Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.1, с. 19–40

УДК 518.9
ББК 22.18

О СВОЙСТВАХ РАВНОВЕСИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ ИГРАХ N ЛИЦ

Денис В. Кузютин
Мария В. Никитина
Ярославна Б. Панкратова
Санкт-Петербургский Государственный Университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
Международный банковский институт
1911011, Санкт-Петербург, Невский пр., 60
e-mail: d.kuzyutin@yandex.ru, maryaniki@gmail.com,
yasyap@gmail.com

В статье изучаются свойства равновесий в многокритериальных позиционных играх n лиц с полной и неполной информацией. Доказано, что множество всех ситуаций равновесия удовлетворяет свойству динамической устойчивости (состоятельности во времени), однако не удовлетворяет свойству динамической совместимости. Проведена аксиоматическая характеризация абсолютного равновесия на классе многокритериальных позиционных игр с полной информацией.

Ключевые слова: многокритериальные игры, позиционные игры, абсолютное равновесие, динамическая устойчивость, редуцированная игра.

1. Введение

Целью каждого игрока в многокритериальной игре (игре с векторными выигрышами) является максимизация нескольких критериев (компонент своей векторной функции выигрыша). Понятие равновесия в многокритериальной игре n лиц было введено Л. Шепли в [17]. Здесь же было показано соответствие между множеством всех равновесий в многокритериальной игре и множеством равновесий по Нэшу в семействе вспомогательных игр со скалярной функцией выигрыша каждого игрока (trade-off games).

В работе Г. Куна [6] были заложены основы теории игр в развернутой форме (позиционных игр) с неполной информацией, в частности, введено разложение позиционной игры в промежуточных позициях (на подыгру и фактор-игру) и соответствующее разложение чистых и смешанных стратегий игроков.

Важным свойством решений динамической (с том числе позиционной) игры является свойство динамической устойчивости (состоятельности во времени), введенное Л.А. Петросяном в [3]. Основные результаты, связанные с исследованием свойств состоятельности во времени и динамической совместимости [1, 7] различных решений позиционных игр, представлены в [2].

Свойства равновесий в различных классах многокритериальных игр исследовались, в частности, в работах [14, 15, 17, 18, 19, 4, 8].

Основной задачей настоящей работы является исследование свойств множества абсолютных равновесий в многокритериальных позиционных играх с полной и неполной информацией (в частности, свойства динамической устойчивости), а также аксиоматическая характеризация этого принципа оптимальности.

В разделе 2 приведены основные понятия и обозначения, используемые для анализа многокритериальных позиционных игр. В разделе 3 установлено существование абсолютного равновесия (в чистых стратегиях) в многокритериальной игре n лиц в развернутой форме с полной информацией, а также предложен способ построения абсолютных равновесий.

В разделе 4 доказана динамическая устойчивость (состоятельность во времени) множества ситуаций равновесия в многокритериальных позиционных играх с полной и неполной информацией. В заключительном разделе 5 предложена одна аксиоматическая характеризация абсолютного равновесия на классе конечных позиционных игр с полной информацией (с использованием понятия редуцированной игры и свойств состоятельности CONS и обратной состоятельности COCONS решений).

2. Многокритериальные игры в развернутой форме с полной информацией

Будем использовать далее следующие обозначения:

- $\Gamma = \{N, K, P, A, h\}$ – конечная многокритериальная игра n лиц (или игра с векторными выигрышами) в развернутой форме с полной информацией;
- $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков в игре Γ;
- K – древовидный ориентированный граф (дерево) игры Γ с корнем x_0, состоящий из множества Z окончательных позиций и множества $X = K \setminus Z$ промежуточных позиций;
- $x < y$ означает, что (единственный) путь от x_0 до y проходит через x, причем $x \neq y$;
- $S(x)$ – множество всех «потомков» x или «альтернатив» позиции x, т. е. множество позиций, следующих непосредственно за x; $S(x) = \varnothing \quad \forall\, x \in Z$. Все альтернативы $y \in S(x)$ позиции x перенумерованы по определенному правилу с помощью чисел $\{1, 2, \dots, |S(x)|\}$;
- $S^{-1}(x)$ – непосредственный «предшественник» позиции x, т. е. $x \in S\left(S^{-1}(x)\right)$, $S^{-1}(x_0) = \emptyset$;
- $Z(x)$ – множество $\{y \in Z \mid x < y\}$, т. е. множество окончательных позиций, достижимых из позиции x;
- $\omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_l\}$ – партия длины l, где

