangle \qquad (2.8)$$

ситуация равновесия по Нэшу $(x^e, y_S) \in \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ в которой определится равенствами

$$\begin{aligned}
&\max_{x_i\in\mathrm{X}_i} f_i(x^e \| x_i, y_S) = f_i(x^e, y_S) \ (i \in \mathbf{N})\\
&\max_{y\in\mathrm{Y}} f_{N+1}(x^e, y) = f_{N+1}(x^e, y_S) \ \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \ \min_{y\in\mathrm{Y}} \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^e, y) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \alpha_i f_i(x^e, y_S);
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

если $\{(x^e, y_S)\}$ – все множество таких ситуаций равновесия по Нэшу, то искомое (по определению 2.1) гарантированное по Слейтеру балансовое равновесие будет $(\bar{x}^e, \bar{f}^S = f(\bar{x}^e, \bar{y}_S))$, где $(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$ – максимальное по Слейтеру решение N-критериальной задачи

$$\langle\, \{(x^e, y_S)\}, f(x,y) = (f_1(x,y), \ldots, f_N(x,y)) \,\rangle.$$

2.3. Игры с «разделенными» функциями выигрыша

Рассмотрим частный вид игры (2.1), именно

$$\langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y) = \varphi_i(x) + \psi_i(y)\}_{i\in\mathbf{N}} \,\rangle, \qquad (2.10)$$

отличающуюся от (2.1) лишь тем, что функции выигрыша $f_i(x,y) = \varphi_i(x) + \psi_i(y)$ $(i \in \mathbf{N})$, то есть «разделены» по ситуациям $x \in \mathrm{X}$ и неопределенностям $y \in \mathrm{Y}$.

Свойство «разделенности» $f_i(x,y)$ позволяет предложить конструктивный способ построения гарантированного по Слейтеру балансового равновесия (из определения 2.1), рассматривая раздельно и независимо бескоалиционную игру N лиц

$$\Gamma_x = \langle\, \mathbf{N}, \{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{\varphi_i(x)\}_{i\in\mathbf{N}} \,\rangle \qquad (2.11)$$

и N-критериальную задачу

$$\Gamma_y = \langle \, \mathrm{Y}, \{\psi_i(y)\}_{i\in\mathbf{N}} \, \rangle. \qquad (2.12)$$

Далее будем использовать, во–первых, два N-вектора $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ и, во–вторых, следующее вспомогательное и очевидное утверждение:

Лемма 2.1. *Для любого постоянного N-вектора $a = (a_1, \dots, a_N)$*
a) система неравенств

$$\psi_i^{(1)} \; < \; \psi_i^{(2)} \quad (i \in \mathbf{N})$$

несовместна (не выполняется!) тогда и только тогда, когда несовместны

$$\psi_i^{(1)} + a_i \; < \; \psi_i^{(2)} + a_i \quad (i \in \mathbf{N});$$

b) системы неравенств эквивалентны:

$$\Big[\varphi_i^{(1)} \; \leqslant \; \varphi_i^{(2)} \quad (i \in \mathbf{N})\Big] \; \Leftrightarrow \; \Big[\varphi_i^{(1)} + a_i \; \leqslant \; \varphi_i^{(2)} + a_i \quad (i \in \mathbf{N})\Big].$$

С учетом леммы 2.1 построение гарантированного балансового равновесия для игры (2.10) сводится к осуществлению следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Для N-критериальной задачи (2.12) построить множество $\mathrm{Y}_S \subseteq \mathrm{Y}$ минимальных по Слейтеру альтернатив y_S и множество исходов $\psi(\mathrm{Y}_S) = \bigcup\limits_{y\in \mathrm{Y}_S} \psi(y)$, то есть для любых $y \in \mathrm{Y}$ и каждого $y_S \in \mathrm{Y}_S$ должна быть несовместной система неравенств

$$\psi_i(y) \; < \; \psi_i(y_S) \quad (i \in \mathbf{N})$$

(тогда несовместна (лемма 2.1 a) и система

$$\varphi_i(x) + \psi_i(y) \; < \; \varphi_i(x) + \psi_i(y_S) \quad \forall x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}, \; i \in \mathbf{N},$$

тем самым выполнено требование 2^o определения 2.1).

