Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.1, с. 3–18

УДК 62.50
ББК 22.18

ОБ ОДНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРИ МНОГИХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВАХ

Ваня Р. Барсегян
Ереванский государственный университет
Институт механики НАН РА
Армения, Ереван 0025, А. Манукяна 1
e-mail: barseghyan@sci.am
Арег А. Степанян
Институт механики НАН РА
Армения, Ереван 0019, пр. Баграмян 24-Б
e-mail: mexanikus2006@yahoo.com

В работе рассматривается коалиционная линейная дифференциальная игра нескольких лиц при многих целевых множествах. Исследуется функция платы коалиции. Получены условия выбора экстремальных стратегий и оптимальных значений коэффициентов, описывающих долю игроков в коалиции.

Ключевые слова: дифференциальные игры нескольких лиц, многие целевые множества, коалиционная игра.

1. Введение

Процесс принятия решения, как правило, в сложной системе имеет конфликтный характер и является способом взаимодействия сторон. Это становится причиной появления в формальной постановке задачи многих целей, многих критериев оптимальности. В постановке многих задач возникает необходимость объединения сторон (участников) в коалицию. В таких задачах предполагается, что стороны, действуя сообща, выбирают управления, оптимальные в смысле максимизации суммарного выигрыша коалиции, и задача заключается в определении оптимального дележа этого суммарного выигрыша.

В данной работе исследуется линейная дифференциальная игра нескольких лиц (коалиционная) при многих целевых множествах, в которой каждая сторона (игрок) воздействует на процесс с разной целью, а участники коалиции стремятся максимизировать суммарный выигрыш коалиции и оптимально делить этот выигрыш, выбирая соответствующие весовые коэффициенты, характеризующие степень «важности» игрока.

Дифференциальным играм нескольких лиц и их приложениям посвящены [2, 9]. В работах [8, 10] рассмотрены задачи преследования группой преследователей группы убегающих.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная дифференциальная игра нескольких лиц при многих целевых множествах в следующей постановке. Динамика системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A\,(t)\,x + \sum_{i=1}^{k} B_i\,(t)\,u_i\,, \tag{2.1}$$

$$u_i \in P_i \subset R^{n_i},\ i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Здесь x $\in R^n$ – фазовый вектор, u_i – управляющее воздействие i–го игрока, P_i – компактное множество в пространстве R^{n_i}, $A\,(t)$ – $(n \times n)$, $B_i\,(t)$ – $(n \times n_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ непрерывные матрицы функции при $t_0 \le t \le \theta$ (t_0 и θ заданные моменты времени).

Пусть заданы моменты времени ϑ_j $(j = 1, \ldots, m)$, такие, что $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots < \vartheta_m = \theta$, и компактные множества $M_1^{(j)}, \ldots, M_k^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$M_i^{(j)} \cap G\,(\vartheta_j, t_0, x_0) \neq \emptyset, M_a^{(j)} \cap M_b^{(j)} = \emptyset$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, m,\ \forall a, b \in \{1, \ldots, k\}\,, a \neq b)\,.$$

Здесь через $G\,(\vartheta_j, t_0, x_0)$ обозначена область достижимости системы (2.1) из начального состояния $\{t_0, x_0\}$ к моментам времени ϑ_j.

Множество $M_i^{(j)}$ является целевым для i–го игрока в момент времени ϑ_j.

Отметим, что области достижимости $G(\vartheta_j, t_0, x_0)$ $(j = 1, \ldots, m)$ являются замкнутыми, ограниченными и выпуклыми множествами и с изменением t и x деформируются непрерывно [5, 6].

Предполагается, что игроки имеют возможность образования коалиции и между членами коалиции существует полный обмен информацией [2,9].

Будем рассматривать дифференциальную игру нескольких лиц при многих целевых множествах, в которой k_1 игроков (не нарушая общности можно предполагать, что первые k_1 игроков) объединяются в коалицию.