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_l, \quad x_l \in Z,$$

$$x_{j-1} = S^{-1}(x_j), \quad j = 1, \dots, l.$$

- P – разбиение множества промежуточных позиций на множества очередности $P_1, P_2, \ldots, P_n$, где $P_i, i \in N$ – множество личных позиций игрока i;

- A – альтернативное разбиение множества промежуточных позиций на множества

$$A_j = \{x \in K \setminus Z \mid |S(x)| = j\};$$

- $h = (h_1, \ldots, h_n)$ – функция, заданная на множестве окончательных позиций Z, и ставящая в соответствие каждой окончательной позиции $z \in Z$ набор векторов выигрышей игроков:

$$h_i(z) \in R^{r(i)}, i \in N. \tag{2.1}$$

Чистая стратегия игрока $i \in N$ есть функция, заданная на P_i и ставящая в соответствие каждой позиции $x \in P_i$ некоторую альтернативу данной позиции. Множество всех чистых стратегий игрока i в игре Γ обозначим через $\Phi_i, i \in N$.

Набор чистых стратегий игроков (или ситуация) $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ однозначно определяет единственную партию $\omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$ в игре Γ, где $\varphi_i(x_k) = x_{k+1}$, если $x_k \in P_i, x_l \in Z$ и, следовательно, набор $\{h_i(x_l)\}_{i \in N}$ векторных выигрышей всех игроков.

С учетом взаимно-однозначного соответствия между множеством партий ω в игре Γ и множеством окончательных позиций Z, далее будем использовать следующее обозначение:

$$h_i(\omega) = h_i(x_l), \text{где } \omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_l\}, x_l \in Z.$$

Векторную функцию, ставящую в соответствие каждой ситуации φ в чистых стратегиях соответствующий вектор выигрышей игрока $i \in N$ обозначим H_i.

$$H_i : \prod_{j=1}^{n} \Phi_j \longrightarrow R^{r(i)}\,. \tag{2.2}$$

Отметим, что целью игрока i в многокритериальной игре Γ является максимизация $r(i)$ критериев (компонент своей векторной функции выигрыша $H_i(\varphi) = (H_{i|1}(\varphi), \ldots, H_{i|r(i)}(\varphi))$).

Обозначим класс конечных игр n лиц в развернутой форме с полной информацией с векторными выигрышами (2.2) через

$$MG^P(n, K, r(1), \dots, r(n)).$$

В игре с полной информацией каждой промежуточной позиции $x \in K \backslash Z$ отвечает подыгра $\Gamma_x = \{N^x, K^x, P^x, A^x, h^x\}$, все элементы которой определяются обычным образом [6, 2] как ограничения соответствующих элементов исходной игры Γ на множество позиций K^x (дерево подыгры с начальной позицией x).

В частности,

$$h_i^x(y) = h_i(y) \quad \forall y \in Z(x) \quad \forall i \in N\,.$$

Обозначим через Φ_i^x множество всех чистых стратегий игрока $i \in N$ в подыгре. Любая ситуация $\varphi^x \in \prod_{j=1}^{n} \Phi_i^x$ однозначно определяет единственную партию $\omega^x = \{x, \dots, x_m\}$ в подыгре Γ_x, и, следовательно, набор векторов выигрыша игроков:

$$H_i^x : \prod_{j=1}^{n} \Phi_j^x \longrightarrow R^{r(i)}, i \in N\,.$$

Пусть $x \in K \backslash Z, x \neq x_0$. Фактор-игра $\Gamma_D = \Gamma_D(\varphi^x)$ для каждой ситуации φ^x подыгры Γ_x определяется обычным образом как игра на дереве $K^D = \{x\} \cup K \backslash K^x$.

При этом $\{x\} \cup Z \backslash Z(x)$ – множество окончательных позиций фактор-игры, и

$$h_i^D(x) = H_i^x(\varphi^x), i \in N.$$

Множество всех чистых стратегий игрока $i \in N$ в фактор-игре Γ_D обозначим через Φ_i^D. Любая ситуация $\varphi^D \in \prod_{j=1}^{n} \Phi_i^D$ определяет единственную партию $\omega^D = \{x_0, \dots, x_k\}$ в фактор-игре Γ_D и, следовательно, набор векторов выигрыша игроков:

$$H_i^D : \prod_{j=1}^{n} \Phi_j^D \longrightarrow R^{r(i)}, i \in N$$

Разложению игры Γ в позиции x на подыгру Γ_x и фактор-игру Γ_D отвечает естественное разложение стратегий. В частности, будем говорить, что чистая стратегия $\varphi_i \in \Phi_i$ разложена в позиции x на чистые стратегии $\varphi_i^x \in \Phi_i^x$ и $\varphi_i^D \in \Phi_i^D$ игрока i в Γ_x и Γ_D соответственно, если:

- φ_i^x есть ограничение φ_i на множество P_i^x;
- φ_i^D есть ограничение φ_i на множество P_i^D личных позиций игрока i в фактор-игре Γ_D.

