Математическая Теория Игр и её Приложения, т.5, в.3, с. 3–26

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

КООПЕРАТИВНОЕ СИЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ В ИГРЕ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Николай А. Зенкевич
Андрей В. Зятчин
Кафедра операционного менеджмента,
Высшая школа менеджмента СПбГУ;
Центр международной логистики и управления цепями поставок им. Дойче Бан и ОАО РЖД
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 1-3
e-mail: zenkevich@gsom.spbu.ru, zyatchin@gsom.spbu.ru

В статье вводится и исследуется теоретико-игровой вариант задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими дистрибьюторами. Каждый клиент характеризуется параметрами спроса и оптовой цены. При такой постановке в оптимальном решении допускается наличие необслуженных клиентов и тривиальных маршрутов. Такая задача называется игрой маршрутизации транспортных средств, ИМТС, (vehicle routing game, VRG) с согласованными стратегиями.
В статье предложена вычислительная процедура, позволяющая найти сильное равновесие в ИМТС, которое является устойчивым относительно отклонения любой коалиции. В соответствии с такой процедурой итеративно для каждого дистрибьютора решается оптимизационная задача. На каждой итерации множество необслуженных клиентов сужается.
Доказано существование двух классов сильных равновесий и

©2013 Н.А. Зенкевич, А.В. Зятчин

сформулированы условия существования третьего. Представлена концепция кооперативного сильного равновесия. Рассмотрены численные примеры.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, равновесие по Нэшу, сильное равновесие, кооперативное сильное равновесие, транспортная сеть, задача маршрутизации транспортных средств.

1. Введение

Одним из ключевых факторов успеха дистрибьюторов является выполнение заказов клиентов при наименьшей стоимости. Частным случаем является задача маршрутизации транспортных средств (ЗМТС). Такая задача состоит в построении маршрутов для парка транспортных средств (ТС), которые начинаются и заканчиваются в одной точке (депо). Здесь также предполагается, что дорожная сеть между депо и всеми клиентами представлена в виде графа. Вершины графа соответствуют клиентам и депо, ребра определены расстоянием или иными транспортными затратами между двумя вершинами. Каждый клиент характеризуется величиной спроса и предлагаемой им оптовой ценой. Запасы в депо неограничены.

ЗМТС интересна как с теоретической, так и практической точек зрения: с одной стороны она является обычной задачей, решаемой специалистами отделов логистики, с другой стороны, это NP – трудная задача, не имеющая аналитического решения для практически значимого числа клиентов. По этой причине ЗМТС и ее модификации как правило предполагают эвристические и метаэвристические решения.

В настоящей работе ЗМТС исследуется в теоретико-игровой постановке. Игра маршрутизации транспортных средств ИМТС, (vehicle routing game, VRG) определяется следующим образом. Предполагается, что в депо находятся два или более игроков. Каждый игрок имеет ТС, каждое из которых характеризуется параметром грузоподъемности. Все игроки доставляют однородный продукт. Кроме того, предполагается известным множество клиентов, каждый из которых имеет положительный спрос и оптовую цену. Расстояния между клиентами и депо соответствуют транспортным затратам. В результате, стратегией игрока является маршрут, который начинается и закан-

чивается в депо. Как и в классической ЗМТС предполагается, что заказ каждого клиента полностью выполняется за одно посещение, а число клиентов в стратегии игрока ограничено грузоподъемностью ТС. При этом если любой допустимый маршрут является убыточным, игрок предпочитает оставить ТС в депо. Для простоты предположим, что каждый игрок может выбирать свою стратегию независимо от количества клиентов. В этом состоит отличие от ЗМТС: спрос некоторых клиентов в ИМТС может остаться неудовлетворенным. В практическом смысле такое предположение может означать, что клиенты назначают не конкурентные цены.

Теоретико-игровой подход к ЗМТС состоит в формализации ИМТС в виде игры, и дальнейшем ее анализе и решении в смысле известных принципов оптимальности. Наиболее распространенным принципом оптимальности в таких моделях является равновесие по Нэшу, которое определяет в качестве решения игры такие ситуации, которые являются устойчивыми относительно единичных отклонений игроков. Естественным развитием понятия равновесия является сильно равновесие (SE), которое определяет в качестве оптимальных такие ситуации, которые устойчивы относительно отклонения произвольной коалиции игроков. Такая устойчивость может являться следствием угрозы уменьшения выигрыша коалиции или выигрыша отдельного игрока, входящего в коалицию.

Основным недостатком сильного равновесия является то, что оно существует достаточно редко. В данной работе доказано, что равновесие по Нэшу и некоторые классы сильного равновесия существуют в ИМТС. Кроме того, здесь разработана процедура построения таких решений, а также метод нахождения кооперативного сильного равновесия.

В работе представлена формализация транспортной сети в терминах теории графов. ИМТС здесь определяется множеством игроков, их стратегиями и функциями выигрыша. Показано, что ИМТС относится к классу игр с согласованными стратегиями. Приведены и обоснованы три уточнения концепции сильного равновесия для ИМТС.

Во второй части работы предложен метод построения согласованного сильного равновесия для заданной перестановки игроков и сформулировано определение кооперативного сильного равновесия.

Все теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

2. Обзор литературы

ЗМТС была впервые представлена в работе [6]. В дальнейшем, в соответствии с практическими требованиями, исследовались варианты классической задачи маршрутизации с ограничениями на характеристики клиентов, транспортные средства и проч. Например, для обеспечения поставок точно-в-срок исследовалась задача маршрутизации с временными окнами – периодами времени, в которые транспортное средство может находиться у клиента [12, 17, 18]. Задача маршрутизации транспортных средств, включающая развоз и встречный пробег, описывает проблему, в которой необходимо осуществить поставку и получить возврат у клиентов [3, 16]. В задаче развоза нефтепродуктов по заправочным станциям предполагается, что грузоподъемность ТС принимает целочисленные значения от 1 до 5 в соответствии с числом секций в цистерне бензовоза [5]. При этом предполагается, что возможна доставка нескольких видов продукта. Более полная классификация задач маршрутизации представлена в [7].