Шаг 2. Для игры (2.11) найти множество $\mathrm{X}^e \subseteq \mathrm{X}$ ситуаций равновесия по Нэшу $x^e \in \mathrm{X}$, исходя из неравенств

$$\varphi_i(x^e || x_i) \; \leqslant \; \varphi_i(x^e) \quad \forall x_i \in \mathrm{X}_i, \; i \in \mathbf{N},$$

и затем построить множество $\varphi(\mathrm{X}^e) = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{X}^e} \varphi(x)$ (тогда имеет место (лемма 2.1 b) и система неравенств

$$\varphi_i(x^e||x_i) + \psi_i(y_S) \ \leqslant\ \varphi_i(x^e) + \psi_i(y_S) \quad \forall y_S \in \mathrm{Y}, x_i \in \mathrm{X}_i,\ i \in \mathbf{N},$$

что совпадает с требованием 1^o определения 2.1).

Шаг 3. Построить сумму множеств

$$\begin{gathered}\varphi(\mathrm{X}^e) + \psi(\mathrm{Y}_S) \ =\ (\varphi(\mathrm{X}^e) + \psi(y_S) \,|\, y_S \in \mathrm{Y}_S) \ = \\ =\ (\varphi(x^e) + \psi(\mathrm{Y}_S) \,|\, x^e \in \mathrm{X}^e) = (\varphi(x^e) + \psi(y_S) \,|\, x^e \in \mathrm{X}^e, y_S \in \mathrm{Y}_S)\,.\end{gathered}$$

Шаг 4. Найти максимальную по Слейтеру альтернативу $(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$ в N-критериальной задаче

$$\langle\, \mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S, \{\varphi_i(x) + \psi_i(y)\}_{i \in \mathbf{N}}\, \rangle,$$

то есть $(\bar{x}^e, \bar{y}_S)$ определить из условия: при $\forall x^e \in \mathrm{X}^e$ и $\forall y_S \in \mathrm{Y}_S$ несовместна система неравенств

$$\varphi_i(\bar{x}^e) + \psi_i(\bar{y}_S) \ <\ \varphi_i(x^e) + \psi_i(y_S) \quad (i \in \mathbf{N})$$

(тем самым выполнив требование 3^o определения 2.1).

Тогда $(\bar{x}^e, \varphi(\bar{x}^e) + \psi(\bar{y}_S))$ и образует гарантированное (по Слейтеру) балансовое равновесие в игре (2.10).

Предложенный алгоритм позволяет установить следующую теорему существования гарантированного по Слейтеру балансового равновесия в игре (2.10).

Теорема 2.1. *Пусть в игре* (2.10)
1) *множества* X_i *и* Y *компакты и* X_i *выпуклы* $(i \in \mathbf{N})$*,*
2) *скалярные функции* $\varphi_i(x)$ *и* $\psi_i(y)$ *непрерывны на* $\mathrm{X} = \prod\limits_{i \in \mathbf{N}} \mathrm{X}_i$ *и* Y *соответственно,*
3) *функции* $\varphi_i(x)$ *вогнуты по* x_i *при любых фиксированных остальных переменных* $(i \in \mathbf{N})$.

Тогда в игре (2.10) *существует гарантированное по Слейтеру балансовое равновесие.*

Доказательство. Проведем доказательство по указанным выше четырем шагам.

Шаг 1: в задаче (2.12) множество Y_S будет непустым компактом (утверждение 1.2) и поэтому (так как $\psi_i(y)$ непрерывна на Y) и $\psi(\mathrm{Y}_S)$ будет компактным подмножеством в $\mathbf{R}^N$.

Шаг 2. В игре (2.11) множество X^e ситуаций равновесия образует непустой компакт (теорема 1.1 и замечание 1.1). Но тогда компактом будет $\varphi(\mathrm{X}^e) = \bigcup\limits_{x\in\mathrm{X}^e} \varphi(x)$, поскольку компоненты N-вектор-функции $\varphi(x)$ непрерывны на X.