Заметим, что из чистых стратегий $\varphi_i^x \in \Phi_i^x$ и $\varphi_i^D \in \Phi_i^D$ игрока $i \in N$ в подыгре и в фактор-игре Γ всегда можно составить чистую стратегию этого игрока $\varphi_i = (\varphi_i^D, \varphi_i^x) \in \Phi_i$ в основной игре Γ_D, поскольку P_i есть объединение непересекающихся множеств P_i^x и P_i^D.

3. Абсолютное равновесие в многокритериальных играх

Пусть x и y – два вектора из R^t. Запись $y > x$ означает, что $y_i > x_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Вектор $x \in M \subseteq R^t$ называется слабооптимальным по Парето (во множестве M), если $\{y \in R^t \mid y > x\} \cap M = \varnothing$. Будем далее обозначать этот факт следующим образом: $x \in WPO(M)$.

Пусть $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_n) = (\widehat{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_{-i})$ – ситуация в конечной игре n лиц в развернутой форме с полной информацией и векторными выигрышами $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$, а

$$M_i(\Gamma, \widehat{\varphi}_{-i}) = \{H_i(\varphi_i, \widehat{\varphi}_{-i}), \varphi_i \in \Phi_i\} \tag{3.1}$$

– множество всех векторов выигрыша, которые игрок i может получить при фиксированном наборе $\widehat{\varphi}_{-i}$ стратегий остальных игроков и произвольном выборе собственной чистой стратегии φ_i.

Определение 3.1. *Набор стратегий $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_n)$ называется (слабым) равновесием [17, 5, 8] (или равновесием Парето [19]) в многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$, если для каждого игрока $i \in N$ не существует стратегии $\varphi_i \in \Phi_i$ такой, что:*

$$H_i(\varphi_i, \widehat{\varphi}_{-i}) > H_i(\widehat{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_{-i})\,. \tag{3.2}$$

Множество всех равновесий в многокритериальной игре Γ обозначим $ME(\Gamma)$.

Замечание 3.1. Условие (3.2) с учетом обозначения (3.1) можно записать в следующем виде:

$$(\widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_n) \in ME(\Gamma) \Leftrightarrow H_i(\widehat{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_{-i}) \in WPO(M_i(\Gamma, \widehat{\varphi}_{-i}))\ \forall i \in N\,.$$

Определение 3.2. *Ситуация $\widehat{\varphi} \in ME(\Gamma)$ называется ситуацией абсолютного равновесия [16] в игре Γ, если усечение данной ситуации является равновесием в каждой подыгре Γ_x:*

$$\widehat{\varphi}^x \in ME(\Gamma^x) \quad \forall x \in K \backslash Z\,. \tag{3.3}$$

Множество всех ситуаций абсолютного равновесия в игре Γ обозначим $SPME(\Gamma)$.

Замечание 3.2. В частном случае $r(i) = 1$ для всех $i \in N$ условие (3.2) совпадает с определением равновесия по Нэшу [10, 11] в игре с одним критерием у каждого игрока.

Важный результат, полученный для игр в развернутой форме (с одним критерием у каждого игрока) в [6] с использованием теории разложения игр и стратегий, заключается в том, что, имея равновесие φ^x по Нэшу в подыгре Γ_x и равновесие φ^D по Нэшу в соответствующей фактор-игре $\Gamma_D(\varphi^x)$, всегда можно «составить» равновесие по Нэшу $\varphi = \{(\varphi_i^D, \varphi_i^x)\}_{i=1}^n$ в основной игре Γ.

