Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.1, с. 91–115

УДК 517.957+517.988+519.833.2+519.837
ББК 22.18

О СУЩЕСТВОВАНИИ ε-РАВНОВЕСИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ, СВЯЗАННЫХ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ, УПРАВЛЯЕМЫМИ МНОГИМИ ИГРОКАМИ

Андрей В. Чернов*
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Работа посвящена получению достаточных условий существования ε-равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными уравнениями в частных производных второго порядка типа стационарного уравнения диффузии-реакции. Стратегии игроков предполагаются программными. Основу разрабатываемой теории составляет одно утверждение о тотальном сохранении разрешимости и равномерной ограниченности решений операторных уравнений первого рода, доказанное автором ранее посредством некоторого обобщения метода монотонных операто-

© 2014 А.В. Чернов.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

ров. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о выпуклости множества достижимости (множества решений) управляемого полулинейного эллиптического уравнения.

Ключевые слова: бескоалиционная игра со многими участниками, полулинейные эллиптические уравнения второго порядка, выпуклость множества достижимости, программные стратегии, ε-равновесие.

1. Введение

На сегодняшний день существует обширная литература, посвященная изучению различных вопросов теории дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, как линейными, так и нелинейными. Что касается игровых задач, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных, то они на данный момент исследованы в существенно меньшей степени, см. соответствующую библиографию в [16, 18, 19]. Игры многих лиц, связанные с полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, изучались, видимо, лишь для эволюционного случая, см., например, [18, 19]. Для полулинейных эллиптических уравнений автору известны лишь некоторые результаты, касающиеся теории оптимального управления, см., например, [22, 14, 15, 12] (там же см. дальнейшую библиографию).

Работа посвящена получению достаточных условий существования ε-равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка типа стационарного уравнения диффузии-реакции. Стратегии игроков предполагаются программными (понятие динамической, то есть развивающейся во времени, игры для эллиптических уравнений не имеет смысла). Основу разрабатываемой теории составляет одно утверждение о тотальном сохранении разрешимости и равномерной ограниченности решений операторных уравнений первого рода, доказанное автором в [20] посредством некоторого обобщения метода монотонных операторов. В качестве вспомогательного результата, представляющего самостоятельный интерес, доказывается теорема о выпуклости множества достижимости (множества решений) управляемого полулинейного эллиптического уравнения.

2. Об одной игровой задаче, связанной со стационарными уравнениями диффузии-реакции

Пусть $n \geq 2$ – заданное натуральное число; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область; $\tau \geq 0$ – переменная времени; $t = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \overline{\Pi}$ – набор пространственных переменных. Следующая система называется *системой нестационарных уравнений диффузии* или *диффузии-реакции*, см., например, [3, § 3]:

$$\frac{\partial x^{(j)}}{\partial \tau} - \operatorname{div}\left(A^{(j)} \nabla_t x^{(j)}\right) + b^{(j)} x^{(j)} =$$
$$= f^{(j)}\left(\tau, t, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, \nabla_t x^{(1)}, \ldots, \nabla_t x^{(m)}\right), \tag{2.1}$$

$\tau \geq 0$, $t \in \Pi$, $j = \overline{1, m}$. Интерпретация параметров здесь может быть следующая: $x^{(j)}(\tau; t)$ – концентрация j-го вещества (в частности, примеси, загрязнителя и т.п.) в некотором растворе, заполняющем область Π; $A^{(j)}(t)$ – коэффициент диффузии, то есть проницаемости среды для j-го вещества; $b^{(j)}(\tau; t)$ – коэффициент[1], характеризующий скорость распада j-го вещества за счет химических реакций, воздействия солнечных лучей и т.д.; $f^{(j)}(.)$ – плотность внутренних источников j-го вещества.

Таким образом, система (2.1) описывает, в частности, поведение m различных веществ (примесей) в растворе с учетом эффектов диффузии и при наличии химических реакций между примесями. Так, например, как указано в работе [21], образование, распад и распространение по пространству ключевых метаболитов в крови описывается уравнениями[2]:

$$\frac{\partial c_k}{\partial \tau} + \left(\nabla, V_k c_k - D_k \nabla c_k\right) = f_k(c_1, \ldots, c_k), \quad k = \overline{1, m},$$

где D_k – коэффициент диффузии k-го метаболита, c_k – его концентрация, f_k – член, описывающий кинетику локального производства

---

[1] Вообще говоря, соответствующее слагаемое можно включить в правую часть уравнения, но это не всегда оказывается целесообразно математически.

[2] Напомним, что скалярное произведение $\left(\nabla, D_k \nabla c_k\right)$ это то же самое, что $\operatorname{div}\left(D_k \nabla c_k\right)$.

данного вещества, V_k – скорость его конвективного переноса. В соответствии с целями моделирования в [21] рассматривается продольное (прямоугольное) сечение сосуда в окрестности образующегося тромба. Но, вообще говоря, можно рассматривать и поперечное сечение. Кроме того, в [21] исследуется завершающая (критическая) стадия развития тромба, когда процесс происходит очень быстро (занимает по времени порядка десяти минут). Поэтому естественно использование именно нестационарного уравнения диффузии-реакции. Вместе с тем, докритическая стадия может развиваться годами.

Замечание 2.1. Отметим, что система (2.1) допускает и ряд других толкований, то есть является математической моделью довольно разнообразных явлений. В частности, при постоянных коэффициентах $A^{(j)}$ получаем систему уравнений теплопроводности. Как указано в [11, введение], в последнее время модели в полулинейных уравнениях типа «диффузия–реакция» получили широкое распространение в области математической экологии взаимодействующих популяций; был накоплен большой положительный опыт работы с такого рода моделями.

В случае, когда распределение плотности (или температуры) является установившимся (так будет, например, если распределение источников $f^{(j)}$ и коэффициенты $b^{(j)}$ не зависят от времени τ), из нестационарных уравнений (2.1) выбрасываются члены, связанные со временем. В результате вместо системы (2.1) получаем систему стационарных уравнений:

$$-\mathrm{div}\,\big(A^{(j)}\nabla x^{(j)}\big)+b^{(j)}x^{(j)}=f^{(j)}\big(t,x^{(1)},\ldots,x^{(m)},\nabla x^{(1)},\ldots,\nabla x^{(m)}\big), \tag{2.2}$$

$x^{(j)}=x^{(j)}(t)$, $t\in\Pi$; $j=\overline{1,m}$. При этом практический смысл всех параметров остается тем же самым. *Система стационарных уравнений диффузии-реакции* (2.2) тоже имеет важное прикладное значение и потому является объектом пристального изучения, см., например, [3, § 2], в том числе с позиций теории оптимального управления [22, 12] и теории обратных задач [2] (там же см. дальнейшую библиографию).