Функцию платы коалиции определим как сумму платы игроков коалиции следующим образом:

$$\Im(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) = \sum_{i=1}^{k_1} \Im_i(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im}), \tag{2.2}$$

где

$$\Im_i(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{im}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right].$$

Здесь $\rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right]$ – евклидово расстояние положения системы (2.1) от целевых множеств $M_i^{(j)}$ i-го игрока в момент времени ϑ_j $(j = 1, \ldots, m)$. Весовые коэффициенты α_{ij} характеризуют степень «важности» i-го игрока коалиции на интервале времени $(\vartheta_{j-1}, \vartheta_j]$ и удовлетворяют соотношениям $\alpha_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, k_1; j = 1, \ldots, m)$, $\sum\limits_{i=1}^{k_1} \alpha_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m$, и подлежат определению.

Целью объединения k_1 игроков в коалицию является выбор программных стратегий $u_i = u_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, k_1)$, минимизирующих функцию платы коалиции (2.2), т.е.

$$\Im(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right] \tag{2.3}$$

при любых стратегиях остальных игроков (т.е. игроков, не входящих в коалицию).

Введем следующие обозначения:

$$P = P_1 \times \ldots \times P_{k_1},\, Q = P_{k_1+1} \times \ldots \times P_k\,,$$
$$u = (u_1, \ldots, u_{k_1})\,,\, v = (u_{k_1+1}, \ldots, u_k)\ , \qquad (2.4)$$
$$K_U = \{1, 2, \ldots, k_1\}\,,\, K_V = \{k_1+1, \ldots, k\}\ .$$

Сформулируем следующую задачу:

Задача 2.1. Требуется для игроков коалиции выбрать такие программные управления $u^0 = \left(u_1^0, \ldots, u_{k_1}^0\right)$ и значения параметров α_{ij}^0 $(i = 1, \ldots, k_1; j = 1, \ldots, m)$, которые при любых возможных воздействиях остальных игроков K_V обеспечивают возможно меньшее значение функционала $\Im(\cdot)$ (2.3).

3. Решение задачи

Предположим, что в момент времени t_0 фазовое состояние игры является x_0.

Рассмотрим движение $x(t)\,(t_0 \le t \le \vartheta_m)$, описываемое уравнением (2.1) и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Пусть игроки выбрали свои некоторые стратегии, тогда движение системы (2.1) к моменту времени ϑ_j придет в состояние $x(\vartheta_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$, которое вычисляется по формуле Коши

$$x(\vartheta_j) = X[\vartheta_j, t_0]\, x_0 + \int\limits_{t_0}^{\vartheta_j} X[\vartheta_j, \tau] \left(\sum_{i=1}^{k} B_i(\tau)\, u_i \right) d\tau\,,$$

где $X[t, \tau]$ – фундаментальная матрица решения однородной части системы (2.1).

Для i-го игрока коалиции расстояние от фазовой точки $x(\vartheta_j)$ до целевого множества $M_i^{(j)}$ имеет следующий вид [1, 4]:

$$\rho\left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)}\right] = \max_{\left\|l_i^{(j)}\right\|=1} \Bigg(< l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, t_0]\, x_0 > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{\vartheta_j} < l_i^{(j)}, X[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau \Bigg)\ .$$

Тогда функция платы коалиции, согласно (2.2) (или (2.3)), будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
\Im\left(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}\right)= \\
=\sum_{i=1}^{k_1}\left\{\max_{\left\|l_i^{(s)}\right\|=1(s=1,\ldots,m)} \sum_{j=1}^{m}\left[<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, t_0\right] x_0>+\right.\right. \\
+\min_{-q \in M_i^{(j)}}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, q>+ \\
+\int_{t_0}^{\vartheta_j}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau) u_\lambda>d\tau+ \\
\left.\left.+\int_{t_0}^{\vartheta_j}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau) u_\lambda>d\tau\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Игроки коалиции стремятся выбором своих стратегий уменьшить значение функции платы (3.1) при любых стратегиях остальных игроков.