Данный результат справедлив не только в классе чистых стратегий игроков в играх с полной информацией, но и в классе смешанных стратегий для игр в развернутой форме с неполной информацией (см., напр., [6, 2]), а именно верна следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть игра Γ в развернутой форме (с одним критерием у каждого игрока) разложена в позиции x, и $\bar{\varphi}^x = (\bar{\varphi}_1^x, \ldots, \bar{\varphi}_n^x)$ – ситуация равновесия по Нэшу (в общем случае – в смешанных стратегиях) в подыгре Γ_x, а $\bar{\varphi}^D = (\bar{\varphi}_1^D, \ldots, \bar{\varphi}_n^D)$ – ситуация равновесия по Нэшу в соответствующей фактор-игре $\Gamma_D(\bar{\varphi}^x)$.*

Если для каждого игрока $i \in N$ стратегия $\bar{\varphi}_i$ в игре Γ разлагается на $\bar{\varphi}_i^x$ и $\bar{\varphi}_i^D$ в Γ_x и Γ_D соответственно, то набор стратегий $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n)$ является равновесием по Нэшу в исходной игре.

Следующий пример демонстрирует, что аналогичный результат для равновесия ME в многокритериальных играх не имеет места.

Пример 3.1. Рассмотрим многокритериальную игру с полной информацией $\Gamma = (2, K, r(1) = 2, r(2) = 2)$ с деревом K, представленным на рис. 1.

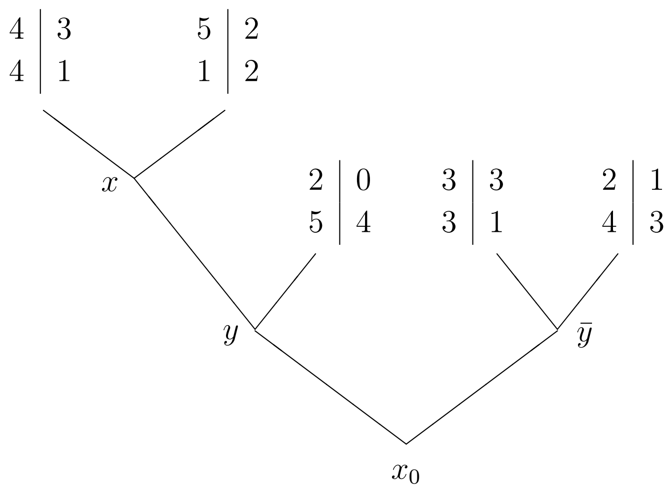

Рисунок 1. Многокритериальная игра двух лиц

Здесь $P_1 = \{x_0, x\}, P_2 = \{y, \bar{y}\}$, векторные выигрыши первого и второго игроков записаны рядом с каждой окончательной позицией.

Стратегии игроков $\varphi_1^y(x) = \Pi$ (выбор правой альтернативы в позиции x) и $\varphi_2^y(y) = Л$ образует равновесие в подыгре Γ_y:

$$\varphi^y = (\varphi_1^y, \varphi_2^y) \in ME(\Gamma_y).$$

В соответствующей фактор-игре $\Gamma_D(\varphi^y)$ позиция y является окончательной и доставляет игрокам векторные выигрыши $\begin{array}{c|c} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$.

Стратегии игроков $\varphi_1^D(x_0) = \Pi$ и $\varphi_2^D(\bar{y}) = Л$ образуют равновесие в фактор-игре $\Gamma_D(\varphi^y)$:

$$\varphi^D = (\varphi_1^D, \varphi_2^D) \in ME(\Gamma_D(\varphi^y)),$$

при этом $H_1^D(\varphi^D) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Однако, «составная» ситуация $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_i = (\varphi_i^D, \varphi_i^x)$, $i = 1, 2$ не удовлетворяет условию равновесия (3.2), поскольку

$$H_1(\varphi_1, \varphi_2) \notin WPO(M_1(\Gamma, \varphi_2)).$$

Действительно, пусть $\psi_1(x_0) = Л, \psi_1(x) = Л$. Тогда

$$H(\psi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} > H(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отмеченное в примере 3.1 обстоятельство не позволяет напрямую использовать известный метод «обратной индукции» (см., напр., [2]) для доказательства существования абсолютного равновесия, а также для построения всего множества абсолютных равновесий (3.3) в многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$.

Вместе с тем, известные способы (см., напр., [16, 5, 19, 20, 8]) «перехода» от многокритериальных игр к играм с одним критерием у каждого игрока и связь между равновесиями в соответствующих играх позволяет установить существование абсолютного равновесия в многокритериальной игре, а также и предположить способ построения всех абсолютных равновесий.