Предположим теперь, что $\Pi\subset\mathbb{R}^2$ – поперечное сечение кровеносного сосуда, и в кровь неконтролируемым образом выделяется постороннее вещество (токсин или бактериальный фермент); его концентрацию обозначим $x^{(1)}$. Кроме того, в результате защитной реакции организма выделяется (вообще говоря, непрогнозируемым образом) антифермент, предназначенный для нейтрализации токсина[3]; его концентрацию обозначим $x^{(2)}$. Предполагается также, что защитная функция организма ослаблена, в результате чего количества выделяемого антифермента недостаточно для нейтрализации токсина, и требуется введение искусственного фермента (лекарства); его концентрацию обозначим $x^{(3)}$. Будем считать, что на данном промежутке времени процесс является установившимся (стационарным). Таким образом,

$$x^{(j)} = x^{(j)}(t), \quad t \in \Pi, \quad j = \overline{1,3}.$$

Кроме того, будем предполагать, что из эмпирических данных известна среднестатистическая зависимость концентрации токсина от концентраций $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$; обозначим ее $\Psi(x^{(2)}, x^{(3)})$. Иными словами, токсин как бы «стремится» минимизировать величину

$$I_1 = \int\limits_{\Pi} \Big(x^{(1)}(t) - \Psi\big[x^{(2)}(t), x^{(3)}(t)\big]\Big)^2\, dt.$$

Тот факт, что организм ослаблен, но при этом все же стремится нейтрализовать токсин, означает, что он «решает» двухкритериальную задачу минимизации. Сведем ее к однокритериальной путем введения весовых коэффициентов

$$I_2 = \alpha_1 \int\limits_{\Pi} \big(x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)\big)^2\, dt + \alpha_2 \int\limits_{\Pi} \big(x^{(2)}(t)\big)^2\, dt, \quad \alpha_1,\, \alpha_2 > 0.$$

---

[3]Антиферменты являются, как известно, факторами естественной защиты организма. Многие бактерии, в частности, выделяют фермент гиалуронидаза, который разрушает гиалуроновую кислоту – основное вещество, из которого построено межклеточное вещество многих тканей. Гиалуронидаза разрушает гиалуроновую кислоту и этим способствует проникновению инфекции и ядовитых веществ из местного очага поражения в глубинные ткани. Бактериальная гиалуронидаза блокируется антигиалуронидазой, которая вырабатывается организмом для защиты от соответствующих микробов. Важно отметить, что некоторые токсины (в частности, экзотоксины) попадают в кровь лишь после гибели бактерий, то есть бороться приходится не только с бактериями как таковыми, но и с последствиями их разложения, см., например, [1].

И наконец, лечащий врач также должен стремиться решить две задачи – нейтрализовать ту часть токсина, на которую не хватило антифермента, и при этом минимизировать количество лекарства (а тем самым, минимизировать побочное действие этого лекарства). И эти две задачи сведем к одной:

$$I_3 = \beta_1 \int\limits_\Pi \big(x^{(3)}(t) - x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t)\big)^2\, dt + \beta_2 \int\limits_\Pi \big(x^{(3)}(t)\big)^2\, dt, \quad \beta_1,\, \beta_2 > 0.$$

Можно считать, что каждая из концентраций подчиняется управляемому стационарному уравнению диффузии-реакции

$$-\mathrm{div}\,\big(A^{(j)}\nabla x^{(j)}\big) + (a^{(j)}, \nabla x^{(j)}) + b^{(j)}x^{(j)} = f^{(j)}\big(t, x^{(1)}, \ldots, x^{(3)}, u^{(j)}\big), \tag{2.3}$$

где $u^{(j)}(t)$ – управления[4], $j = \overline{1,3}$. Если считать, что стенки сосуда (точнее, геометрическая граница исследуемой области) не содержат интересующих нас веществ, то граничные условия будут нулевыми: $x^{(j)}\Big|_{\partial\Pi} = 0$, $j = \overline{1,3}$. При определенных условиях уравнение (2.3) будет иметь единственное решение $x^{(j)} = x^{(j)}[u^{(j)}]$, $j = \overline{1,3}$. Задачу минимизации функционала $I_j[\vec{u}]$, $\vec{u} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$, можно представить как задачу максимизации функционала $J_j[\vec{u}] = -I_j[\vec{u}]$, $j = \overline{1,3}$.

3. Формулировка основных результатов

Пусть $n \geq 2$ – заданное натуральное число; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – строго липшицева[5] ограниченная область; $s \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^s$ – выпуклая ограниченная область; $\mathcal{D} = \Big\{u \in L^s_\infty(\Pi) : \ u(t) \in \overline{U},\ t \in \Pi\Big\}$ – множество допустимых управлений. Чтобы сформулировать дальнейшие предположения, нам необходимо вспомнить *неравенство Пуанкаре–Фридрихса*: существует константа $C_\Pi = C(\mathrm{mes}\,\Pi)^{1/n}$, где $C > 0$ зависит лишь от n, такая, что для любой функции $x \in H^1_0(\Pi)$ справедлива оценка:

$$\|x\|_{L_2(\Pi)} \leq C_\Pi \|\nabla x\|_{L^n_2(\Pi)}.$$

Пользуясь этим неравенством, нетрудно сконструировать положительную константу κ такую, что

$$\|\nabla x\|_{L^n_2(\Pi)} \geq \sqrt{\kappa}\, \|x\|_{W^1_2(\Pi)}.$$

---

[4]Можно считать их кусочно постоянными или постоянными – результаты статьи легко распространяются и на этот случай.

[5]Для этого достаточно выпуклости, см. [9, с.30-31].

Однако сделать это можно разными способами. Далее для простоты изложения эту константу $\kappa > 0$ будем считать заданной.

Для числа $\gamma > 0$ обозначим $\mathcal{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A = A(.) = \{a_{ij}(.)\}_{i,j=1}^n \in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$, удовлетворяющих условию: $A(t)\xi \cdot \xi \geq \gamma\,|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в. $t \in \Pi$ (здесь «$\cdot$» означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$). Через $L_\infty^+(\Pi)$ будем обозначать класс всех неотрицательных функций из $L_\infty(\Pi)$; $\mathbb{R}_+^n$ – множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Кроме того, для числа $\gamma > 0$ и непрерывной, неубывающей функции $\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ обозначим $\mathbb{F}(\gamma, \mathcal{N})$ класс всех функций $f(t, \xi, \eta, v) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{U} \to \mathbb{R}_+$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $(\xi; \eta; v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \overline{U}$ и удовлетворяющих условиям:

F$_1$) $\big\|f(., x, \nabla x, u)\big\|_{L_2(\Pi)} \leq \mathcal{N}\big(\|x\|_{W_2^1(\Pi)}\big)$ для всех $x \in W_2^1(\Pi)$, $u \in \mathcal{D}$.

F$_2$) (Конечный или бесконечный) предел[6] $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\big[\gamma\kappa\tau - \mathcal{N}(\tau)\big] > 0$.