Обозначим

$$\begin{gathered}
\bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}\right)= \\
=\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \Im\left(t_0, x_0, u_1, \ldots, u_k, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}\right)= \\
=\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \sum_{i=1}^{k_1}\left\{\max_{\left\|l_i^{(s)}\right\|=1(s=1,\ldots,m)} \sum_{j=1}^{m}\left[<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, X\left[\vartheta_j, t_0\right] x_0>+\right.\right. \\
+\min_{-q \in M_i^{(j)}}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, q>+\int_{t_0}^{\theta}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau) u_\lambda>d\tau \\
\left.\left.+\int_{t_0}^{\theta}<\alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau) u_\lambda>d\tau\right]\right\},
\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\bar{X}\left[\vartheta_j, \tau\right]=\begin{cases} X\left[\vartheta_j, \tau\right], & \text{при } 0 \leq \tau \leq \vartheta_j, \\ 0, & \text{при } \vartheta_j<\tau \end{cases}$$

нулевое продолжение фундаментальной матрицы решения. Здесь использованы обозначения (2.4).

Предполагаем, что имеет место регулярный случай, то есть для каждой позиции $\{t_0, x_0\}$ и любого набора $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22})$ существует набор векторов, максимизирующий выражение в фигурных скобках в формуле (3.2), который единственен, и обозначим этот набор

$$\left\{l_1^{(1)^o}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}), \ldots, l_2^{(2)^o}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22})\right\}.$$

Отметим, что если функция

$$+\int\limits_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau \Bigg]\Bigg\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k_1} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \Bigg[< \alpha_{ij} l_i^{(j)}, X[\vartheta_j, t_0]\, x_0 > + \min_{-q \in M_i^{(j)}} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, q > + \right.$$
$$+ \min_{u \in P} \int\limits_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau +$$
$$\left. + \max_{v \in Q} \int\limits_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau \Bigg]\right\}$$

вогнута по переменным $l_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, k_1; j = 1, \ldots, m)$, то в **задаче 2.1.** имеет место регулярный случай [3,5,7].

Тогда выражение (3.2) запишем в следующей форме:

$$\bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{m} \Bigg(< \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), X[\vartheta_j, t_0]\, x_0 > +$$
$$+ \min_{-q \in M_i^{(j)}} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), q > \Bigg) +$$
$$+ \min_{u \in P} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}),$$
$$\bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau +$$
$$+ \max_{v \in Q} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0,\, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}),$$
$$\bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau)\, u_\lambda > d\tau$$

или

$$\bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{m} \Bigg(< \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), X[\vartheta_j, t_0]\, x_0 > +$$
$$+ \min_{-q \in M_i^{(j)}} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), q > \Bigg) +$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{k_1}\min_{u_\lambda\in P_\lambda}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{\theta}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_\lambda\left[\vartheta_j,\,\tau\right]u_\lambda>d\tau+$$
$$+\sum_{\lambda=k_1+1}^{k}\max_{u_\lambda\in P_\lambda}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0}^{\theta}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_\lambda\left[\vartheta_j,\,\tau\right]u_\lambda>d\tau, \tag{3.3}$$

где $\bar{H}_\lambda\left[\vartheta_j,\,\tau\right]=\bar{X}\left[\vartheta_j,\,\tau\right]\,B_\lambda\left(\tau\right)$.

Из (3.3) следует, что игроки коалиции свои гарантированные (минимаксные) стратегии должны выбирать из следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_1\left[\vartheta_j,\,t\right]u_1^0>=\\
=\min_{u_1\in P_1}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_1\left[\vartheta_j,\,t\right]u_1>\\
\ldots\\
\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k_1}\left[\vartheta_j,\,t\right]u_{k_1}^0>=\\
=\min_{u_{k_1}\in P_{k_1}}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k_1}\left[\vartheta_j,\,t\right]u_{k_1}>\\
t\in\left[t_0,\vartheta_m\right],\end{gathered} \tag{3.4}$$

а стратегии остальных игроков выбираются из соотношений:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k_1+1}\left[\vartheta_j,\,t\right]\bar{u}_{k_1+1}>=\\
=\max_{u_{k_1+1}\in P_{k_1+1}}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k_1+1}\left[\vartheta_j,\,t\right]u_{k_1+1}>\\
\ldots\\
\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k}\left[\vartheta_j,\,t\right]\bar{u}_{k}>=\\
=\max_{u_{k}\in P_{k}}\sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{m}<\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right),\bar{H}_{k}\left[\vartheta_j,\,t\right]u_{k}>\\
t\in\left[t_0,\vartheta_m\right].\end{gathered} \tag{3.5}$$