Предположим, например, что каждый игрок $i \in N$ в многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ выбирает в качестве «главного» критерия первую компоненту своей векторной функции выигрыша. Соответствующую игру (на исходном дереве K и с теми же множествами чистых стратегий игроков), но с новой скалярной функцией выигрыша каждого игрока

$$H_i^T(\varphi) = H_{i|1}(\varphi) \;\; \forall i \in N \quad \forall (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \prod_{j=1}^{n} \Phi_j, \tag{3.4}$$

обозначим Γ_T. Отметим, что игра Γ_T является классической игрой n лиц в развернутой форме с полной информацией (с одним критерием у каждого игрока). Класс всех таких игр обозначим $G^P(n, K)$.

Лемма 3.1. *Пусть $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n)$ – равновесие по Нэшу (в чистых стратегиях) в игре Γ_T с функциями выигрыша (3.4), отвечающей многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$. Тогда*

$$\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n) \in ME(\Gamma).$$

Доказательство. По условию для каждого игрока $i \in N$ и любой его стратегии $\varphi_i \in \Phi_i$ выполнено неравенство

$$H_{i|1}(\varphi_i, \hat{\varphi}_{-i}) \leq H_{i|1}(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_{-i}),$$

то есть

$$H_{i|1}(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_{-i}) = \max_{\varphi_i \in \Phi_i} H_{i|1}(\varphi_i, \hat{\varphi}_{-i}).$$

Следовательно, не существует такой стратегии $\varphi_i \in \Phi_i$, что выполнено строгое векторное неравенство

$$H_i(\varphi_i, \hat{\varphi}_{-i}) > H_i(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_{-i}).$$

Сравнив это неравенство с условием (3.3), приходим к выводу, что $\hat{\varphi} \in ME(\Gamma)$. $\square$

Лемма 3.2. *Если $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n)$ – ситуация абсолютного равновесия в игре Γ_T с функциями выигрыша (3.4), то*

$$\hat{\varphi} \in SPME(\Gamma).$$

Известный результат о существовании абсолютного равновесия в любой конечной игре n лиц в развернутой форме с полной информацией со скалярной функцией выигрыша каждого игрока (см., напр., [2]), а также утверждения лемм 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *В любой конечной многокритериальной игре n лиц в развернутой форме с полной информацией $\Gamma \in$ $\in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ существует ситуация абсолютного равновесия $\hat{\varphi} \in SPME(\Gamma)$ в чистых стратегиях.*

Замечание 3.3. Из теоремы 3.2, в частности, следует, что в любой игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ множество $ME(\Gamma)$ ситуаций равновесия в чистых стратегиях непусто.

Напомним, что любой вектор

$$\lambda(i) \in \Lambda_{r(i)} = \{\lambda \in R^{r(i)} | \lambda_j \geq 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_{r(i)} = 1\}$$

определяет набор весовых коэффициентов $\lambda_1(i), \ldots, \lambda_{r(i)}(i)$, участвующих в свертке [17, 5, 19, 8] векторного критерия игрока i:

$$H_i^{\lambda}(\varphi) = \sum_{j=1}^{r(i)} \lambda_j(i) \cdot H_{i|j}(\varphi). \tag{3.5}$$

Выбрав вектора $\lambda(i)$ для всех игроков $i \in N$, исходной многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ можно поставить в соответствие игру n лиц в развернутой форме с полной информацией Γ_λ со скалярной функцией выигрыша (3.5) каждого игрока $i \in N$. Обозначим через $NE(\Gamma_\lambda)$ множество всех равновесий по Нэшу в игре Γ_λ.

В работе [17] показано, что множество всех равновесий в многокритериальной игре Γ совпадает со множеством всех равновесий по Нэшу в соответствующих играх Γ_λ, полученных при использовании произвольных допустимых наборов весовых коэффициентов $\lambda(i), i \in N$.

$$ME(\Gamma) = \{\hat{\varphi} \in NE(\Gamma_\lambda) | \lambda = (\lambda(1), \ldots, \lambda(n)) \in \prod_{i=1}^{n} \Lambda_{r(i)}\}.$$

Используя данное соответствие, а также леммы 3.1, 3.2 и метод «обратной индукции» можно предложить следующий метод построения абсолютных равновесий в многокритериальной игре

$$\Gamma \in MG^P(n, K, (r(1), \ldots, r(n))) :$$

1) Выбрать наборы весовых коэффициентов $\lambda(i) \in \Lambda_{r(i)}$ для каждого игрока $i \in N$.
2) В игре Γ_λ со скалярными функциями выигрыша (3.5) используя метод «обратной индукции» [2], построить все абсолютные равновесия $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n)$. Каждая из найденных ситуаций $\hat{\varphi}$ будет являтся ситуацией абсолютного равновесия в исходной многокритериальной игре Γ, т. е. $\hat{\varphi} \in ME(\Gamma)$.