F$_3$) Имеет место представление $f(t, \xi, \eta, v) = \varphi(t, \xi)\,\psi(t, v) + a(t) \cdot \eta$, где обе функции $\varphi(t, \xi)$, $\psi(t, v)$ измеримы по $t \in \Pi$, и кроме того, при п.в. $t \in \Pi$ функция $\varphi(t, \xi)$ неотрицательна при $\xi \in \mathbb{R}$ и вогнута по $\xi \in \mathbb{R}_+$, а функция $\psi(t, v)$ непрерывна по $v \in \overline{U}$ и достигает минимального значения, равного нулю, на множестве $\overline{U}$; $a(.) \in L_\infty^n(\Pi)$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ – заданное число игроков, каждый из которых действует независимо в своих собственных интересах; $A^{(j)} \in \mathcal{A}(\gamma_j)$, $b^{(j)} \in L_\infty^+(\Pi)$, $f^{(j)} \in \mathbb{F}(\gamma_j, \mathcal{N}_j)$, $j = \overline{1, m}$. Для каждого индекса $j = \overline{1, m}$ будем считать, что j-й игрок путем выбора функции[7] $u^{(j)} \in \mathcal{D}$ управляет однородной задачей Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения в дивергентной форме типа диффузии-реакции:

$$\mathcal{L}^{(j)}[x](t) = f^{(j)}\big(t, x(t), \nabla x(t), u^{(j)}(t)\big),\ t \in \Pi; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}^{(j)}[x] \equiv -\mathrm{div}\left(A^{(j)}\nabla x\right) + b^{(j)}x\,.$$

---

[6]Если $\inf\limits_{\Pi} b \geq \overline{b}$, то здесь и дальше вместо $\gamma\kappa$ можно взять $\min\{\gamma, \overline{b}\}$.

[7]Множество допустимых управлений считаем одним и тем же для каждого из игроков только в целях простоты изложения.

Набор управлений $\{u^{(j)}\}_{j=1}^{m}$ будем обозначать $\vec{u}$. Решение задачи (3.1) будем понимать в *обобщенном смысле* как функцию $x \in H_0^1(\Pi) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $y \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B^{(j)}[x,y] = \mathcal{F}_u^{(j)}[x,y], \tag{3.2}$$

при $u = u^{(j)}$, где приняты обозначения

$$B^{(j)}[x,y] \equiv \int\limits_{\Pi} \left[A^{(j)}\nabla x \cdot \nabla y + b^{(j)}xy\right] dt,$$

$$\mathcal{F}_u^{(j)}[x,y] \equiv \int\limits_{\Pi} f^{(j)}\bigl(t, x(t), \nabla x(t), u(t)\bigr)\, y(t)\, dt.$$

Множество Ξ_j всех функций $x \in H_0^1(\Pi)$, для каждой из которых существует управление $u^{(j)} \in \mathcal{D}$ такое, что уравнение (3.1) имеет решение $x[u^{(j)}] = x$, будем называть *множеством достижимости* данного уравнения. В разделе 5 будет показано, что существует константа $\beta > 0$, при которой уравнение (3.1) для каждого управления $u^{(j)} \in \mathcal{D}$ имеет по крайней мере одно решение, по норме пространства $W_2^1(\Pi)$ не превосходящее β.

Пусть задан набор функций $\Phi_j(t,\vec{\xi}) : \Pi \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условиям:

G$_1$) для всех $\vec{x} \in L_2^m(\Pi)$ имеем $\Phi_j\Bigl(.,\vec{x}(.)\Bigr) \in L_1(\Pi)$, $j = \overline{1,m}$;

G$_2$) для каждого $j = \overline{1,m}$ функция $\Phi_j(t,\xi_1,\dots,\xi_m) : \Pi \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ вогнута по $\xi_j \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что выполняется условие

H) Для всех $u^{(j)} \in \mathcal{D}$, $j = \overline{1,m}$, уравнение (3.1) не может иметь более одного решения.

В таком случае мы можем определить набор функционалов вида

$$J_j[\vec{u}] = \int\limits_{\Pi} \Phi_j\bigl(t, x^{(1)}[u^{(1)}](t), \dots, x^{(m)}[u^{(m)}](t)\bigr)\, dt, \qquad j = \overline{1,m}, \quad \vec{u} \in \mathcal{D}^m, \tag{3.3}$$

$x = x^{(j)}[u^{(j)}] \in H_0^1(\Pi)$ – решение уравнения (3.1).

Целью игры для j-го игрока будем считать максимизацию своего выигрыша, заданного функционалом $J_j[\vec{u}]$, $j = \overline{1,m}$. Допустимыми считаем лишь программные стратегии. В частности, стратегия первого игрока – это просто выбор управления $u^{(1)} \in \mathcal{D}$. Поставленную игру обозначим Г. Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.1. *При сделанных предположениях игра* Г *имеет для любого числа* $\varepsilon > 0$ *ситуацию ε-равновесия по Нэшу (значение игры и программные стратегии).*

Для произвольной функции g будем обозначать $[g]_+ = \max\{g, 0\}$, $[g]_- = \min\{g, 0\}$. Ясно, что $g = [g]_+ + [g]_-$. Следующее утверждение содержит достаточные условия выполнения предположения **H**).

Теорема 3.2. *Пусть для п.в.* $t \in \Pi$ *и для каждого* $\upsilon \in \overline{U}$ *функция* $f^{(j)}(t,\xi,\eta,\upsilon)$ *имеет производную* $f_\zeta^{(j)}(t,\zeta,\upsilon)$ *по* $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, *измеримую по* $t \in \Pi$, *непрерывную по* $(\zeta;\upsilon)$ *и такую, что*

$$\left|\left(\left[f_\xi^{(j)}(t,\zeta,\upsilon)\right]_+; f_\eta^{(j)}(t,\zeta,\upsilon)\right)\right| \le L_j \in (0;\kappa\gamma_j);\ -\left[f_\xi^{(j)}(t,\zeta,\upsilon)\right]_- \le M_j.$$

Тогда задача (3.1) *не может иметь более одного решения.*

Замечание 3.1. В качестве примера функции $f \in \mathbb{F}(\gamma, \mathcal{N})$, удовлетворяющей условиям теоремы 3.2, укажем

$$f(t,\xi,\eta,\upsilon) = \omega(t)\sqrt{1+|\xi|}\,\sin(\upsilon)$$

при условии, что $\omega \in L_\infty^+(\Pi)$, $\|\omega\|_{L_\infty(\Pi)} < 2\kappa\gamma$, $s = 1$, $\overline{U} = [0;\pi]$. Здесь можно взять $\mathcal{N}(\tau) = \|\omega\|_{L_\infty(\Pi)}\sqrt{\sigma(\sigma+\tau)}$, $\sigma = \|1\|_{L_2(\Pi)}$.

Замечание 3.2. На самом деле для того, чтобы обеспечить выполнение условия **H**), достаточно доказать единственность решения уравнения, получаемого из (3.1) линеаризацией по фазовой переменной (см. доказательство теоремы 3.2 в разделе 6). В свою очередь, единственность решения линеаризованного уравнения можно обеспечивать различными способами, например, потребовать малости множества Π по мере, см. [10, глава II, теорема 2.1, с.95].