Следовательно, выбирая стратегии $u_i^0\left(t\right)=u_i^0\left(t,t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right)$ $\left(i=1,\ldots,k_1\right)$ игроков коалиции и стратегии $\bar{u}_i\left(t\right)=$ $=\bar{u}_i\left(t,t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{k_1m}\right)$ $\left(i=k_1+1,\ldots,k\right)$ остальных игроков согласно соотношениям (3.4) и (3.5) соответственно, и подставляя их в (3.3) получим значение функционала $\bar{\Im}(\cdot) = \bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m})$ как функцию от параметров $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}$:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, , \ldots, \alpha_{k_1 m}) = \\
&= \sum_{i=1}^{k_1} \left[\sum_{j=1}^{m} \left\{ < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), X[\vartheta_j, t_0] x_0 > + \right.\right. \\
&+ \min_{-q \in M_i^{(j)}} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), q > + \\
&+ \int_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), \\
&\bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=1}^{k_1} B_\lambda(\tau) u_\lambda^0(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) > d\tau + \\
&+ \int_{t_0}^{\theta} < \alpha_{ij} l_i^{(j)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}), \\
&\left.\left. \bar{X}[\vartheta_j,\, \tau] \sum_{\lambda=k_1+1}^{m} B_\lambda(\tau) \bar{u}_\lambda(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}) > d\tau \right\} \right].
\end{aligned}
$$

Теперь для определения оптимальных значений для параметров $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}$ необходимо найти

$$
\min_{\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}} \bar{\Im}(t_0, x_0, \alpha_{11}, , \ldots, \alpha_{k_1 m}) \tag{3.6}
$$

при условии $\alpha_{ij} > 0\,(i = 1, \ldots, k_1; j = 1, \ldots, m)$, $\sum\limits_{i=1}^{k_1} \alpha_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, m$.

Решение этой задачи условного экстремума существует [7].

Пусть решением этой задачи условного экстремума являются значения параметров $\alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{k_1 m}^0$, так что $\bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{k_1 m}^0\right) = \Im^0(t_0, x_0)$. Следовательно, оптимальные управления игроков коалиции будут $u_i^0(t) = u_i^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{k_1 m}^0\right)$ $(i = 1, \ldots, k_1)$ $t \in [t_0, \vartheta_m]$.

Таким образом, полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть имеет место регулярный случай. Тогда при выборе игроками коалиции программных управлений из соотношений (3.4) и значений* $\alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{k_1 m}^0$, *минимизирующих (3.6), при любых возможных воздействиях остальных игроков* K_V *будет обеспечено наименьшее значение функционала* $\Im(\cdot)$ *(2.3).*

Отметим, что дифференциальная игра нескольких лиц при многих целевых множествах, рассмотренная как антагонистическая игра двух коалиций, существенно отличается от игры двух лиц и заключается в выборе значений параметров $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k_1 m}$, характеризующих степень «важности» игроков входящих в коалицию.

4. Пример

Приведем конкретный пример, иллюстрирующий выше изложенное.

Рассматривается движение объекта, которому в каждый момент времени задается фазовая скорость как сумма трех управляющих воздействий и каждая сторона имеет свои целевые множества в заданные моменты времени:

$$\dot{x} = u_1 + u_2 + u_3\,. \tag{4.1}$$

Здесь $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – фазовый вектор объекта, $u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{pmatrix}$ – вектор управляющего воздействия i-ой стороны, стесненный условием $u_i \in P_i \subset R^2$, где P_i компакты $(i = 1, 2, 3)$.

Предположим, что заданы моменты времени $t_0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 = \theta$. Пусть также заданы компактные множества $M_i^{(j)} \subset R^2$, которые являются целевыми множествами для i-го игрока $(i = 1, 2, 3)$ в момент времени ϑ_j $(j = 1, 2)$.

В момент времени $t = t_0$ система (4.1) находится в положении $x(t_0) = x_0$.