В настоящей работе исследован теоретико-игровой вариант ЗМТС, в котором два или более дистрибьюторов конкурируют на заданной транспортной сети. Элементы теории графов и сети широко применяются в теории игр. Граф описывает структуру игры в развернутой форме [8,13]. Р. Майерсон использовал графы при анализе кооперативных игр, где вершины соответствовали игрокам, а ребра графа описывали структуру коалиций [14, 15]. Конфликты, в которых отношения между игроками, соответствующие их интересам, социальным связям, путям обмена информацией, структура которых может быть описана с помощью сети, исследуются в сетевых играх [10, 11]. Маршрутизация интернет-трафика по сетям как игра в условиях неопределенности исследовалась в работе [9].

В настоящее время теоретико-игровой подход успешно применяется при исследовании задач по перевозке грузов. Л.А. Петросян предложил концепцию условно кооперативного равновесия по Нэшу для одной игры на транспортной сети, в которой игроки при движении в заданную вершину минимизируют транспортные затраты [2].

В.В. Захаров и А.Н. Щегряев исследовали устойчивую кооперацию в динамической ЗМТС [1].

Сильное равновесие исследовалось в различных классах игр в нормальной и развернутой форме [19]. В настоящей работе используются результаты, представленные в [2, 19].

3. Теоретико-игровая модель маршрутизации транспортных средств

Рассмотрим транспортную сеть G и формализацию теоретико-игровой модели задачи маршрутизации транспортных средств Γ.

3.1. Транспортная сеть

Рассмотрим множество точек $V \subset R^2$ на плоскости R^2. Обозначим через $|V|$ мощность множества V. На множестве V заданы две неотрицательные функции: $d(x) \geq 0$ (спрос) и $p(x) \geq 0$(цена), $x \in V$. Предположим, что задана неотрицательная функция транспортных затрат γ: $V \times V \to R^1_+$ со следующими свойствами:

1. $\gamma(x, y) = \gamma(y, x)$, $x, y \in V$;
2. $\gamma(x, y) = 0$, если $x = y$, $x \in V$;
3. $\gamma(x, y) > 0$, если $x \neq y$, $x, y \in V$.

Множество V и функция γ определяют неориентированный (свойство 1) граф $Z = (V, E)$ без циклов (свойство 2), где $V = \{x\}$ – множество вершин графа и $E = \{(x, y)\} = V \times V$ – множество ребер (свойство 3).

Выберем произвольную вершину $a \in V$, которую будем называть *депо*. Предположим, что $d(a) \equiv 0$ и $p(a) \equiv 0$.

Определим транспортную сеть $G(a)$ на графе $Z = (V, E)$ как набор $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$.

Рассмотрим простой цикл $r = r(x_0) = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_l, x_0)$, где $0 \leq l \leq |V|$, $x_0 \equiv a$, $x_i \in V$, $i = 1, \ldots, l$. Будем называть такой цикл *маршрутом*. Каждый маршрут начинается и заканчивается в депо a. Обозначим множество всех маршрутов через R_0. Будем говорить, что два различных маршрута $r' = (a, x'_1, x'_2, \ldots, x'_l, a) \in R_0$ и $r'' = (a, x''_1, x''_2, \ldots, x''_k, a) \in R_0$ *не пересекаются*, и писать $r' \cap r'' = \emptyset$, если

они не имеют общих вершин, за исключением a, т.е.: $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_l\} \cap \cap \{x''_1, x''_2, \ldots, x''_k\} = \emptyset$.

Заметим, что множество маршрутов R_0 зависит от транспортной сети $G(a)$, т.е. $R_0 = R_0[G(a)]$.

3.2. Формулировка теоретико-игровой модели маршрутизации транспортных средств

Определим на сети $G(a)$ игру маршрутизации транспортных средств n игроков. Будем назвать такую игру также VRG (от англ. *vehicle routing game*). Обозначим множество игроков через $N = = \{1, \ldots, n\}$. Будем предполагать, что каждый игрок $i \in N$ владеет транспортным средством (ТС), которое характеризуется параметром (грузоподъемностью) $c_i > 0$, причем $d(x) \leq c_i$ для всех $x \in V$ и $i \in N$. Определим стратегию игрока i как маршрут $h_i = r_i(a) = = (a, x^i_1, x^i_2, \ldots, x^i_{l_i}, a)$, для которого выполняется следующее условие:

$$\sum_{m=1}^{l_i} d(x^i_m) \leq c_i.$$

Множество стратегий игрока i обозначим через $H_i = H_i[G(a)]$, $H_i = \{h_i\}$. Будем говорить, что любые две *стратегии* h_i *и* h_j *не пересекаются* и писать $h_i \cap h_j = \emptyset$, если соответствующие этим стратегиям маршруты не пересекаются, т.е. $r_i \cap r_j = \emptyset$, $r_i \in h_i$, $r_j \in h_j$ и $i, j \in N$.

Ситуацию $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $h_i \in H_i$, $i \in N$ будем называть *согласованной*, если $h_i \cap h_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Обозначим через H множество всех согласованных ситуаций в ИМТС.

Пусть $S \subseteq N$ – произвольная коалиция игроков. Стратегию коалиции $S \subseteq N$ определим как набор стратегий игроков, входящих в данную коалицию, т.е. $h_S = (h_i)$, $i \in S$. Стратегию дополнительной коалиции $N \backslash S$ обозначим через $h_{-S} = (h_i)$, $i \in N \backslash S$.

Функция выигрыша $K_i(h_i, h_{-i})$ игрока i имеет следующий вид:

$$K_i(h_i, h_{-i}) \stackrel{def}{=} -\gamma(x^i_{l_i}, a) + \sum_{j=1}^{l_i} \left(p(x^i_j) d(x^i_j) - \gamma(x^i_{j-1}, x^i_j)\right) = k_i(h_i), \quad (3.1)$$

$$(h_i, h_{-i}) \in H,$$

где $h_i \in H_i$, $x_0^i \equiv a$. Функция выигрыша $K_i(h_i, h_{-i})$ явно зависит от стратегии h_i игрока i и неявно зависит от стратегий остальных игроков h_{-i} через свойство согласованности ситуации (h_i, h_{-i}). В результате функция выигрыша $K_i(h_i, h_{-i})$ игрока i может рассматриваться как функция прибыли $k_i(h_i)$, где ситуация (h_i, h_{-i}) является согласованной.