В случае, когда предположение **H**) не выполнено (либо об этом ничего не известно), для произвольного числа $r > 0$ обозначим Ξ_j^r –

совокупность всех $x \in \Xi_j$, удовлетворяющих условию $\|x\|_{W_2^1(\Pi)} \le r$. Функционалы выигрышей определим как

$$J_j[\vec{x}] = \int\limits_{\Pi} \Phi_j\big(t, x^{(1)}(t), \ldots, x^{(m)}(t)\big)\, dt, \quad \vec{x} = \{x^{(j)}\}_{j=1}^m \in \Xi_1^r \times \ldots \times \Xi_m^r,$$

$j = \overline{1,m}$. Соответствующую модификацию игры Γ обозначим Γ_r.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены все предположения, кроме, может быть, условия* **H**). *Тогда для всех $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ игра Γ_r имеет ситуацию ε-равновесия по Нэшу (значение игры и программные стратегии).*

Теоремы 3.1 – 3.3 доказываются в разделе 6.

4. Выпуклость множества достижимости

В этом и следующем разделе нам будет удобно опускать индекс $j = \overline{1,m}$. Таким образом, для заданных $A \in \mathcal{A}(\gamma)$, $b \in L_\infty^+(\Pi)$, $f \in \mathbb{F}(\gamma, \mathcal{N})$ будем изучать задачу

$$\mathcal{L}[x](t) = f\big(t, x(t), \nabla x(t), u(t)\big),\ t \in \Pi,\ u \in \mathcal{D}; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{L}[x] \equiv -\mathrm{div}\,\big(A\nabla x\big) + bx\,.$$

Решение задачи (4.1) понимаем как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B[x,\omega] = \mathcal{F}_u[x,\omega], \tag{4.2}$$

где приняты обозначения

$$B[x,\omega] \equiv \int\limits_{\Pi} \big[A\nabla x \cdot \nabla\omega + bx\omega\big]\, dt,$$

$$\mathcal{F}_u[x,\omega] \equiv \int\limits_{\Pi} f\big(t, x(t), \nabla x(t), u(t)\big)\, \omega(t)\, dt.$$

В соответствии с условием $\mathbf{F}_3$), имеем представление

$$f\big(t, x(t), \nabla x(t), u(t)\big) = \varphi\big(t, x(t)\big)\, \psi\big(t, u(t)\big) + a(t) \cdot \nabla x(t).$$

Поэтому тождество (4.2) можно переписать в виде

$$B_a[x,\omega] = \mathcal{G}_u[x,\omega], \tag{4.3}$$

где приняты обозначения

$$B_a[x,\omega] \equiv \int\limits_{\Pi} \big[A\nabla x\cdot\nabla\omega - (a\cdot\nabla x)\omega + bx\omega\big]\,dt,$$

$$\mathcal{G}_u[x,\omega] \equiv \int\limits_{\Pi} \varphi\big(t,x(t)\big)\,\psi\big(t,u(t)\big)\,\omega(t)\,dt.$$

Определим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_a[x] \equiv -\mathrm{div}\,\big(A\nabla x\big) - a\cdot\nabla x + bx\,.$$

Далее мы докажем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Множество достижимости Ξ управляемой задачи* (4.1) *выпукло.*

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Следующее утверждение известно как *принцип максимума* для эллиптических уравнений, см., например, [7, глава 2, теорема 4.1], [5, теорема 8.1].

Лемма 4.1. *Для любых $A\in\mathcal{A}(\gamma)$, $a\in L^n_\infty(\Pi)$, $b\in L^+_\infty(\Pi)$, при условии, что $B_a[x,\omega]\ge 0$ $\forall\omega\in\mathbf{C}^1_0(\Pi)$, $\omega\ge 0$, имеем $\inf\limits_{\Pi} x \ge \inf\limits_{\partial\Pi} x^-$, где $x^- = \min\{x,0\}$.*

Лемма 4.2. *Для любых $A\in\mathcal{A}(\gamma)$, $a\in L^n_\infty(\Pi)$, $b\in L^+_\infty(\Pi)$, $z\in L^+_2(\Pi)$ всякое обобщенное решение задачи*

$$\mathcal{L}_a[x](t) = z(t),\ t\in\Pi, \qquad x\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{4.4}$$

неотрицательно: $x\ge 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $x\in H^1_0(\Pi)$ – обобщенное решение задачи (4.4). Это означает, что

$$B_a[x,\omega] = \int\limits_{\Pi} z(t)\omega(t)\,dt$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$. Для любого $\omega \in \mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega \geq 0$, отсюда, в частности, получаем: $B_a[x,\omega] \geq 0$. После этого остается воспользоваться леммой 4.1. $\square$

Лемма 4.3. *Для любого управления $u \in \mathcal{D}$ всякое решение задачи* (4.1) *неотрицательно: $x \geq 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно управление $u \in \mathcal{D}$ и одно из отвечающих ему решений $x \in H_0^1(\Pi)$ задачи (4.1). Обозначим $z = \varphi\big(t, x(t)\big)\,\psi\big(t, u(t)\big)$. Согласно определению класса $\mathbb{F}(\gamma, \mathcal{N})$, и в частности, условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_3$), имеем: $z \in L_2^+(\Pi)$. При этом x является, фактически, решением задачи (4.4). Поэтому остается лишь воспользоваться леммой 4.2. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^s$ – заданная область; функция $g(\xi, \upsilon)$: $\mathbb{R}_+ \times \overline{U} \to \mathbb{R}_+$ допускает представление $g(\xi,\upsilon) = \varphi(\xi)\,\psi(\upsilon)$, где функция $\varphi(\xi)$ неотрицательна и вогнута по $\xi \in \mathbb{R}_+$, а функция $\psi(\upsilon)$ непрерывна и достигает минимального значения, равного нулю, на множестве $\overline{U}$. Тогда для произвольных ξ_0, $\xi_1 \in \mathbb{R}_+$, υ_0, $\upsilon_1 \in \overline{U}$ и числа $\lambda \in [0;1]$ существует по крайней мере одно решение уравнения*

$$\lambda g(\xi_1, \upsilon_1) + (1-\lambda) g(\xi_0, \upsilon_0) = g\big(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_0, \upsilon\big), \quad \upsilon \in \overline{U}. \qquad (4.5)$$

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\psi(\upsilon_1) \leq \psi(\upsilon_0)$. По условиям леммы можем оценить:

$$0 \leq \lambda g(\xi_1, \upsilon_1) + (1-\lambda) g(\xi_0, \upsilon_0) = \lambda\varphi(\xi_1)\psi(\upsilon_1) + (1-\lambda)\varphi(\xi_0)\psi(\upsilon_0) \leq$$

$$\leq \Big[\lambda\varphi(\xi_1) + (1-\lambda)\varphi(\xi_0)\Big]\,\psi(\upsilon_0) \leq \varphi\big[\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_0\big]\,\psi(\upsilon_0).$$

По условию, на множестве $\overline{U}$ существует точка υ_*: $\psi(\upsilon_*) = 0$. Поэтому согласно теореме о промежуточном значении, непрерывная функция $z(\upsilon) = \varphi\big[\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_0\big]\,\psi(\upsilon)$ принимает все промежуточные значения из отрезка $[0; z(\upsilon_0)]$ на множестве $\overline{U}$. В частности, существует точка $\upsilon_\lambda \in \overline{U}$ такая, что

$$z(\upsilon_\lambda) = \lambda g(\xi_1, \upsilon_1) + (1-\lambda) g(\xi_0, \upsilon_0).$$

Это означает, что υ_λ является решением уравнения (4.5). $\square$

Обозначим $\mathbb{S}(\Pi)$ – пространство измеримых п.в. конечных функций на Π. Следующее утверждение является одной из формулировок теоремы измеримого выбора.