Пусть игроки $i = 1$ и $i = 2$ имеют возможность объединения для создания коалиции. Составим плату коалиции игроков как сумму расстояний системы в моменты времени ϑ_j от целевых множеств с соответствующими коэффициентами:

$$\Im = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \rho \left[x(\vartheta_j), M_i^{(j)} \right], \tag{4.2}$$

где

$$\alpha_{ij} \geq 0,\ \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ij} = 1 \ \text{ для всех } j = 1, 2\,.$$

Задача игроков коалиции заключается в следующем:

Требуется найти оптимальные управляющие воздействия u_i, $i \in \{1,2\}$, которые минимизируют плату (4.2) при любых стратегиях третьего игрока.

Предполагаем, что $P_i = O\left(\{0;0\};p_i\right)$ $(i=1,2,3)$, где $O\left(\{0;0\};p_i\right) = = \{l \in R^2, \|l\| \le p_i\}$.

Тогда гарантированное значение платы коалиции будет

$$\begin{gathered}
\bar{\Im}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = \\
= \max_{\left\{\left\|l_i^{(j)}\right\| \le 1; i=1,2; j=1,\ldots,m\right\}} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left(\alpha_{ij} < l_i^{(j)}, X\left[t, t_0\right] x_0 > + \right.\right. \\
\left. + \alpha_{ij} \min_{-q \in M_i^{(j)}} < l_i^{(j)}, q > \right) + \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_3 \in P_3} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] u_\alpha > d\tau + \\
+ \int_{t_0}^{\theta} \min_{u_1 \in P_1} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] u_1 > d\tau + \\
\left. + \int_{t_0}^{\theta} \min_{u_2 \in P_2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} < \alpha_{ij} l_i^{(j)}, \bar{X}[\vartheta_j, \tau] u_2 > d\tau \right\}
\end{gathered} \tag{4.3}$$

или $\Im^0\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right) = 0$, если правая часть (4.3) меньше нуля.

Здесь $X[t,t_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В регулярном случае оптимальное управление игроков будем искать из соотношений (3.4), а стратегию третьего игрока следует искать из соотношения (3.5):

$$\begin{gathered}
u_1^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{2m}\right) = -p_1 w\,, \\
u_2^0\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{2m}\right) = -p_2 w\,, \\
\bar{u}_3\left(t, t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{2m}\right) = p_3 w\,, \\
w = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \bar{X}'[\vartheta_j, t] {l_i^{(j)}}^0 (t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{2m})}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \bar{X}'[\vartheta_j, t] {l_i^{(j)}}^0 (t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{2m}) \right\|}\,, \quad t \in [t_0, \theta]\ .
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь ${l_i^{(j)}}^0\left(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22}\right)$ $(j=1,\ldots,m)$ максимизирующий набор, определяющийся из (4.3).

Учитывая введенные обозначения, будем иметь

$$w=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})\right\|}, \text{ при } t_0\le t<\vartheta_1\,,\\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_{i2}l_i^{(2)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_{i2}l_i^{(2)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})\right\|}\quad, \text{при } \vartheta_1\le t<\vartheta_2\,.\end{cases}$$

Пусть $t_0=0$, $x_0=(0,0)$ и $\vartheta_1=1$, $\vartheta_2=2$, а целевые множества – точечные:

при $\vartheta_1=1$ $\quad M_1^{(1)}(0;-3)$, $\quad$ при $\vartheta_2=2$ $\quad M_1^{(2)}(2;5)$,
$M_2^{(1)}(-2;-1)$, $\quad M_2^{(2)}(3;-3)$,
$M_3^{(1)}(2;0)$, $\quad M_3^{(2)}(-5;4)$.

Предполагаем, что $p_i=1$, то есть $P_i=O\left(\{0,0\};1\right)$ $(i=1,2,3)$.