Продемонстрируем возможность применения предложенного метода построения абсолютных равновесий в многокритериальной игре Γ из примера 3.1.

Если для свертки (3.5) векторных критериев игроков использовать векторы коэффициентов $\lambda(1) = (0,8; 0,2)$ и $\lambda(2) = (0,3; 0,7)$, то результатом применения метода «обратной индукции» в игре Γ_λ станет ситуация $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in SPME(\Gamma)$:

$$\varphi_1(x_0) = \text{Л}; \varphi_1(x) = \text{П}; \varphi_2(y) = \text{П}; \varphi_2(\bar{y}) = \text{П}.$$

Соответствующий этому абсолютному равновесию набор выигрышей игроков:

$$H_1(\varphi) = (2;5), H_2(\varphi) = (0;4).$$

Набор весовых коэффициентов $\lambda(1) = (0,8;0,2)$ и $\lambda(2) = (0,8;0,2)$ порождает абсолютное равновесие $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in SPME(\Gamma)$:

$$\psi_1(x_0) = \text{Л}; \psi_1(x) = \text{П}; \psi_2(y) = \text{Л}; \psi_2(\bar{y}) = \text{Л};$$

$$H_1(\psi) = (5;1); H_2(\psi) = (2;2),$$

а набор $\lambda(1) = (0,3;0,7)$ и $\lambda(2) = (0,8;0,2)$ приводит к ситуации $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in SPME(\Gamma)$:

$$\eta_1(x_0) = \text{Л}; \eta_1(x) = \text{Л}; \eta_2(y) = \text{Л}; \eta_2(\bar{y}) = \text{Л}$$

с векторами выигрышей $H_1(\eta) = (4;4)$ и $H_2(\eta) = (3;1)$.

4. Динамическая устойчивость равновесий в играх с полной и неполной информацией

Пусть ситуация $\hat{\varphi} \in ME(\Gamma)$ порождает партию (траекторию) ω в многокритериальной игре $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \dots, r(n))$, $G(\hat{\varphi})$ – множество возможных подыгр с начальными позициями на оптимальной траектории ω.

Определение 4.1. *Множество $ME(\Gamma)$ (принцип оптимальности ME) называют динамически устойчивым (состоятельным во времени) [3, 2], если для любой ситуации $\hat{\varphi} \in ME(\Gamma)$ в каждой подыгре $\Gamma_x \in G(\hat{\varphi})$ выполнено условие $\hat{\varphi}^x \in ME(\Gamma_x)$.*

Теорема 4.1. *Множество $ME(\Gamma)$ ситуаций равновесия в чистых стратегиях в многокритериальной игре n лиц в развернутой форме с полной информацией $\Gamma \in MG^P(n, K, r(1), \dots, r(n))$ является динамически устойчивым.*

Доказательство. Пусть ситуация $\hat{\varphi} \in ME(\Gamma)$, то есть выполнено условие (3.2). Предположим, что $\hat{\varphi}^x \notin ME(\Gamma)$ в некоторой подыгре $\Gamma_x \in G(\hat{\varphi})$. Тогда для некоторого игрока $i \in N$ найдется стратегия $\varphi_i^x \in \Phi_i^x$ такая, что выполняется векторное неравенство

$$H_i^x(\varphi_i^x, \hat{\varphi}_{-i}^x) > H_i^x(\hat{\varphi}^x) = H_i(\hat{\varphi}).$$

Но

$$H_i^x(\varphi_i^x, \hat{\varphi}_{-i}^x) = H_i(\psi_i, \hat{\varphi}_{-i}), \text{где} \ \ \psi_i = (\hat{\varphi}_i^D, \varphi_i^x) \in \Phi_i.$$

Следовательно, для некоторой стратегии ψ_i игрока $i \in N$ в исходной игре Γ выполнено векторное неравенство

$$H_i(\psi_i, \hat{\varphi}_{-i}) > H_i(\hat{\varphi}_i, \hat{\varphi}_{-i}),$$

что противоречит условию (3.2).