Лемма 4.5. *Пусть функция $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^s$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbb{R}^l$, а функция $\varphi(t) : \Pi \to \mathbb{R}^s$ измерима. Пусть, кроме того, многозначное отображение $Q(t) = \mathcal{Q}(t) \subset \mathbb{R}^l$, $t \in \Pi$, измеримо*[8] *или хотя бы слабо измеримо, и для п.в. $t \in \Pi$ нашелся некоторый вектор $y_t \in \mathcal{Q}(t)$ такой, что $\varphi(t) = \Phi(t, y_t)$. Тогда существует функция $\theta \in \mathbb{S}^l(\Pi)$, принимающая значения в множестве $\mathcal{Q}(t)$ и такая, что для п.в. $t \in \Pi$ справедливо равенство: $\Phi\big(t, \theta(t)\big) = \varphi(t)$.*

Доказательство леммы 4.5 следует, например, непосредственно из [13, Дополнение, § Д1, следствие Д1.3.1, с.327].

Доказательство теоремы 4.1. Зафиксируем любые $z, y \in \Xi$ и соответствующие управления обозначим как v, w. Выберем любое число $\lambda \in (0;1)$ и покажем, что $x_\lambda = \lambda\, y + (1-\lambda)\, z \in \Xi$. Обозначим $g(.,\xi,v) = \varphi(.,\xi)\psi(.,v)$. По условиям $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_3$),

$$r_\lambda \equiv \lambda\, g(.,y,w) + (1-\lambda)\, g(.,z,v) \in L_2(\Pi).$$

Согласно леммам 4.3, 4.4 и условию $\mathbf{F}_3$), для п.в. $t \in \Pi$ существует вектор $\omega_{\lambda,t} \in \overline{U}$ такой, что $r_\lambda(t) = g\big(t, x_\lambda(t), \omega_{\lambda,t}\big)$. Тогда по лемме 4.5 найдется управление $u_\lambda(.) \in \mathcal{D}$ такое, что $r_\lambda(.) = g\big(., x_\lambda(.), u_\lambda(.)\big)$. При этом для любого $\omega \in H_0^1(\Pi)$ выполняются равенства:

$$B_a[y,\omega] = \int\limits_\Pi g(t,y,w)\omega(t)\,dt, \quad B_a[z,\omega] = \int\limits_\Pi g(t,z,v)\omega(t)\,dt,$$

следовательно,

$$B_a[x_\lambda,\omega] = \lambda B_a[y,\omega] + (1-\lambda) B_a[z,\omega] = \int\limits_\Pi r_\lambda(t)\omega(t)\,dt,$$

---

[8] Напомним, что для метрического пространства X многозначное отображение $Q : \Pi \to 2^X$ называется *измеримым*, если для любого замкнутого множества $S \subset X$ множество $Q^{-1}(S) = \big\{t \in \Pi : Q(t) \cap S \neq \emptyset\big\}$ измеримо. Если то же самое выполняется для любого открытого множества S, то отображение Q называется *слабо измеримым*. Вообще, для простоты можно считать, что $\mathcal{Q}(t) \equiv \overline{\Omega}$, где Ω – ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^l$, либо $\mathcal{Q}(t) \equiv \Big\{v \in \mathbb{R}^l : \widetilde{u}(t) \leq v \leq \widehat{u}(t)\Big\}$, где функции $\widetilde{u}(t)$, $\widehat{u}(t)$ п.в. конечны и измеримы и т.п.

то есть

$$B_a[x_\lambda,\omega]=\int\limits_\Pi g\big(t,x_\lambda,u_\lambda)\omega(t)\,dt.$$

Иначе говоря,

$$B[x_\lambda,\omega]=\int\limits_\Pi f\big(t,x_\lambda,\nabla x_\lambda,u_\lambda)\omega(t)\,dt.$$

Последнее означает, что x_λ является решением уравнения (4.1), отвечающим управлению $u_\lambda\in\mathcal{D}$. Следовательно, $x_\lambda\in\Xi$. Теорема 4.1 доказана.

5. Предкомпактность множества достижимости

Далее мы докажем, что справедливо следующее утверждение о тотальном (по всему множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости[9] задачи (4.1).

Теорема 5.1. *Задача* (4.1) *разрешима для всех $u\in\mathcal{D}$. Более того, если известно, что решение задачи* (4.1) *единственно для каждого управления $u\in\mathcal{D}$, то множество Ξ ограничено в пространстве $W_2^1(\Pi)$ и предкомпактно (то есть относительно компактно) в пространстве $L_2(\Pi)$.*

При доказательстве теоремы 5.1 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Для удобства читателя напомним некоторые определения из теории монотонных операторов. Далее для банахова пространства E и всех $x\in E$, $y\in E^*$ запись (x,y) означает значение функционала $y[x]$.

Определение 5.1. *Пусть $\Omega\subset E$ – заданное множество. Оператор $G:\Omega\to E^*$ называется монотонным на множестве Ω, если для всех $x,y\in\Omega$ имеет место неравенство: $\Big(x-y,G[x]-G[y]\Big)\geq 0$.*

Замечание 5.1. Для линейного оператора $G:E\to E^*$ монотонность означает его положительность (иначе говоря, положительную определенность): $\Big(h,G[h]\Big)\geq 0$ для всех $h\in E$.

---

[9]Существуют и другие теоремы о тотальном сохранении разрешимости краевых задач для управляемых эллиптических уравнений, см., например, [14,15].

Определение 5.2. *Пусть $\Omega \subset E$ – заданное множество. Оператор $G : \Omega \to E^*$ называется хеминепрерывным на этом множестве, если для всех $v, x \in E$, $u \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}$ таких, что $u + t\,v \in \Omega$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to 0}\Big(x, G\big[u + t\,v\big] - G[u]\Big) = 0$.*

Лемма 5.1. *Пусть E – рефлексивное банахово пространство; $G : E \to E^*$ – монотонный, хеминепрерывный оператор, удовлетворяющий условию коэрцитивности:*

$$\Big(x, G[x]\Big) \geq \sigma\big(\|x\|\big)\,\|x\| \quad \forall x \in E,$$

где $\sigma(r)$ – вещественная функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что

$$\lim_{r\to+\infty} \sigma(r) = +\infty;$$

$\mathcal{N} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная, неубывающая функция такая, что существует конечный или бесконечный

$$\lim_{r\to+\infty}\Big(\sigma(r) - \mathcal{N}(r)\Big) > 0.$$

Тогда найдется число $\beta > 0$, зависящее лишь от функций $\sigma(.)$ и $\mathcal{N}(.)$, для которого справедливо следующее. Для любого хеминепрерывного оператора $F : E \to E^*$, удовлетворяющего оценке

$$\Big\|F[x] - G[x]\Big\| \leq \mathcal{N}\big(\|x\|\big) \quad \forall x \in E,$$

уравнение $F[x] = 0$ имеет по крайней мере одно решение $x = x_F \in E$ такое, что $\|x_F\| \leq \beta$.