Шаг 3. Из рассмотренных здесь шагов 1 и 2 будет следовать, что компактами будут как произведение $\mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S$, так и сумма множеств $\varphi(\mathrm{X}^e) + \psi(\mathrm{Y}_S)$.

Шаг 4. Рассмотрим N-критериальную задачу

$$\langle\, \mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S, \{\varphi_i(x) + \psi_i(y)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle. \tag{2.13}$$

Вследствие компактности множества $\mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S$ и непрерывности на этом $\mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S$ компонент N-вектор-функции $\varphi(x) + \psi(y)$ в задаче (2.13) существует максимальная по Слейтеру альтернатива $(\bar{x}^e, \bar{y}_S) \in$ $\in \mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S$, то есть для любых $(x^e, y_S) \in \mathrm{X}^e \times \mathrm{Y}_S$ несовместна система неравенств

$$\varphi_i(x^e) + \psi_i(y_S) \ > \ \varphi_i(\bar{x}^e) + \psi_i(\bar{y}_S) \quad (i \in \mathbf{N}).$$

Построенная в результате пара

$$\big(\bar{x}^e, \bar{f}^S = f(\bar{x}^e, \bar{y}_S) = \varphi_i(\bar{x}^e) + \psi_i(\bar{y}_S)\big)$$

как раз и будет гарантированным по Слейтеру балансовым равновесием игры (2.10). □

Пример 2.1. Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности с «разделенными» функциями выигрыша

$$\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i = [-1,1]\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y) = -x_i^2 + 2x_1x_2 + y_i\}_{i=1,2}\rangle, \tag{2.14}$$

здесь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, и $\mathrm{Y} = \{y = (y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1\}$. Следуя приведенному выше алгоритму, построим гарантированное балансовое равновесие игры (2.14). В соответствии с этим выделим из (2.14) бескоалиционную игру двух лиц

$$\Gamma_x = \langle\, \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i = [-1,1]\}_{i=1,2}, \{\varphi_i(x) = -x_i^2 + 2x_1x_2\}_{i=1,2}\,\rangle, \tag{2.15}$$

и двухкритериальную задачу

$$\Gamma_y = \langle\, \mathrm{Y}, \{\psi_i(y) = y_i\}_{i=1,2}\, \rangle, \tag{2.16}$$

где $\mathrm{Y} = \{y = (y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 \leqslant 1\}$.

Шаг 1. Множество Y представляет собой круг в $\mathbf{R}^2$ с центром в $(0,0)$ радиуса $R = 1$ и оно совпадает с заштрихованным множеством $\psi(\mathrm{Y})$ (рис. 1). Тогда минимумы по Слейтеру в задаче (2.16) образуют точки окружности, лежащие в третьей четверти (выделены на рис. 2 жирной дугой).

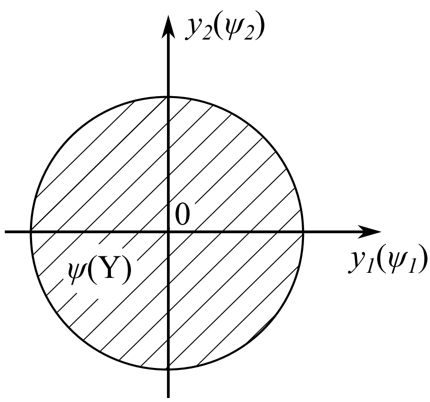

Рисунок 1. Множество Y

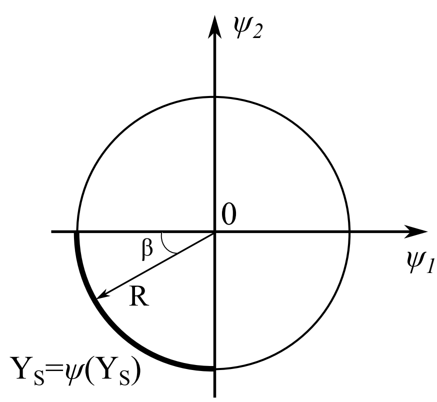

Рисунок 2. Минимумы по Слейтеру

Возможная запись множества

$$\psi(\mathrm{Y}_S) = \Big\{ y_S = (y_1^{(S)}, y_2^{(S)}) \mid y_1^{(S)} = -R\cos\beta, y_2^{(S)} = -R\sin\beta \ \forall\beta \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big] \Big\}.$$