Следовательно, множество $ME(\Gamma)$ в чистых стратегиях удовлетворяет свойству динамической устойчивости в многокритериальных играх с полной информацией. □

Далее рассмотрим класс $MG(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ конечных игр $\Gamma = \{N, K, P, A, U, h\}$ n лиц в развернутой форме с неполной информацией, формализованных в [6, 2], но с векторными выигрышами (2.1). Здесь через U обозначено информационное разбиение множества всех промежуточных позиций (см., напр., [2]). Через $p(\omega, \mu)$ будем обозначать вероятность реализации партии (траектории) ω в ситуации μ (в смешанных стратегиях) в игре Γ.

Множество позиций игры Γ, следующих за некоторой фиксированной позицией x, определяет подыгру Γ_x на подграфе K^x, если каждое информационное множество Ω игры Γ либо содержится в K^x, либо не пересекается с K^x. Разложению игры Γ с неполной информацией в позиции x на подыгру Γ_x и фактор-игру Γ_D отвечает естественное разложение смешанных стратегий (см. [6, 2]). При этом, в частности, выполнена следующая лемма.

Лемма 4.1. [6]. *Любая пара μ_i^x и μ_i^D смешанных стратегий игрока i в Γ_x и Γ_D может быть получена как результат разложения некоторой стратегии μ_i в Γ. Кроме того, для любой траектории ω в Γ, содержащей позицию x, справедливо*

$$p(\omega, \mu) = p(\bar{\omega}_x, \mu^D) \cdot p(\omega^x, \mu^x), \tag{4.1}$$

где $\mu^D = (\mu_1^D, \ldots, \mu_n^D)$ – ситуация в Γ_D, $\mu^x = (\mu_1^x, \ldots, \mu_n^x)$ – ситуация в подыгре Γ_x, $\omega = \{x_0, \ldots, x, \ldots, x_l\}, x_l \in Z$ – траектория в Γ, $\bar{\omega}_x = \{x_0, \ldots, x\}$ – траектория в Γ_D, $\omega^x = \{x, \ldots, x_l\}$ – траектория *в* Γ_x, $p(\bar{\omega}_x, \mu^D) = p(x, \mu^D)$ *– вероятность реализации позиции* x *в ситуации* μ^D *фактор-игры* Γ^D.

Отметим, что каждая ситуация μ в смешанных стратегиях в игре $\Gamma \in MG(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ в общем случае порождает целое семейство траекторий, реализующихся с положительной вероятностью в ситуации μ.

Известно, (см., напр., [4]), что множество ситуаций абсолютного равновесия $SPME(\Gamma)$ в смешанных стратегиях в многокритериальных играх с неполной информацией непусто.

Кроме того, отметим, что приведенный в разделе 3 метод построения абсолютных равновесий в многокритериальной игре остается справедливым и для класса игр $MG(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ с неполной информацией.

Пусть ситуация $\hat{\mu}$ в смешанных стратегиях является равновесием в игре $\Gamma \in MG(n, K, r(1), \ldots, r(n))$, а $G(\hat{\mu})$ – множество всех возможных подыгр с начальными позициями на условно-оптимальных траекториях ω_n, порожденных ситуацией $\hat{\mu}$.

Теорема 4.2. *Множество* $ME(\Gamma)$ *ситуаций равновесия в смешанных стратегиях в многокритериальной игре* n *лиц в развернутой форме с неполной информацией* $\Gamma \in MG(n, K, r(1), \ldots, r(n))$ *является динамически устойчивым.*

Доказательство. Если $\hat{\mu} \in ME(\Gamma)$, то для любого игрока $i \in N$ не существует смешанной стратегии μ_i такой, что

$$H_i(\mu_i, \hat{\mu}_{-i}) > H_i(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_{-i}). \tag{4.2}$$

Пусть $\Gamma_x \in G(\hat{\mu})$, то есть x – промежуточная позиция, лежащая на некоторой условно-оптимальной траектории ω_n, $x \neq x_0$, и в позиции x можно (с учетом информационного разбиения) образовать подыгру. Отметим, что все множество условно-оптимальных траекторий $\{\omega_n\}$, порожденных ситуацией $\hat{\mu}$, может быть разбито на два непересекающихся подмножества: $\{\eta_m\} = \{\omega | x \in \omega\}$ и $\{\chi_k\} = \{\omega | \omega$ не содержит $x\}$. При этом

$$H_i(\hat{\mu}) = \sum_m p(\eta_m, \hat{\mu}) \cdot h_i(\eta_m) + \sum_k p(\chi_k, \hat{\mu}) \cdot h_i(\chi_k). \tag{4.3}$$

Пусть $\hat{\mu}^D = (\hat{\mu}_1^D, \ldots, \hat{\mu}_n^D)$ – элемент разложения ситуации μ, отвечающий фактор-игре $\Gamma_D = \Gamma_D(\hat{\mu}^x)$, а

$$p(\bar{\eta}_x, \hat{\mu}^D) = p(x, \hat{\mu}^D) = p(x, \hat{\mu})$$

– вероятность реализации позиции x (и траектории $\bar{\eta}_x = \{x_0, \ldots, x\}$) в ситуации $\hat{\mu}^D$ фактор-игры.