Тогда согласно (4.4) будем иметь

$$u_i^0\left(t,t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)=$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2}\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})\right\|} & \text{при}\quad t_0\le t<\vartheta_1\,,\\ -\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_{i2}l_i^{(2)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_{i2}l_i^{(2)^0}(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22})\right\|} & \text{при}\quad \vartheta_1\le t\le\vartheta_2\end{cases}\qquad (i=1,2)\ ,$$
$$\bar{u}_3\left(t,t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)=-u_1^0\left(t,t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)\ . \tag{4.5}$$

Подставляя найденные управления в выражения платы $\Im(\cdot)$ (4.3), получим

$$\bar{\Im}\left(t_0,x_0,\alpha_{11},\ldots,\alpha_{22}\right)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left[-\int_0^1\left\|\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}l_i^{(j)^0}\right\|d\tau-\right.$$
$$-\int_1^2\left\|\sum_{i=1}^{2}\alpha_{i2}l_i^{(2)^0}\right\|d\tau-\alpha_{11}<l_1^{(1)^0},\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}>-\alpha_{12}<l_1^{(2)^0},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}>-$$
$$\left.-\alpha_{21}<l_2^{(1)^0},\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}>-\alpha_{22}<l_2^{(2)^0},\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}>\right]\ .$$

Имея ввиду, что $\alpha_{21}=1-\alpha_{11}$ и $\alpha_{22}=1-\alpha_{12}$ и проводя численно максимизацию функции $\Im(\cdot)$ по векторам $l_i^{(j)}$ для каждой пары $(\alpha_{11},\alpha_{12})$ в области $[0,1]\times[0,1]$ с шагом 0.05 (т.е. получены значения для 441 пар $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$). Графически зависимость значений функций $\Im(\cdot)$ от параметров α_{11}, α_{12} представится в следующей форме:

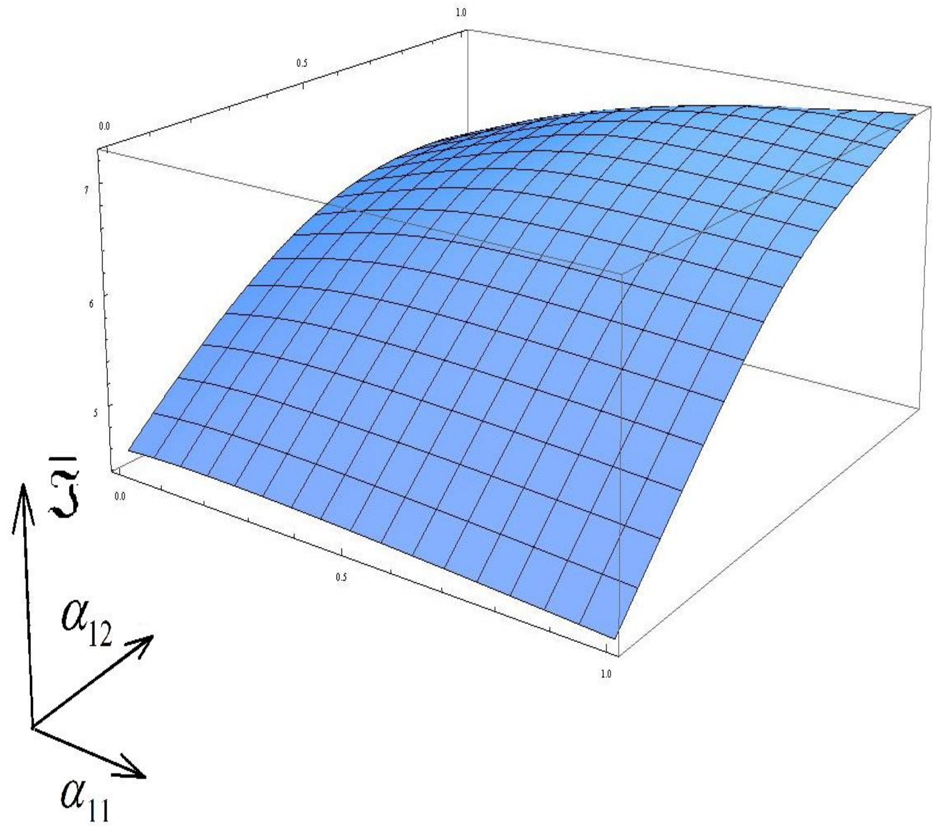

Рисунок 1. Зависимость $\bar{\Im}$ от параметров α_{11} и α_{12}

Минимальное значение $\bar{\Im}(\cdot)$ является $\Im^0(0, \{0,0\}, 1, 0, 0, 1) = 4.4511$ и достигается при значениях $\alpha_{11}^0 = 1, \alpha_{12}^0 = 0\,(\alpha_{21}^0 = 0, \alpha_{22}^0 = 1)$.