Шаг 2. Игра (2.15) рассмотрена в [6, с. 177-178]. Там найдены множество ситуаций равновесия по Нэшу (рис. 3)

$$\mathrm{X}^e = \{(\alpha, \alpha) \mid \forall\alpha = const \in [-1, 1]\}$$

и множество соответствующих равновесных выигрышей (рис. 4)

$$\varphi(\mathrm{X}^e) = \big\{(\alpha^2, \alpha^2) \mid \forall\alpha = const \in [-1, 1]\big\} = OC.$$

Итак, любая точка (α, α) отрезка биссектрисы AB является равновесной по Нэшу ситуацией игры (2.15) и соответствующие выигрыши $\varphi(\mathrm{X}^e)$ образуют отрезок OC (рис. 4).

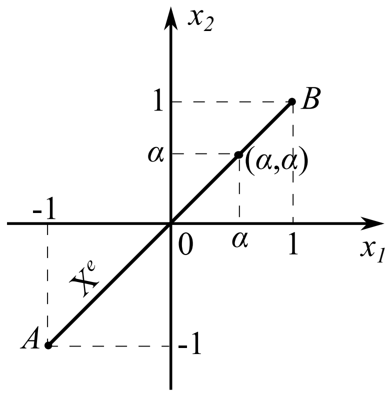

Рисунок 3.
Ситуации равновесия по Нэшу

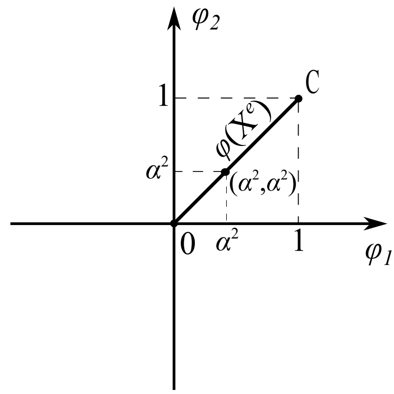

Рисунок 4.
Равновесные выигрыши

Шаг 3. Тогда множество

$$\varphi(\mathrm{X}^e)+\psi(\mathrm{Y}_S)=\{OC+\psi(\mathrm{Y}_S)\}=OC+\{y_S\mid\forall\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\}=KPQL$$

(заштриховано на рис. 5).

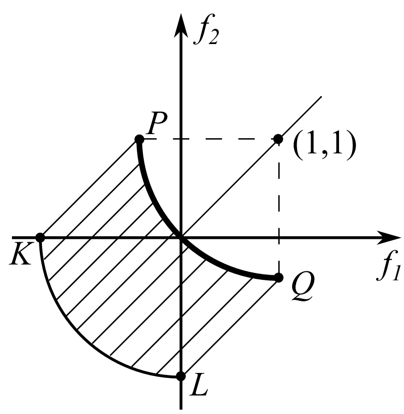

Рисунок 5. Множество $\varphi(\mathrm{X}^e)+\psi(\mathrm{Y}_S)$

Шаг 4. Максимумы по Слейтеру множества $KPQL$ образуют четверть окружности (на рис. 5 выделена жирной дугой PQ)

$$PQ\ =\ \left\{1-\cos\beta,1-\sin\beta\mid\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Каждая из пар $((1,1),\ (1-\cos\beta,1-\sin\beta))$ при любом $\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ как раз и является гарантированным по Слейтеру балансовым равновесием игры (2.14).

Итак, предложенный алгоритм диктует обоим игрокам использовать $x_1^e = x_2^e = 1$ (максимальную по Слейтеру (рис. 4) ситуацию $B = (1,1)$ равновесия по Нэшу игры (2.14)), при этом они «обеспечат» себе векторную гарантию $(1-\cos\beta, 1-\sin\beta) = \bar{f}^e$, то есть при $\forall y \in \mathrm{Y}$ выигрыши $f_i((1,1),y)$ не могут стать одновременно меньше соответствующих $\bar{f}_i^e$ $(i = 1,2)$. И эта гарантия наибольшая (по Слейтеру) из всех гарантий $f(x^e, y_S) = (x_1^e - \cos\beta, x_2^e - \sin\beta)$ при $\forall \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ для любых других ситуаций равновесия по Нэшу x^e в игре (2.15).