Функцию выигрыша игрока i в ситуации (h_S, h_{-S}) определим аналогично (3.1):

$$K_i(h_S, h_{-S}) \stackrel{def}{=} -\gamma(x_{l_i}^i, a) + \sum_{j=1}^{l_i} \left(p(x_j^i)d(x_j^i) - \gamma(x_{j-1}^i, x_j^i)\right),$$
$$(h_S, h_{-S}) \in H,$$

где $x_0^i \equiv a$, $x_j^i \in h_i$, $h_i \in h_S$.

Определим игру маршрутизации транспортных средств $\Gamma = \Gamma(a)$ как набор $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K\rangle$, где $G(a)$ – транспортная сеть, $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, H – множество согласованных ситуаций, $K = \{K_i\}_{i\in N}$ – множество функций выигрыша игроков.

3.3. Сильное равновесие

В игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$ существует несколько различных типов равновесия. В настоящей работе в качестве решения рассматривается сильное равновесие (SE) [4]. В частности, исследуется три уточнения сильного равновесия [2, 19].

Определение 3.1. *Ситуацию $h^1 = (h_1^1, \ldots, h_n^1) \in H$ будем называть сильным равновесием типа SE_1 в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$, если для каждой коалиции $S \subseteq N$ и согласованной ситуации $(h_S, h_{-S}^1) \in H$ следующее условие не выполнено:*

$$\begin{cases} K_i(h_S^1, h_{-S}^1) \le K_i(h_S, h_{-S}^1), \ \forall i \in S, \\ \exists i_0 \in S, \ K_{i_0}(h_S^1, h_{-S}^1) < K_{i_0}(h_S, h_{-S}^1). \end{cases}$$

Определение 3.2. *Ситуацию $h^2 = (h_1^2, \ldots, h_n^2) \in H$ будем называть сильным равновесием типа SE_2 в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$, если для каждой коалиции $S \subseteq N$ и согласованной ситуации $(h_S, h_{-S}^2) \in H$ существует игрок $i_0 \in S$, для которого выполнено следующее неравенство:*

$$K_{i_0}(h_S^2, h_{-S}^2) \ge K_{i_0}(h_S, h_{-S}^2).$$

Частным случаем сильного равновесия в смысле определения 2 (при $S = \{i\}$, $i \in N$) является равновесие по Нэшу.

Определение 3.3. *Ситуацию $h^3 = (h_1^3, \ldots, h_n^3) \in H$ будем называть сильным равновесием типа SE_3 в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$, если для каждой коалиции $S \subseteq N$ и каждой согласованной ситуации $(h_S, h_{-S}^3) \in H$ существует игрок $i_0 \in S$, для которого выполнено следующее неравенство:*

$$K_{i_0}(h_S^3, h_{-S}^3) > K_{i_0}(h_S, h_{-S}^3).$$

Нетрудно проверить, что $SE_3 \subset SE_2$, $SE_3 \subset SE_1$ [19].

4. Техника построения сильного равновесия

В этом разделе приводится техника построения сильного равновесия в игре $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K \rangle$. Данная техника построена на основе результатов, представленных в статье Л.А. Петросяна [2].

Пусть задана перестановка π номеров $1, \ldots, n$, $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$. Рассмотрим оптимизационную задачу на транспортной сети $G(a)$ для игрока i_1: найти стратегию $\bar{h}_{i_1}$, максимизирующую функцию прибыли $k_{i_1}(h_{i_1})$, т.е.:

$$k_{i_1}(\bar{h}_{i_1}) = \max_{g \in H_{i_1}[G(a)]} k_{i_1}(g). \tag{4.1}$$

На следующем шаге рассмотрим подсеть $G(a) \backslash \bar{h}_{i_1}$ сети $G(a)$, которая не содержит вершины, принадлежащие маршруту стратегии $\bar{h}_{i_1}$, т.е.:

$$G(a) \backslash \bar{h}_{i_1} = \left\langle V \backslash \bar{h}_{i_1}, d, p, \gamma; a \right\rangle, \tag{4.2}$$

где $V \backslash \bar{h}_{i_1} = V \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{l_{i_1}} x_k^{i_1}$, $x_k^{i_1} \in r_{i_1}$, $r_{i_1} = \bar{h}_{i_1}$.

Далее найдем стратегию игрока i_2, максимизирующую его функцию прибыли k_{i_2} на подсети $G(a) \backslash \bar{h}_{i_1}$. Обозначим стратегию, решающую эту задачу через $\bar{h}_{i_2}$, т.е.:

$$k_{i_2}(\bar{h}_{i_2}) = \max_{g \in H_{i_2}[G(a) \backslash \bar{h}_{i_1}]} k_{i_2}(g).$$

Действуя дальше аналогичным образом, рассмотрим подсеть сети $G(a)$, которая не содержит вершины, принадлежащие маршрутам стратегий $\bar{h}_{i_1}$, $\ldots$, $\bar{h}_{i_{m-1}}$. Рассмотрим оптимизационную задачу на

подсети $G\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m-1}\bar{h}_{i_j}$ для игрока i_m: найти стратегию $\bar{h}_{i_m}$, максимизирующую функцию прибыли $k_{i_m}(h_{i_m})$, т.е.:

$$k_{i_m}(\bar{h}_{i_m}) = \max_{g\in H_{i_m}\left[G\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m-1}\bar{h}_{i_j}\right]} k_{i_m}(g). \tag{4.3}$$

Необходимо отметить, что после очередной итерации в подсети может остаться единственная вершина – депо. В таком случае решение соответствующей оптимизационной задачи тривиально: маршрут содержит единственную вершину a, а игрок получает нулевой выигрыш.

В результате реализации всех итераций в процедуре (4.1)-(4.3) построен набор стратегий $\bar{h} = (\bar{h}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_m}, \ldots, \bar{h}_{i_n})$, $\bar{h}_{i_m} \in H_{i_m}$, максимизирующий функции прибыли игроков $i_1, \ldots, i_m, \ldots, i_n$ на сетях G, $G\setminus\bar{h}_{i_1}$, $\ldots$, $G\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{m-1}\bar{h}_{i_j}$,$\ldots$, $G\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}\bar{h}_{i_j}$ соответственно.