Получаем также, что

$$l_1^{(1)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{22}^0) = \begin{pmatrix} 0.1712 \\ 0.9852 \end{pmatrix},$$

$$l_1^{(2)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{22}^0) = \begin{pmatrix} 0.2352 \\ 0.1298 \end{pmatrix},$$

$$l_2^{(1)^0}(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{22}^0) = \begin{pmatrix} -0.0946 \\ 0.0341 \end{pmatrix},$$

$$l_2^{(2)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{22}^0\right) = \begin{pmatrix} -0.7875 \\ 0.6163 \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные значения в (4.5), находим оптимальные стратегии игроков коалиции:

$$u_1^0\left(t\right) = u_2^0\left(t\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.3591 \\ -0.9332 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 0 \leq t < 1\,, \\ \begin{pmatrix} 0.7875 \\ -0.6163 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 1 \leq t \leq 2\,, \end{cases} \tag{4.6}$$

а для третьего игрока $\bar{u}_3\left(t\right) = -u_1^0\left(t\right)$.

Уравнение движения системы (4.1) при найденных управляющих воздействиях (4.6) примет следующий вид:

$$x\left(t\right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0.3591t \\ -0.9333t \end{pmatrix} & \text{при} \quad 0 \leq t < 1\,, \\ \begin{pmatrix} 1.4667t - 0.7875 \\ -1.5496t + 0.6163 \end{pmatrix} & \text{при} \quad 1 \leq t \leq 2\,. \end{cases}$$

Следовательно в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$ система окажется в положении

$$x\left[1\right] = \begin{pmatrix} 0.3591 \\ -0.9333 \end{pmatrix}, \quad x\left[2\right] = \begin{pmatrix} 1.1467 \\ -1.5496 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\Im_1 = \alpha_{11}^0 \rho \left[x\left[1\right], M_1^{(1)}\right] + \alpha_{12}^0 \rho \left[x\left[2\right], M_1^{(2)}\right] = 2.0977\,,$$

$$\Im_2 = \alpha_{21}^0 \rho \left[x\left[1\right], M_2^{(1)}\right] + \alpha_{22}^0 \rho \left[x\left[2\right], M_2^{(2)}\right] = 2.3534\,,$$

а суммарное отклонение движения игры от целевых множеств игроков коалиции будет

$$\tilde{\Im}_1 = \rho \left[x\left[1\right], M_1^{(1)}\right] + \rho \left[x\left[2\right], M_1^{(2)}\right] = 8.7026\,,$$

$$\tilde{\Im}_2 = \rho \left[x\left[1\right], M_2^{(1)}\right] + \rho \left[x\left[2\right], M_2^{(2)}\right] = 4.7135\,.$$

Для наглядности приведем сравнение со следующими случаями:

a) Решая задачу минимизации платы коалиции в случае $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$, значение платы $\Im(t_0, x_0, 1, 1, 1, 1) = 14.7806$, что больше чем значение $\bar{\Im}\,(t_0, x_0, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{22})$ при любых значениях $\sum_{i=1}^{2} \alpha_{ij} = 1$ для $j = 1, 2$. Это следует также из определения функционала $\Im\,(\cdot)$.

b) Решая рассмотренную задачу для игроков $i = 1$ и $i = 3$, получаем следующие результаты:

Минимум платы $\bar{\Im}\,(t_0, x_0, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32})$ достигается при значениях параметров $\alpha_{11}^0 = 0, \alpha_{12}^0 = 1\,(\alpha_{31}^0 = 1, \alpha_{32}^0 = 0)$ и равно $\Im\,(0, \{0, 0\}\,, 0, 1, 1, 0) = 4.8776$.