Замечание 2.1. Использование вспомогательной бескоалиционной игры (без неопределенностей) (2.9), (2.8) позволяет установить существование гарантированного балансового равновесия игры (2.1) в смешанных стратегиях и неопределенностях. Именно, игре (2.1) поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma} = \langle\, \mathbf{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{\mu\}, \{f_i(\nu,\mu)\}_{i\in\mathbf{N}}\,\rangle, \tag{2.17}$$

где, как и в (2.1), $\mathbf{N} = \{1,\ldots,N\}$ – множество порядковых номеров игроков. Предполагая в (2.1) множества X_i $(i \in \mathbf{N})$ и Y компактами, а $f_i(x,y)$ непрерывными на $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, построим множества $\{\nu_i\}$ смешанных стратегий $\nu_i(\cdot)$ у i-го игрока. Именно $\nu_i(\cdot)$ (вероятностная мера) – неотрицательная скалярная счетно–адитивная функция, определенная на борелевской σ-алгебре подмножеств компакта X_i и нормированная на X_i единицей.

Смешанные неопределенности $\mu(\cdot)$ представляют собой вероятностные меры на компакте Y. Множество таких неопределенностей обозначим $\{\mu\}$. Ситуации в смешанных стратегиях $\nu(\cdot)$ являются здесь мерами–произведениями $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_N(dx_N)$. Множества таких ситуаций в смешанных стратегиях обозначим $\{\nu\}$. Аналогичным образом строятся и меры–произведения $\eta(dxdy) = \nu(dx)\mu(dy)$; наконец, математическое ожидание – функция выигрыша i-го игрока в (2.17)

$$f_i(\nu,\mu) = \int\limits_{\mathrm{X}}\int\limits_{\mathrm{Y}} f_i(x,y)\mu(dy)\nu(dx) = \int\limits_{\mathrm{Y}}\int\limits_{\mathrm{X}} f_i(x,y)\nu(dx)\mu(dy).$$

Напомним обозначение $f = (f_1,\ldots,f_N)$. Аналогом определения 2.1 для игры (2.17) будет

Определение 2.2. *Пару* $(\widetilde{\nu}^e(\cdot), \widetilde{f}^S) \in \{\nu\} \times \mathbf{R}^N$ *назовем гарантированным по Слейтеру балансовым равновесием (ГСБР) игры* (2.17) (*или ГСБР в смешанных стратегиях и неопределенностях для игры* (2.1)), *если существует смешанная неопределенность* $\mu_S(\cdot) \in \{\mu\}$ *такая, что*

1^o) *ситуация игры* (2.17) *в смешанных стратегиях* $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ *равновесна по Нэшу в игре*

$$\langle \, \mathbf{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbf{N}}, \{f_i(\nu, \mu_S)\}_{i\in\mathbf{N}} \, \rangle \tag{2.18}$$

(*полученная из* (2.17) *при* $\mu(\cdot) = \mu_S(\cdot)$), *то есть*

$$\max_{\nu_i(\cdot)\in\{\nu_i\}} f_i(\nu^e || \nu_i, \mu_S) = f_i(\nu^e, \mu_S) \quad (i \in \mathbf{N}); \tag{2.19}$$

2^o) *смешанная неопределенность* $\mu_S(\cdot) \in \{\mu\}$ *минимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче*

$$\langle \, \{\mu\}, \{f_i(\nu^e, \mu)\}_{i\in\mathbf{N}} \, \rangle \tag{2.20}$$

(*полученной из* (2.17) *при* $\nu(\cdot) = \nu^e(\cdot)$), *то есть*

$$f(\nu^e, \mu) \not< f(\nu^e, \mu_S) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\mu\}; \tag{2.21}$$

обозначим $\{\nu^e, \mu_S\}$ *– множество мер–произведений, удовлетворяющих* (2.19) *и одновременно* (2.21);