Последовательность стратегий $\bar{h}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_m}, \ldots, \bar{h}_{i_n}$ состоит из непересекающихся стратегий, каждая из стратегий $\bar{h}_{i_m} \in H_{i_m}$. Следовательно, ситуация $\bar{h}(\pi) = (\bar{h}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_m}, \ldots, \bar{h}_{i_n}) \in H$ является согласованной в игре $\Gamma(a)$.

Теорема 4.1. *Для каждой перестановки $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ ситуация $\bar{h}(\pi) = (\bar{h}_{i_1}, \ldots, \bar{h}_{i_n})$ является сильным равновесием типа SE_2 в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$.*

Доказательство. Покажем, что для каждой коалиции $S \subset N$ и согласованной стратегии $(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)) \in H$ существует игрок $j \in S$ такой, что:

$$K_j(\bar{h}(\pi)) \geq K_j(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)).$$

Рассмотрим коалицию $S = \{i_j\}$ и игрока $i_m = \min\limits_j i_j$, $i_j \in S$. Стратегия $\bar{h}_{i_m}$ определяется условием (4.3), т.е.:

$$k_{i_m}(\bar{h}_{i_m}) = \max_{g\in H_{i_m}} k_{i_m}(h),$$

следовательно,

$$K_{i_m}(\bar{h}(\pi)) = k_{i_m}(\bar{h}_{i_m}) \geq k_{i_m}(h_{i_m}) =$$

$$= K_{i_m}(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)), h_S = (h_{i_m}, h_{S\setminus i_m}), (h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)) \in H,$$

и теорема доказана. □

Теорема 4.2. *Если для перестановки $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ игроков из множества N в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$ оптимизационная задача (4.3) на сети $G\setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m-1} \bar{h}_{i_j}$ для каждого игрока i_m, $m = 1, 2, \ldots, n$ имеет единственное (с точностью до направления) решение $\bar{h}_{i_m}$, тогда ситуация $\bar{h}(\pi)$ является сильным равновесием типа SE_1, SE_2, SE_3.*

Доказательство. Покажем, что для каждой коалиции $S \subset N$ и согласованной стратегии $(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)) \in H$ существует игрок $j \in S$ такой, что:

$$K_j(\bar{h}(\pi)) > K_j(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)).$$

Рассмотрим коалицию $S = \{i_j\}$, и игрока $i_m = \min\limits_j i_j$, $i_j \in S$. Стратегия $\bar{h}_{i_m}$, определяется условием (4.3), т.е.:

$$k_{i_m}(\bar{h}_{i_m}) = \max_{g \in H_{i_m}} k_{i_m}(g).$$

По условию теоремы 2, $\bar{h}_{i_m}$ является единственным решением этой оптимизационной задачи. Следовательно, любое отклонение от $\bar{h}_{i_m}$ уменьшает прибыль игрока i_m, т.е.:

$$K_{i_m}(\bar{h}(\pi)) = k_{i_m}(\bar{h}_{i_m}) > k_{i_m}(h_{i_m}) = K_{i_m}(h_S, \bar{h}_{-S}(\pi)), i_m \in S,$$

и теорема доказана. □

Теоремы 1-2 определяют множество ситуаций сильных равновесий в чистых стратегиях в игре маршрутизации транспортных средств $\Gamma(a)$ в зависимости от перестановки $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$.

5. Кооперативное равновесие

Рассмотрим новые классы решений в игре маршрутизации ТС, основанные на кооперативном поведении игроков. Рассмотрим ситуацию $\bar{\bar{h}} \in H$, на которой достигается максимум суммы функций выигрыша всех игроков:

$$\max_h \sum_{i=1}^{n} K_i(h) = \sum_{i=1}^{n} K_i(\bar{\bar{h}}) = V, \quad \bar{\bar{h}} \in H. \tag{5.1}$$

Будем называть такую ситуацию $\bar{\bar{h}}$ *кооперативным равновесием* (CE). Нетрудно показать, что CE является ситуацией равновесия по Нэшу. Кроме того, это решение всегда существует в чистых стратегиях. К недостаткам такого решения можно отнести то, что его поиск является NP-трудной задачей и, с точки зрения вычислительной нагрузки, сравним с задачей маршрутизации транспортных средств [6].

6. Примеры

В этом разделе приводятся и исследуются три числовых примера. В первом примере рассчитывается сильное равновесие и проводится анализ на чувствительность в игре маршрутизации ТС малой размерности. Во втором примере сильное равновесие строится для задачи с пятнадцатью клиентами. В третьем примере построено кооперативное равновесие.

Пример 1а (построение сильного равновесия). Рассмотрим транспортную сеть $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$, где $V = \{x_0, \ldots, x_7\}$, $x_0 = a$. Каждый клиент x_j характеризуется координатами на плоскости, спросом $d(x_j)$ и ценой $p(x_j)$ (см. табл. 1).

Таблица 1. Координаты, спрос и цены клиентов, пример 1

Вершина, x_j	Координаты	$d(x_j)$	$p(x_j)$
x_0	(19;45)	0	0
x_1	(18;46)	1	4
x_2	(20;47)	1	4
x_3	(22;42)	1	4
x_4	(20;41)	2	4
x_5	(14;40)	2	4
x_6	(12;44)	2	4
x_7	(13;45)	1	4

Определим транспортные затраты между вершинами x_i и x_j как расстояния $\gamma(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$, $x_i, x_j \in V$ (см. табл. 2).

Таблица 2. Транспортные затраты

Вершины							
Отправления							Прибытия
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1.41	2.24	4.24	4.12	7.07	7.07	6.00	x_0 (депо)
	2.24	5.66	5.39	7.21	6.32	5.10	x_1
		5.39	6.00	9.22	8.54	7.28	x_2
			2.24	8.25	10.20	9.49	x_3
				6.08	8.54	8.06	x_4
					4.47	5.10	x_5
						1.41	x_6

Рассмотрим игру маршрутизации ТС $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K\rangle$, где $N = \{1, 2, 3\}$, на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$ при перестановке $\pi = (1, 2, 3)$. Грузоподъемность автомобилей первого, второго и третьего игрока равна соответственно $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$. Множество согласованных стратегий $H = \{h\}$ и функции выигрыша (3.1) определяются на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$.