$$l_1^{(1)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{32}^0\right) = \begin{pmatrix} 0.2199 \\ 0.0077 \end{pmatrix},$$

$$l_1^{(2)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{32}^0\right) = \begin{pmatrix} -0.237 \\ -0.9715 \end{pmatrix},$$

$$l_3^{(1)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{32}^0\right) = \begin{pmatrix} -0.9254 \\ 0.3789 \end{pmatrix},$$

$$l_3^{(2)^0}\left(t_0, x_0, \alpha_{11}^0, \ldots, \alpha_{32}^0\right) = \begin{pmatrix} -0.0098 \\ -0.604 \end{pmatrix}.$$

Состояние системы в заданные моменты времени будет $x\,[1] = \begin{pmatrix} 0.8909 \\ 0.4542 \end{pmatrix}$ и $x\,[2] = \begin{pmatrix} 1.128 \\ 1.4257 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\Im_1 = \alpha_{11}^0 \rho\left[x\,[1]\,, M_1^{(1)}\right] + \alpha_{12}^0 \rho\left[x\,[2]\,, M_1^{(2)}\right] = 3.6792\,,$$

$$\Im_3 = \alpha_{31}^0 \rho\left[x\,[1]\,, M_3^{(1)}\right] + \alpha_{32}^0 \rho\left[x\,[2]\,, M_3^{(2)}\right] = 1.1985\,,$$

а суммарное отклонение движения от целевых множеств игроков этой коалиции будет

$$\tilde{\Im}_1 = \rho\left[x\,[1]\,, M_1^{(1)}\right] + \rho\left[x\,[2]\,, M_1^{(2)}\right] = 7.2464\,,$$

$$\tilde{\Im}_3 = \rho\left[x\,[1]\,, M_3^{(1)}\right] + \rho\left[x\,[2]\,, M_3^{(2)}\right] = 7.8452\,.$$

Сравнивая результаты для первого игрока при составлении коалиции со вторым и с третьим игроком получаем, что при составлении коалиции со вторым игроком движение меньше отклоняется от целевых множеств первого игрока $M_1^{(1)}$ и $M_1^{(2)}$ чем при составлении коалиции с третьим игроком. Следовательно, в зависимости от интересов (приоритетов), игрок может выбирать с кем составлять коалицию.

Таким образом, предложен алгоритм нахождения оптимальных программных стратегий и значений коэффициентов, характеризующих «важность» участия игроков в коалиции. Показано, что построенные стратегии обеспечивают наименьшее значение платы коалиции. Для конкретной системы построены явные выражения оптимальных управляющих воздействий, проведено сравнение разных случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Степанян А.А. *Гипотетическое рассогласование для одной дифференциальной игры нескольких лиц при многих целевых множествах* // Известия НАН РА, Механика. 2011. Т. 64, № 2. С. 63–72.

2. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения.*. М.: Советское радио, 1980.

3. Габриелян М.С. *Программные конструкции для игровых задач при m целевых множествах* // Изв. АН Арм. ССР, Механика. 1985. Т. 38, № 3. С. 55–66.

4. Карлин С. *Математические методы в теории игр, программировании и экономике.* М.: Мир, 1964.

5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

6. Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* М.: Наука, 1972.

7. Лутманов С.В. *Курс лекций по методам оптимизации.* Москва-Ижевск, 2001.

8. Петров Н.Н., Петров Н.Н. *О дифференциальной игре «казаки-разбойники»* // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1366–1374.

9. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения.* Томск: Изд-во Томск. Ун-та, 1985.

10. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. *О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих* // ДАН Узб. ССР. 1983. № 4. С. 3–6.

ON ONE COALITION DIFFERENTIAL GAME AT MANY TARGET SETS

Vanya R. Barseghyan, Yerevan State University, Institute of Mechanics, Dr.Sc. (barseghyan@sci.am),
Areg A. Stepanyan, Institute of Mechanics, NAS RA, Cand.Sc. (mexanikus2006@yahoo.com).

Abstract: A coalition linear differential game of several persons is considered at many target sets. The payment function of coalition is studied. The conditions of a choice of extreme strategies and optimum values of the coefficients describing the share of players in a coalition are received.

Keywords: differential games of several persons, many target sets, coalition game.