Лемма 5.1 доказана в [20, теорема 1.1]. Обратимся к уравнению (4.1). Согласно определению класса $\mathcal{A}(\gamma)$, матрица $A \in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$. Поэтому существует константа $\alpha > 0$ такая, что

$$A(t)\xi\cdot\eta \leq \alpha\,|\xi\cdot\eta| \quad \text{для п.в. } t \in \Pi,\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, а также неравенство Гельдера, для всех x, $\omega \in H_0^1(\Pi)$ получаем

$$\big|B[x,\omega]\big| \leq \int\limits_\Pi \big|A\nabla x\cdot\nabla\omega + bx\omega\big|\,dt \leq \alpha\int\limits_\Pi |\nabla x\cdot\nabla\omega|\,dt + \int\limits_\Pi |bx\omega|\,dt \leq$$

$$\leq \alpha\|\nabla x\|_{L_2^n}\,\|\nabla\omega\|_{L_2^n}+\|b\|_{L_\infty}\|x\|_{L_2}\,\|\omega\|_{L_2}\leq\big(\alpha+\|b\|_{L_\infty}\big)\,\|x\|_{W_2^1}\,\|\omega\|_{W_2^1}.$$

Это означает, что для любого фиксированного $x\in H_0^1(\Pi)$ форма $B[x,.]$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $E=H_0^1(\Pi)$. Таким образом, определен оператор $G:E\to E^*$, который каждому $x\in E$ ставит в соответствие линейный непрерывный функционал $B[x,.]\in E^*$, то есть $G[x]=B[x,.]$. Аналогичным образом, используя неравенство Гельдера и условие $\mathbf{F}_1$), получаем, что формула $K_u[x]=\mathcal{F}_u[x,.]$ для каждого $u\in\mathcal{D}$ определяет оператор $K_u:E\to E^*$. В результате интегральное тождество (4.2) (иными словами, задача (4.1)) равносильна операторному уравнению

$$F_u[x]=0,\quad x\in E,$$

где принято обозначение $F_u=G-K_u$. Ясно, что оператор G линейный. Кроме того, из оценки, полученной выше для $|B[x,\omega]|$, очевидно, что оператор G ограничен, а следовательно, непрерывен (и тем более, хеминепрерывен). Пользуясь определением класса $\mathcal{A}(\gamma)$ и неотрицательностью функции $b\in L_\infty^+(\Pi)$, для произвольного $x\in E$ оценим

$$(x,G[x])=B[x,x]=\int\limits_\Pi\big[A\nabla x\cdot\nabla x+bx^2\big]\,dt\geq\gamma\|\nabla x\|^2_{L_2^n}\geq\gamma\kappa\|x\|^2_{W_2^1}.$$

Это означает, что линейный ограниченный оператор G является коэрцитивным с функцией $\sigma(r)=\gamma\kappa r$. С учетом линейности, отсюда также следует монотонность оператора G. Установленные факты суммируем в следующем утверждении.

Лемма 5.2. *Оператор G является линейным, непрерывным (а тем самым, хеминепрерывным), монотонным и коэрцитивным с функцией $\sigma(r)=\gamma\kappa r$.*

Лемма 5.3. *Для каждого $u\in\mathcal{D}$ оператор F_u является деминепрерывным (а следовательно, хеминепрерывным) и удовлетворяет оценке*

$$\|F_u[x]-G[x]\|_{E^*}\leq\mathcal{N}(\|x\|_E)\quad\forall x\in E.$$

Доказательство. Прежде всего, пользуясь условием $\mathbf{F}_1$), а также неравенством Гельдера, для любых $u\in\mathcal{D}$, $x\in E$, $\omega\in E$, $\|\omega\|_E\leq 1$, можем оценить

$$\big|\mathcal{F}_u[x,\omega]\big| \le \big\|f(.,x,\nabla x,u)\big\|_{L_2}\|\omega\|_{L_2} \le \mathcal{N}(\|x\|_{W_2^1})\|\omega\|_{W_2^1}.$$

Учитывая, что $\|.\|_E = \|.\|_{W_2^1}$, получаем

$$\|F_u[x]-G[x]\|_{E^*} = \|K_u[x]\|_{E^*} = \sup_{\omega\in E,\,\|\omega\|_E\le 1}\big|\mathcal{F}_u[x,\omega]\big| \le \mathcal{N}(\|x\|_E).$$

Деминепрерывность оператора K_u, а тем самым, и оператора F_u, устанавливается точно так же, как в [20, лемма 3.3]. $\square$

Следующее утверждение известно как теорема вложения Соболева–Кондрашова, см., например, [9, глава II, теорема 2.2].

Лемма 5.4. *Для всех ограниченных строго липшицевых областей $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ (а также конечных сумм таких областей) ограниченные множества функций $x\in W_p^1(\Pi)$ относительно компактны*[10] *в пространстве $L_q(\Pi)$ для всех $q<\dfrac{pn}{n-p}$ при $p\le n$ и относительно компактны в пространстве $\mathbf{C}^\alpha(\overline{\Pi})$ для всех $\alpha<1-\dfrac{n}{p}$ при $p>n$.*

Доказательство теоремы 5.1 следует непосредственно из лемм 5.1 – 5.4 и условия $\mathbf{F}_2$).

6. Доказательство основных результатов

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 6.1. *Пусть функция $g(t,x):\Pi\times\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ такова, что $g\big(.,x_1(.),\ldots,x_\nu(.)\big)\in Z$ для всех $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, где $X_j=X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$, $Z=Z(\Pi)$ – лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1;+\infty)$; $X=X_1\times\ldots\times X_\nu$. Тогда оператор $G:X\to Z$, определяемый формулой $G[x]=g\big(.,x(.)\big)$, является непрерывным и ограниченным.*

---

[10] В [9, глава II, теореме 2.2] речь идет о компактности. Однако там используется устаревшая терминология: на самом деле имеется в виду относительная секвенциальная компактность, а она в случае метрического пространства равносильна относительной компактности, см. [6, § I.5, следствие 2 теоремы 2, с.45].

Для $\nu = 1$ лемма 6.1 доказана в [8, § I.2, теорема 2.1, с.31; теорема 2.2, с.35]. Ее справедливость для $\nu > 1$ следует из анализа доказательств [8, § I.2, теорема 2.1, с.31; теорема 2.2, с.35].