Для расчета сильного равновесия в игре $\Gamma(a)$ будем использовать процедуру (4.1)-(4.3). Оптимизационная задача (4.1) для игрока 1 имеет следующий вид: $k_1(\bar{h}_1) = \max\limits_{g\in H_1} k_1(g)$. Всего существует 69 различных маршрутов (два маршрута с одинаковой последовательностью вершин, различающихся только направлением, считаются различными) $r = (x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_0)$, таких, что:

$$\sum_{x_j\in V} d(x_j) \le c_1 = 3,$$

при этом только на единственном маршруте $\bar{r}_1 = (a, x_1, x_2, x_0)$, с точностью до направления, достигается максимальное значение прибыли $k_1(\bar{h}_1) = 2.11$, $\bar{h}_1 = \bar{r}_1$.

Для игрока 2 рассмотрим оптимизационную задачу (4.3) на подсети (4.2) сети $G(a)$:

$$G\backslash\bar{h}_1 = \langle\{x_0, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}, d, p, \gamma; a\rangle\,.$$

Эта задача имеет вид: $k_2(\bar{h}_2) = \max\limits_{g\in H_2} k_2(g)$. Всего существует 21

различный маршрут $r = (x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_0)$, такой, что:

$$\sum_{x_j \in V \setminus \{x_1, x_2\}} d(x_j) \leq c_2 = 3,$$

при этом только на единственном маршруте $\bar{r}_2 = (a, x_3, x_4, x_0)$, с точностью до направления, достигается максимальное значение прибыли $k_2(\bar{h}_2) = 1.40$, $\bar{h}_2 = \bar{r}_2$

Для игрока 3 рассмотрим оптимизационную задачу (4.3) на подсети (4.2) сети $G(a)$:

$$G \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \bar{h}_i = \langle \{x_0, x_5, x_6, x_7\}, d, p, \gamma; a \rangle .$$

Эта задача имеет вид: $k_3(\bar{h}_3) = \max\limits_{g \in H_3} k_3(g)$. Всего существует 17 различных маршрутов $r = (x_0, \ldots, x_j, \ldots, x_0)$, таких, что:

$$\sum_{x_j \in \{x_0, x_5, x_6, x_7\}} d(x_j) \leq c_3 = 5,$$

при этом только на единственном маршруте $\bar{r}_3 = (a, x_5, x_6, x_7, x_0)$, с точностью до направления, достигается максимальное значение прибыли $k_3(\bar{h}_3) = 1.04$, $\bar{h}_3 = \bar{r}_3$.

В результате, согласно теоремам 1-2, ситуация

$$\bar{h}(\pi) = ((a, x_1, x_2, a), (a, x_3, x_4, a), (a, x_5, x_6, x_7, a)) \in H$$

является согласованным равновесием по Нэшу и сильным равновесием типа SE_1, SE_2, SE_3. Числовые результаты оптимизационных задач процедуры (4.1)-(4.3) представлены в табл. 3.

Таблица 3. Решения оптимизационных задач

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{r}_i)$
1	(a, x_1, x_2, a)	5.88	2	2.11
2	(a, x_3, x_4, a)	10.60	3	1.40
3	(a, x_5, x_6, x_7, a)	18.96	5	1.04
Всего	V	35.44	10	4.55

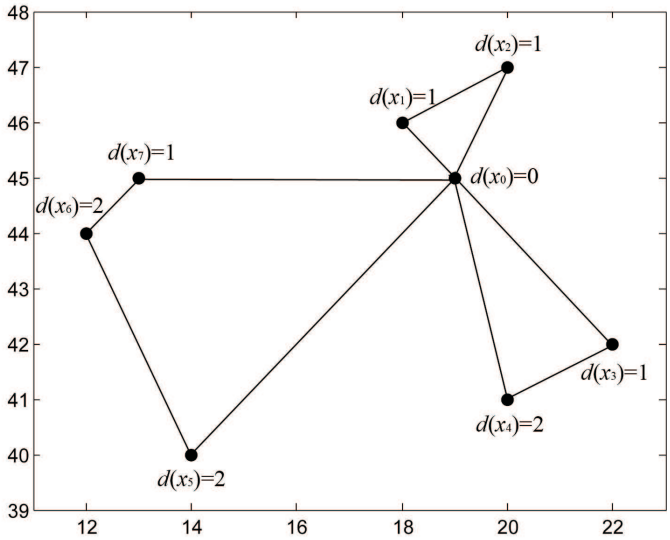

Рисунок 1. Решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 для игры $\Gamma(a)$.

Графическое изображение решения представлено на рис. 1.

Пример 1b (анализ на чувствительность). Проведем анализ чувствительности решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 к изменению параметров грузоподъемности c_i, значений спроса и цены$d(x_j)$, $p(x_j)$, а также перестановке π.

Спрос. Будем увеличивать спрос $d(x_1)$ с шагом 1. Пусть при этом перестановка π и все остальные параметры, представленные в таблице 1, остаются неизменными. На первом шаге, когда $d(x_1) = 2$, решение не меняется. При этом меняется загрузка ТС игрока 1 и его прибыль, см. табл. 4.

Таблица 4. Анализ на чувствительность, $d(x_1) = 2$

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{h}_i)$
1	(a, x_1, x_2, a)	5.88	3	6.11
2	(a, x_3, x_4, a)	10.60	3	1.40
3	(a, x_5, x_6, x_7, a)	18.96	5	1.04
Всего	V	35.44	11	8.55

На втором шаге рассматриваем спрос $d(x_1) = 3$. Решение изменилось: вторая вершина больше не принадлежит ни одному маршруту, см. табл. 5.

Таблица 5. Анализ на чувствительность, $d(x_1) = 3$

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{h}_i)$
1	(a, x_1, a)	2.82	3	9.17
2	(a, x_3, x_4, a)	10.60	3	1.40
3	(a, x_5, x_6, x_7, a)	18.96	5	1.04
Всего	$V \backslash 2$	32.39	11	11.61

Графическое изображение нового решения представлено на рис. 2.