3^o) *пара* $(\widetilde{\nu}^e(\cdot), \widetilde{\mu}_S(\cdot))$ *максимальна по Слейтеру в* N*-критериальной задаче*

$$\langle \, \{\nu^e, \mu_S\}, \{f_i(\nu^e, \mu_S)\}_{i\in\mathbf{N}} \, \rangle, \tag{2.22}$$

то есть

$$\widetilde{f}^S = f(\widetilde{\nu}^e, \widetilde{\mu}_S) \not< f(\nu, \mu) \quad \forall (\nu, \mu) \in \{\nu^e, \mu_S\}. \tag{2.23}$$

Теорема 2.2. *Пусть в игре* (2.1) *множества* X_i *и* Y *суть компакты и* $f_i(x, y)$ *непрерывны на* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ ($i \in \mathbf{N}$). *Тогда в* (2.1) *существует гарантированное по Слейтеру балансовое равновесие в смешанных стратегиях.*

Уточнение достоинств балансового равновесия. Гарантированное балансовое равновесие $(\bar{x}^e, \bar{f}^S)$, введенное определением 2.1 обладает уже упомянутыми несомненными достоинствами:

во-первых, использование игроками своих стратегий x_i^e из ситуации x^e доставляет им гарантии f_i^e, обычно большие (но не меньшие) чем при применении рассматриваемого в следующей статье сильно гарантированного равновесия; а ведь мы стремимся к возможно большим гарантиям (!);

во-вторых, балансовое равновесие построено при предположении о «самом плохом действии» на игроков неопределенностями, то есть на общепринятом (при наличии «дурных» неопределенностей) принципе гарантированного результата;

в-третьих, нахождение гарантированного по Слейтеру балансового равновесия сводится к построению ситуации равновесия по Нэшу во вспомогательной игре, эффективно строящейся по исходной, что позволило (теорема 2.2) установить существование при «привычных» для теории игр ограничениях;

в-четвертых, требование 3^o определения 2.1 позволяет избавиться от *внутренней неустойчивости* множества равновесий по Нэшу, ибо, в силу максимальности по Слейтеру, не могут существовать два балансовых равновесия $(\bar{x}^{(1)}, \bar{f}^{(1)})$ и $(\bar{x}^{(2)}, \bar{f}^{(2)})$ таких, что $\bar{f}_i^{(1)} > \bar{f}_i^{(2)}$ $(i \in \mathbf{N})$; $\bar{f}_i^{(j)} = f_i(\bar{x}^{(j)}, \bar{y}^{(j)})$ $(j = 1, 2)$;

в-пятых, для частного вида игр (2.10) такие гарантированные равновесия взаимозаменяемы в том смысле, что пара $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет требованиям 1^o и 2^o определения 2.1, если и только если $\bar{x} \in \mathrm{X}^e$, $\bar{y} \in \mathrm{Y}_S$ (см. шаги 1 и 2 из раздела 2.3).

В заключение отметим, что понятию балансового равновесия присущи и негативные свойства – «и на солнце бывают пятна». Тому, в чем они состоят и как с ними «бороться» будет посвящена следующая статья авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Босс В. *Лекции по математике. Т. 12: Контрпримеры и парадоксы.* М.: URSS, книжный дом «Либроком», 2009.

2. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс, 2002.

3. Венцель Е.С. *Исследование операций.* М.: Знание, 1976.

4. Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* М.: Наука, 1984.

5. Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1997.

6. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов и приложения.* М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012.

7. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова Думка, 1994.

8. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Физматлит, 2007.

9. Nash J.F. *Equilibrium points in N-person games* // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

10. Wald A. *Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis* //Annuals Math. Statist. 1939. V. 10. P. 299–326.

11. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector-Valued Maximin.* N.Y. etc.: Academic Press, 1994.

EQUILIBRATING CONFLICTS UNDER UNCERTAINTY. ANALOGUE OF A SADDLE–POINT

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc. (kudrk@mail333.com).

Abstract: In this paper we formalize one of the concepts of guaranteed equilibrium in a noncooperative game under uncertainty. We prove the existence of the guaranteed equilibrium in mixed strategies.

Keywords: saddle-point, non-cooperative game, uncertainty, mixed strategies, Nash equilibrium, vector-valued optimums.