Доказательство теоремы 3.1. В силу предположения $\mathbf{H}$) и теорем 4.1 и 5.1, все множества Ξ_j, $j = \overline{1,m}$, выпуклы и предкомпактны в пространстве $L_2(\Pi)$. Непосредственно из леммы 6.1 и условия $\mathbf{G}_1$) получаем, что функционалы $I_j[\vec{x}] = \displaystyle\int_\Pi \Phi_j\big(t, x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)\, dt$, $j = \overline{1,m}$, $x_j \in \Xi_j$, $j = \overline{1,m}$, ограничены и непрерывны на выпуклом компакте $\Upsilon = \overline{\Xi}_1 \times \ldots \times \overline{\Xi}_m$. Кроме того, по условию $\mathbf{G}_2$) функционал $I_j[\vec{x}]$ является вогнутым по $x_j \in \overline{\Xi}_j$, $j = \overline{1,m}$. Используя эту вогнутость, а также компактность множества $\overline{\Xi}_j$, и опираясь стандартным образом (см., например, [4, приложение 2]) на теорему Какутани [6, теорема XVI.5.1, с.638], нетрудно доказать существование элемента $\vec{z} \in \Upsilon$ такого, что

$$I_j(\vec{x} = \vec{z}) \geq I_j(x_i = \overline{x}_i,\, i \neq j; x_j = y_j), \quad j = \overline{1,m}, \quad \forall \vec{y} \in \Upsilon.$$

Поскольку $\vec{z} \in \overline{\Xi}_1 \times \ldots \times \overline{\Xi}_m$, найдется последовательность

$$\vec{x}[k] \subset \Xi_1 \times \ldots \times \Xi_m, \quad \vec{x}[k] \to \vec{z} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В силу непрерывности функционалов I_j, $j = \overline{1,m}$, это равносильно тому, что игра Γ имеет для любого $\varepsilon > 0$ ситуацию ε-равновесия по Нэшу. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 6.1. Пусть E – банахово пространство; $G : E \to E^*$ – оператор, удовлетворяющий условию строгой монотонности:

$$(x - y, G[x] - G[y]) > 0 \quad \forall x, y \in E,\ x \neq y.$$

Хорошо известно, что в этом случае уравнение $G[x] = 0$ не может иметь более одного решения. Действительно, если $G[x] = G[y] = 0$, $x \neq y$, то

$$0 = (x - y, G[x] - G[y]) > 0.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Непосредственно из [17, лемма 3.1] (это одно из следствий теоремы измеримого выбора) получаем следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Пусть функция* $\Phi(t,\xi) : \Pi\times[0;1] \to \mathbb{R}_+$ *измерима по* t *и непрерывна по* ξ*. Тогда найдется измеримая функция* $\theta : \Pi \to [0,1]$*, такая, что* $\int\limits_0^1 \Phi(t,\xi)\,d\xi \le \Phi\big(t,\theta(t)\big)$.

Лемма 6.3. *Пусть* E *– некоторое банахово идеальное пространство измеримых на* Π *функций;* $\Phi(t,\xi) : \Pi\times[0,1] \to \mathbb{R}$ *– функция, измеримая по* $t\in\Pi$*, непрерывная по* $\xi\in[0,1]$*, и такая, что* $\Phi(.,\theta(.)) \in E$*, для всех измеримых* $\theta(.) : \Pi \to [0,1]$ *и справедлива оценка* $\|\Phi(.,\theta(.))\|_E \le K$*. Тогда* $\int\limits_0^1 \Phi(.,\xi)\,d\xi \in E$*, причем*

$$\left\| \int\limits_0^1 \Phi(.,\xi)\,d\xi \right\|_E \le K.$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что функция $\int\limits_0^1 \Phi(.,\xi)\,d\xi$ измерима, поскольку является пределом в смысле п.в. некоторой последовательности интегральных сумм Дарбу, каждая из которых есть измеримая функция как конечная сумма измеримых функций. Для произвольного $t\in\Pi$, пользуясь леммой 6.2, оценим модуль

$$\left| \int\limits_0^1 \Phi(t,\xi)\,d\xi \right| \le \int\limits_0^1 \big|\Phi(t,\xi)\big|\,d\xi \le \Big|\Phi\big(t,\theta(t)\big)\Big|,$$

где $\theta : \Pi \to [0,1]$ – функция из леммы 6.2. Отсюда в силу идеальности пространства E:

$$\int\limits_0^1 \Phi(t,\xi)\,d\xi \in E, \quad \left\| \int\limits_0^1 \Phi(.,\xi)\,d\xi \right\|_E \le \Big\|\Phi\big(t,\theta(t)\big)\Big\|_E \le K.$$

□

Доказательство теоремы 3.2. Для упрощения выкладок индекс $j=\overline{1,m}$ будем опускать. Иначе говоря, вместо задачи (3.1) будем рассматривать задачу (4.1). Предположим, от противного, что для управления $u\in\mathcal{D}$ задача (4.1) имеет два решения $x=x_1$ и

$x = x_2$, то есть для любых $\omega \in H_0^1(\Pi)$ справедливы равенства

$$B[x_1,\omega] = \int\limits_\Pi f(t,x_1,\nabla x_1,u)\omega\,dt, \quad B[x_2,\omega] = \int\limits_\Pi f(t,x_2,\nabla x_2,u)\omega\,dt.$$

Тогда, вычитая из второго равенства первое и пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, получаем

$$B[y,\omega] = \int\limits_\Pi \big[\varphi(t)y(t) + \psi(t)\cdot\nabla y(t)\big]\omega\,dt \quad \forall\omega \in H_0^1(\Pi),$$

где приняты обозначения $y = x_2 - x_1$,

$$\varphi = \int\limits_0^1 f'_\xi(.,x_1+\theta y,\nabla x_1+\theta\nabla y,u)\,d\theta,$$

$$\psi = \int\limits_0^1 f'_\eta(.,x_1+\theta y,\nabla x_1+\theta\nabla y,u)\,d\theta.$$

Кроме того, положим

$$\varphi_+ = \int\limits_0^1 [f'_\xi]_+(.,x_1+\theta y,\nabla x_1+\theta\nabla y,u)\,d\theta.$$

По условиям теоремы, а также по лемме 6.3, $\varphi \in L_\infty(\Pi)$, $\psi \in L_\infty^n(\Pi)$, причем $|(\varphi_+;\psi)| \le L$. Таким образом, $z = y \in E = H_0^1(\Pi)$ является решением уравнения

$$G[z] = 0, \quad z \in E, \tag{6.1}$$

где G – это оператор $E \to E^*$, который функции $z \in E$ ставит в соответствие функционал $g[z] \in E^*$, определяемый формулой

$$g[z](\omega) = B[z,\omega] - \int\limits_\Pi \big[\varphi(t)z(t) + \psi(t)\cdot\nabla z(t)\big]\omega\,dt, \quad \omega \in H_0^1(\Pi).$$

Уравнение (6.1) имеет решение $z = 0$. Покажем, что других решений нет. В соответствии с замечанием 6.1, достаточно убедиться лишь в строгой монотонности оператора G. Учитывая линейность оператора G, для произвольного $z \in E$ оценим

$$(z, G[z]) = g[z](z) = B[z,z] - \int\limits_{\Pi} \big[\varphi(t)z(t) + \psi(t) \cdot \nabla z(t)\big] z(t)\,dt \geq$$

$$\geq B[z,z] - \int\limits_{\Pi} \varphi_+(t) z^2(t)\,dt - \int\limits_{\Pi} \psi(t) \cdot \nabla z(t)\, z(t)\,dt \geq$$

$$\geq B[z,z] - L\,\|z\|_{L_2} \big\{ \|z\|_{L_2} + \|\nabla z\|_{L_2^n} \big\} \geq B[z,z] - L\,\|z\|_E^2.$$

При доказательстве леммы 5.2 уже было установлено, что

$$B[z,z] \geq \gamma\kappa \|z\|_E^2.$$

Таким образом,

$$(z, G[z]) \geq (\gamma\kappa - L)\,\|z\|_E^2.$$

По условию, $\gamma\kappa - L > 0$. Это означает, что оператор G строго монотонный, следовательно, уравнение (6.1) имеет лишь одно решение $z = 0$. Поэтому $y = 0$, то есть $x_2 = x_1$. Теорема 3.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству теоремы 3.1.