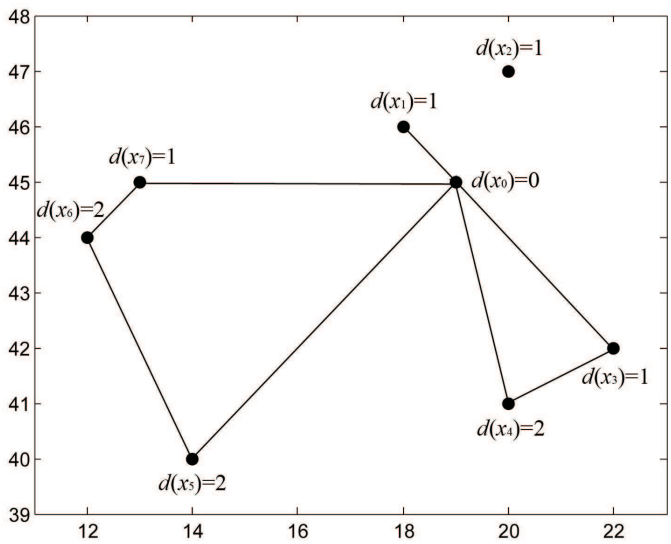

Рисунок 2. Решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 для игры $\Gamma(a)$, при $d(x_1) = 3$.

В результате, имея преимущество в перестановке π, первый игрок отказывается от обслуживания клиента x_2 в пользу более прибыльного варианта.

Цена. Исследуем чувствительность решения к изменению цены, которая назначается клиентом. Рассмотрим данные, представленные

в таблице 1, и будем последовательно уменьшать значение $p(x_1)$ с единичным шагом до тех пор, пока решение не изменится. Такое изменение происходит при $p(x_1) = 1$ и состоит в том, что клиенты x_1 и x_2 больше не обслуживаются ни одним из игроков, игрок 2 использует тривиальную стратегию (не покидает депо), см. табл. 6.

Таблица 6. Анализ на чувствительность, $p(x_1) = 1$

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{h}_i)$
1	(a, x_3, x_4, a)	10.60	3	1.40
2	(a, a)	0.00	0	0.00
3	(a, x_5, x_6, x_7, a)	18.96	5	1.04
Всего	$V \backslash \{1, 2\}$	29.56	8	1.44

Графическое изображение нового решения представлено на рис. 3.

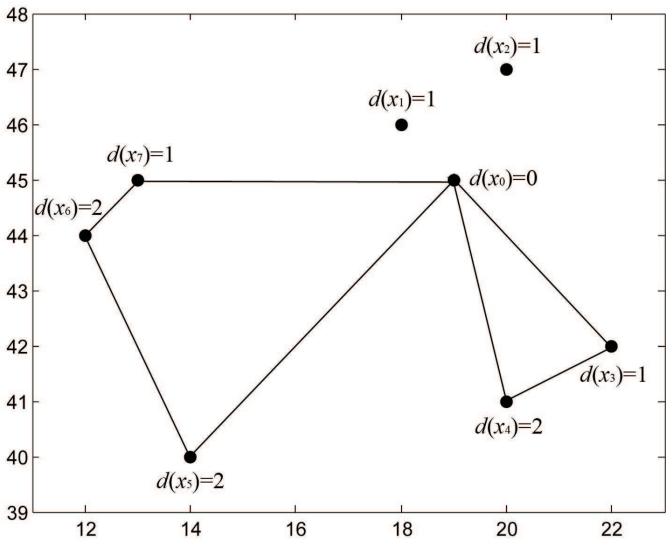

Рисунок 3. Решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 для игры $\Gamma(a)$, при $p(x_1) = 1$.

В результате два одинаковых с точки зрения грузоподъемности ТС игрока находятся в разных условиях, определяемых перестановкой π. В частности, второй игрок бездействует (покидает игру). В то

же время, последний в перестановке игрок продолжает использовать равновесную стратегию. Положительное значение прибыли определяет высокая грузоподъемность его ТС.

Грузоподъемность. Исследуем чувствительность решения к изменению параметра грузоподъемности c_i игрока i. Рассмотрим данные, представленные в табл. 1, и увеличим значение c_1 на единицу. Решение изменится и в новом решении стратегия первого игрока содержит три вершины, второй игрок остается в депо, стратегия третьего игрока не меняется. Числовые результаты при $c_1 = 4$ представлены в табл. 7.

Таблица 7. Анализ на чувствительность, $c_1 = 4$

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{h}_i)$
1	(a, x_1, x_3, x_4, a)	13.27	4	2.72
2	(a, a)	0.00	0	0.00
3	(a, x_5, x_6, x_7, a)	18.96	5	1.04
Всего	$V \backslash 2$	32.23	9	3.76

Графическое изображение нового решения представлено на рис. 4.

В результате, увеличение грузоподъемности увеличивает количество допустимых решений для соответствующего игрока.

Перестановка. Исследуем чувствительность решения от перестановки π. Рассмотрим данные, представленные в табл. 1, и перестановку $\pi = (i_1, i_2, i_3) = (3, 2, 1)$. Решение изменится и в новом решении стратегия игрока $i_1 = 3$, $c_{i_1} = 5$ содержит четыре вершины, остальные игроки (с грузоподъемностью 3) остаются в депо, см. табл. 8.

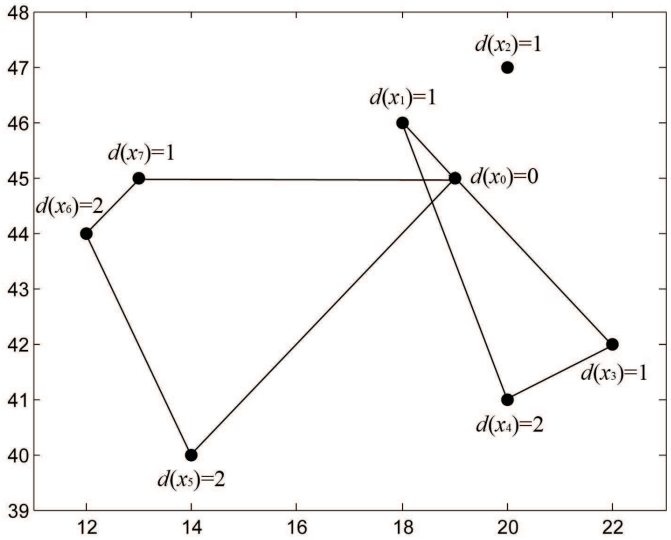

Рисунок 4. Решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 для игры $\Gamma(a)$, при $c_1 = 4$.

Таблица 8. Анализ на чувствительность, $\pi = (3, 2, 1)$

Игрок, i	Маршрут, $\bar{r}_i$	Длина маршрута $\bar{r}_i$	Загрузка ТС, $\sum\limits_{x_j \in \bar{r}_i} d(x_j)$	Прибыль, $k_i(\bar{h}_i)$
$i_1 = 3$	$(a, x_1, x_2, x_3, x_4, a)$	15.39	5	4.60
$i_2 = 2$	(a, a)	0.00	0	0.00
$i_3 = 1$	(a, a)	0.00	0	0.00
Всего	$V \backslash 2$	15.39	5	4.60

Графическое изображение нового решения представлено на рис. 5.

В результате выбор перестановки связан с борьбой за лидерство. Одна и та же перестановка может быть предпочтительна для одного игрока и нежелательна для другого.

Пример 2. Рассмотрим транспортную сеть $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a \rangle$, где $V = \{x_0, \ldots, x_{15}\}$, $x_0 = a$. Каждый клиент x_j характеризуется координатами на плоскости, спросом $d(x)$ и ценой $p(x_j)$ (см. табл. 9).

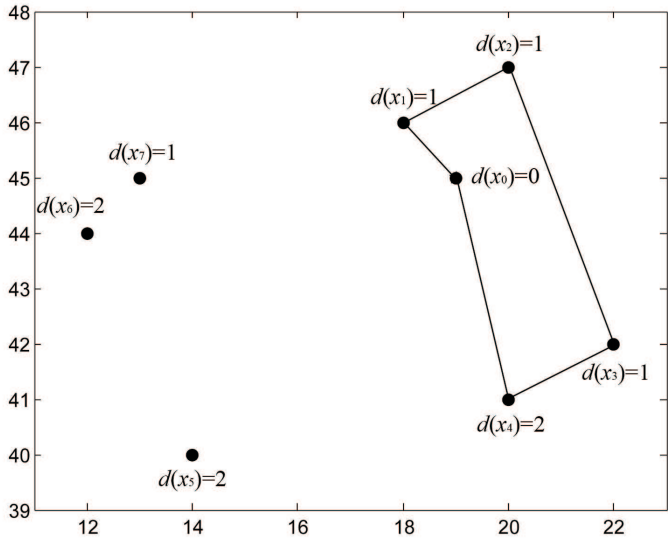

Рисунок 5. Решения NE, SE_1, SE_2, SE_3 для игры $\Gamma(a)$, при $\pi = (3, 2, 1)$.

Таблица 9. Координаты, спрос и цены клиентов, пример 2

Вершина	Координаты	$d(x)$	$p(x)$
x_0	(30, 40)	0	0
x_1	(37, 52)	19	4
x_2	(49, 49)	30	10
x_3	(52, 64)	16	10
x_4	(31, 62)	23	10
x_5	(52, 33)	11	30
x_6	(42, 41)	31	10
x_7	(52, 41)	15	10
x_8	(57, 58)	28	10
x_9	(62, 42)	8	10
x_{10}	(42, 57)	8	10
x_{11}	(27, 68)	7	10
x_{12}	(43, 67)	14	10
x_{13}	(58, 48)	6	10
x_{14}	(58, 27)	19	10
x_{15}	(37, 69)	11	10

Определим транспортные затраты между вершинами x_i и x_j как расстояния $\gamma(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$, $x_i, x_j \in V$. Рассмотрим игру маршрутизации ТС $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, 8\}$, на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$ при перестановке $\pi = (1, 2, \ldots, 8)$. Грузоподъемность ТС всех игроков считается одинаковой и равной $c_i = 35$, $i \in N$. Множество согласованных стратегий $H = \{h\}$ и функции выигрыша (3.1) определяются на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$. Для каждого игрока решение процедуры (4.1)-(4.3) имеет единственное (с точностью до направления) решение. Результаты расчетов представлены в табл. 10.

Таблица 10. Сильное равновесие

Игрок, i	Количество маршрутов в множестве H_i	Количество решений оптимизационной задачи (4.1)-(4.3) (с точностью до направления)	$\bar{r}_i$
1	877	1	$\bar{r}_1 = (a, x_6, a)$
2	876	1	$\bar{r}_2 = (a, x_1, x_7, a)$
3	712	1	$\bar{r}_3 = (a, x_4, x_{15}, a)$
4	454	1	$\bar{r}_4 = (a, x_2, a)$
5	453	1	$\bar{r}_5 = (a, x_8, x_{13}, a)$
6	187	1	$\bar{r}_6 = (a, x_5, x_3, x_{10}, a)$
7	28	1	$\bar{r}_7 = (a, x_{12}, x_{14}, a)$
8	4	1	$\bar{r}_8 = (a, x_9, x_{11}, a)$

В результате, согласно теоремам 1–2, ситуация

$$\bar{h}(\pi) = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_8) \in H$$

является согласованным равновесием по Нэшу и сильным равновесием типа SE_1, SE_2, SE_3.

Пример 3. Рассмотрим транспортную сеть $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$, где $V = \{x_0, \ldots, x_4\}$, $x_0 = a$. Каждый клиент x_j характеризуется координатами на плоскости, спросом $d(x_j)$ и ценой $p(x_j)$ (см. табл. 11).

Таблица 11. Координаты, спрос и цены клиентов, пример 3

Вершина, x_j	Координаты	$d(x_j)$	$p(x_j)$
x_0	(16;38)	0	0
x_1	(17;39)	1	5
x_2	(18;39)	1	2
x_3	(15;45)	1	15
x_4	(14;45)	1	4

Определим транспортные затраты между вершинами x_i и x_j как расстояния $\gamma(x_i, x_j) = |x_i - x_j|$, $x_i, x_j \in V$. Рассмотрим игру маршрутизации ТС $\Gamma(a) = \langle G(a), N, H, K\rangle$, где $N = \{1, 2\}$, на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$. Грузоподъемность ТС обоих игроков считается одинаковой и равной $c_i = 2$, $i \in N$. Множество согласованных стратегий $H = \{h\}$ и функции выигрыша (3.1) определяются на транспортной сети $G(a) = \langle V, d, p, \gamma; a\rangle$. Решим задачу (5.1) для поиска кооперативного равновесия. Нетрудно проверить, что в данной игре существует два симметричных кооперативных равновесия. Первое равновесие имеет вид

$$\bar{\bar{h}} = [(a, x_1, x_2, a), (a, x_3, x_4, a)] \in H,$$

при этом первый игрок получает выигрыш $K_1(\bar{\bar{h}}) = 2.35$, второй игрок – выигрыш $K_2(\bar{\bar{h}}) = 3.65$. Выигрыш максимальной коалиции равен $K_1(\bar{\bar{h}}) + K_2(\bar{\bar{h}}) = 6$.