7. Пример игровой задачи, удовлетворяющей всем предположениям

Рассмотрим следующий конкретный пример игровой задачи. А именно, будем считать, что имеется три игрока ($m = 3$); j-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш, заданный функционалом (3.3), где подынтегральные функции определены следующим образом (согласующимся с задачей из раздела 2):

$$\Phi_1(t, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) = -\Big(\xi^{(1)} - \Psi\big[\xi^{(2)}, \xi^{(3)}\big]\Big)^2,$$

где $\Psi\big[\xi^{(2)}, \xi^{(3)}\big]$ – произвольная функция (например, линейная), обеспечивающая выполнение условий $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$);

$$\Phi_2(t, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}) = -\alpha_1\big(\xi^{(2)} - \xi^{(1)}\big)^2 - \alpha_2\big(\xi^{(2)}\big)^2, \quad \alpha_1,\, \alpha_2 > 0;$$

$$\Phi_3(t,\xi^{(1)},\xi^{(2)},\xi^{(3)}) = -\beta_1\big(\xi^{(3)}-\xi^{(1)}+\xi^{(2)}\big)^2-\beta_2\big(\xi^{(3)}\big)^2, \quad \beta_1,\,\beta_2>0.$$

Ясно, что предположения $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$) выполняются очевидным образом. Относительно управляемых игроками краевых задач (3.1) будем предполагать, что $A^{(j)}\in\mathcal{A}(\gamma_j)$, $b^{(j)}\in L^+_\infty(\Pi)$, $j=\overline{1,3}$, и при $s=1$, $\overline{U}=[0;1]$ и некоторых $\omega^{(j)}\in L^3_\infty(\Pi)$, $\omega^{(j)}_1\geq 0$, $\|\omega^{(j)}\|_{L^3_\infty(\Pi)}<\kappa\gamma_j$, $j=\overline{1,3}$, функции правых частей имеют следующий вид:

$$f^{(1)}(t,\xi,\eta,\upsilon)=\omega^{(1)}_1(t)\,\sqrt{1+|\xi|}\,2\sin(\pi\upsilon)+\omega^{(1)}_2(t)\,\eta_1+\omega^{(1)}_3(t)\,\eta_2;$$

$$f^{(2)}(t,\xi,\eta,\upsilon)=\omega^{(2)}_1(t)\,\frac{|\xi|}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\big(\upsilon\,|t|\big)+\omega^{(2)}_2(t)\,\eta_1+\omega^{(2)}_3(t)\,\eta_2;$$

$$f^{(3)}(t,\xi,\eta,\upsilon)=\omega^{(3)}_1(t)\ \mathrm{arctg}\,|\xi|\,\upsilon\exp\big(-\upsilon\,|t|\big)+\omega^{(3)}_2(t)\,\eta_1+\omega^{(3)}_3(t)\,\eta_2.$$

Ясно, что $f^{(j)}\in\mathbb{F}(\gamma_j,\mathcal{N}_j)$, где (при $\sigma=\|1\|_{L_2(\Pi)}$, $W_j=\|\omega^{(j)}\|_{L^3_\infty(\Pi)}$)

$$\mathcal{N}_1(\tau)=2W_1\,\sqrt{\sigma(\sigma+\tau)},\quad \mathcal{N}_2(\tau)=W_2\,\left(\frac{\pi}{2}\sigma+\tau\right),\quad \mathcal{N}_3(\tau)=W_3\,\tau.$$

Иначе говоря, функции $f^{(j)}$ удовлетворяют условиям $\mathbf{F}_1$) – $\mathbf{F}_3$). Кроме того, непосредственно проверяется, что эти же функции удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тем самым, выполняется предположение $\mathbf{H}$).

Таким образом, для данной игровой задачи все сделанные нами предположения выполняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулов И.А., Смирнов А.М., Васильев Д.А. *Токсикоинфекции и токсикозы.* Ульяновск: УГСХА, 2002.

2. Вахитов И.С. *Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции* // Дальневосточный матем. журн. 2010. Т. 10. № 2. С. 93–105.

3. Воробьев А.Х. *Диффузионные задачи в химической кинетике.* М.: МГУ, 2003.

4. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985.

5. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.

7. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. *Уравнения математической физики. Дополнительные главы.* Казань: КГУ, 2012.

8. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: ГИТТЛ, 1956.

9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.

10. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973.

11. Лобанов А.И. *Математические модели биологических систем, описываемые уравнениями «реакция-диффузия» и «реакция-диффузия-конвекция». Дис. ... докт. ф.-м. н..* М.: МФТИ, 2001.

12. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. *Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 1. С. 20–46.

13. Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988.

14. Потапов Д.К. *Задачи управления для уравнений со спектральным параметром и разрывным оператором при наличии возмущений* // Журн. Сибирского федерального ун-та. Сер. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 2. С. 239–245.

15. Потапов Д.К. *Оптимальное управление распределенными системами эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью* // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 19–24.

16. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.

17. Чернов А.В. *Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения* // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.

18. Чернов А.В. *Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками* // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 316–328.

19. Чернов А.В. *Об одном подходе к построению ε-равновесия в бескоалиционных играх, связанных с уравнениями математической физики, управляемых многими игроками* // Матем. теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 104–123.

20. Чернов А.В. *Об одном обобщении метода монотонных операторов* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 535–544.

21. Чуличков А.Л., Николаев А.В., Лобанов А.И., Гурия Г.Т. *Пороговая активация свертывания крови и рост тромба в условиях кровотока. Теоретический анализ* // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 3. С. 75–96.

22. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications.* Providence, R.I.: American mathematical society, 2010.

ON EXISTENCE OF ε-EQUILIBRIUM IN NONCOOPERATIVE N-PERSON GAMES ASSOCIATED WITH ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University, Cand. Sc., assoc.prof. (chavnn@mail.ru).

Abstract: The paper is devoted to obtaining the sufficient conditions for existence of the Nash ε-equilibrium in noncooperative n-person games associated with semilinear elliptic partial differential equations of the second order. Here, for all players, we consider only program strategies. The basis of the theory constructed consists in some assertion concerning the total preservation of solvability and the uniform solution boundedness of an operator equation of the first kind having been proved by the author formerly by means of a generalization of the method of monotone maps. As an auxiliary result of a specific interest we prove a theorem on convexity of the reachable set of a controlled semilinear elliptic equation.

Keywords: noncooperative n-person game, semilinear elliptic PDE of the second order, convexity of the reachable set, program strategies, ε-equilibrium.