Аналогичные рассуждения можно привести для второго кооперативного равновесия вида

$$\bar{\bar{h}} = [(a, x_3, x_4, a), (a, x_1, x_2, a)] \in H,$$

при этом суммарный выигрыш также равен 6.

7. Заключение

В работе представлен вариант задачи маршрутизации ТС в условиях конкуренции – игра маршрутизации транспортных средств. В такой игре рассматриваются несколько дистрибьюторов-игроков, имеющих общее депо. При этом имеется общее для всех игроков множество клиентов, каждый из которых характеризуется параметрами

спроса и цены. Методы решения классической задачи маршрутизации ТС здесь неприменимы. В качестве решения игры маршрутизации ТС используются такие принципы оптимальности, как равновесие по Нэшу, сильное равновесие и кооперативное сильное равновесие. В результате представлена процедура для построения решения в смысле трех типов сильного равновесия. Такие решения устойчивы относительно отклонения любой коалиции.

Несмотря на то, что игра маршрутизации ТС является NP-трудной задачей, предложенная в настоящей работе процедура дает точное решение даже для задач достаточно высокой размерности. Оценкой сверху для случая единичного спроса у каждого клиента является количество сочетаний $C_n^{c_i}$, где c_i – грузоподъемность ТС игрока i. Например, при грузоподъемности ТС равной 2 и количестве клиентов 100 с единичным спросом, множество допустимых решений оптимизационной задачи первого игрока состоит из $C_{100}^2 = 4950$ элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В., Щегряев А. *Устойчивая кооперация в динамических задачах маршрутизации транспорта* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 39–56.

2. Петросян Л.А. *Одна транспортная теоретико-игровая модель на сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011 Т. 3, вып. 4. С. 89–90.

3. Aas B., Gribkovskaia I., Halskau Sh. Sr., Shlopak A. *Routing of supply vessels to petroleum installations*// International Journal of Physical Distribution & Logistics Management. 2007. V. 37 N. 2. P. 164–179.

4. Aumann R.J. *Acceptable points in general cooperative n-person games* In A.W. Tucker (Ed.), Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Study. 1959. P. 287–324.

5. Cornillier F., Boctor F.F., Laporte G., Renaud J. *An exact algorithm for the petrol station replenishment problem* // Journal of the Operational Research Society. 2008. T. 59. N. 5. P. 607–615.

6. Dantzig G.B., Ramser J.H. *The truck dispatching problem* // Management Science. 1959. T. 6. V. 1. P. 80–91.

7. Desrochers M., Lenstra J.K., Savelsbergh M.W.P. *A classification scheme for vehicle-routing and scheduling problems* // European Journal of Operational Research. 1990. T. 46. V. 3. P. 322–332.

8. Dresher M. *The mathematics of games of strategy: theory and applications.* Santa Monica CA: Rand Corp., (Chapter 4). 1961.

9. Gairing M., Monien B., Tiemann K. *Selfish routing with incomplete information* // Theory of Computing Systems. 2008. T. 42. V.1. P. 91–130.

10. Galeotti A., Goyal S., Jackson M.O., Vega-Redondo F., Yariv L. *Network Games* // Review of Economic Studies. 2010. T. 77. V. 1. P. 218-244.

11. Jackson M. *The stability and efficiency of economic and social networks.* In B. Dutta & M. O. Jackson (Eds.), Advances in economic design. 2003. P. 319–361.

12. Lau H.C., Sim M., Teo K.M. *Vehicle routing problem with time windows and a limited number of vehicles* // European Journal of Operational Research. T. 148. V. 3. P. 559–569.

13. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions: introduction and critical survey.* New York: Wiley (Chapter 3). 1957.

14. Myerson R. *Graphs and cooperation in games* // Mathematics of Operations Research. 1977. T. 2. V. 3. P. 225–229.

15. Myerson R. *Game Theory: Analysis of Conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1991.

16. Savelsbergh M.W.P., Sol M. *The general pickup and delivery problem transportation* // Science. 1995. V. 29. P. 17–29.

17. Solomon M.M., Desrosiers J. *Time window constrained routing and scheduling problems* // Transportation Scienc. 1988. T. 22. V. 1. P. 1–13.

18. Taillard E., Badeau P., Gendreau M., Guertin F., Potvin J.Y. *A tabu search heuristic for the vehicle routing problem with soft time windows* // Transportation Science. 1997. T.31. V. 2. P. 170–186.

19. Zenkevich N., Zyatchin A. *Strong equilibrium technique in differential games* // Game Theory and Applications, 2011. T. 15. P. 207–224.

COOPERATIVE STRONG EQUILIBRIUM IN A VEHICLE ROUTING GAME

Nikolay A. Zenkevich, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, Cand.Sc., assoc.prof. (zenkevich@gsom.spbu.ru).
Andrey V. Zyatchin, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University
Deutsche Bahn Mobility Logistics AG (Deutsche Bahn) and JSC "Russian Railways" (RZD) Center for International Logistics and Supply Chain Management in SPbU Graduate School of Management, Cand.Sc., senior lecturer (zyatchin@gsom.spbu.ru).

Abstract: In the paper game-theoretic approach is considered for the vehicle routing problem with many distributors. Any customer is characterized by demand and wholesale price. Under this scenario some customers could be unvisited by a distributor. Such a statement is called vehicle routing game, VRG, in coordinated strategies.
A procedure for determining strong equilibrium in the VRG is proposed. Such solution is stable against deviations of any coalition. In the procedure the optimization problem is solved iteratively for every distributor. On each step a set of customers is reduced.
Existence of two types of strong equilibrium is solved. Cooperative strong equilibrium is presented. All results are illustrated with numerical examples.

Keywords: combinatorial optimization, Nash equilibrium, strong equilibrium, cooperative strong equilibrium, transportation network, vehicle routing problem.