Предположим, что в подыгре Γ_x нарушено условие динамической устойчивости, то есть $\hat{\mu}^x \notin ME(\Gamma_x)$. Тогда для некоторого игрока $i \in N$ в подыгре Γ_x существует смешанная стратегия μ_i^x такая, что

$$H_i^x(\mu_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x) > H_i^x(\hat{\mu}_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x)\,. \tag{4.4}$$

Пусть ситуация $(\mu_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x)$ порождает в подыгре Γ_x семейство траекторий $\{\xi_\alpha^x\}$, реализующихся с положительными вероятностями $p(\xi_\alpha^x, (\mu_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x))$. Тогда векторное неравенство (4.4) примет вид

$$\sum_\alpha p(\xi_\alpha^x, (\mu_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x)) \cdot h_i^x(\xi_\alpha^x) > \sum_m p(\eta_m^x, \hat{\mu}^x) \cdot h_i^x(\eta_m^x)\,. \tag{4.5}$$

С учетом леммы 4.1, пара стратегий μ_i^x и $\hat{\mu}_i^D$ в Γ_x и в Γ_D может быть получена как результат разложения некоторой стратегии $\beta_i = (\hat{\mu}_i^D, \mu_i^x)$ в исходной игре Γ. Кроме того

$$H_i(\beta_i, \hat{\mu}_{-i}) = \sum_\alpha p(\bar{\eta}_x, \hat{\mu}^D) \cdot p(\xi_\alpha^x, (\mu_i^x, \hat{\mu}_{-i}^x)) \cdot h_i^x(\xi_\alpha^x) + \sum_k p(\chi_k, \hat{\mu}) \cdot h_i(\chi_k)\,. \tag{4.6}$$

Домножим обе части (4.5) на положительную величину $p(\bar{\eta}_x, \hat{\mu}^D)$ и прибавим к обеим частям полученного векторного неравенства $\sum\limits_k p(\chi_k, \hat{\mu}) \cdot h_i(\chi_k)$.

С учетом (4.1), (4.6) и (4.3) получим

$$H_i(\beta_i, \hat{\mu}_{-i}) > H_i(\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_{-i}).$$

Последнее векторное неравенство противоречит (4.2).

Следовательно, множество $ME(\Gamma)$ в смешанных стратегиях удовлетворяет свойству динамической устойчивости в многокритериальных играх с неполной информацией. $\square$

Отметим, что, как следует из примера 3.1, множество равновесий не удовлетворяет свойству динамической совместимости [1, 7, 2] в многокритериальных позиционных играх (с полной и неполной информацией).

5. Аксиоматическая характеризация MSPE

Проведем аксиоматическую характеризацию абсолютного равновесия в многокритериальных играх, используя подход, предложенный в [13,14].

Пусть $\Gamma = \{N, K, P, A, p, h\}$ – конечная многокритериальная игра n лиц в развернутой форме с полной информацией, отличающаяся от игры, формализованной в п. 2 наличием множества позиций случая $P_0 \subset P$, причем $p(x), x \in P_0$ определяет вероятностное распределение на множестве $S(x)$ всех альтернатив y позиции случая x:

$$p(x, y) \geq 0 \ \forall y \in S(x), \sum_{y \in S(x)} p(x, y) = 1 \,.$$

Замечание 5.1. Всюду далее мы допускаем возможность $p(x, y) = 0$ для некоторых позиций случая $y \in S(x), x \in P_0$, следуя [9].

Кроме того, во всех позициях $y \in P_i, i \in N, y > x$, следующих за позицией случая $x \in P_0$, каждый игрок i обладает полной информацией о реализации случайного хода в позиции x.

Обозначим класс конечных многокритериальных позиционных игр с полной информацией (с наличием позиций случая) через MG_0^P.

Пусть B_i – множество стратегий поведения [6] игрока i в игре $\Gamma = \{N, K, P, A, p, h\} \subset MG_0^P, b_i \in B_i, b_i(x)$ – вероятностное распределение на множестве $S(x), x \in P_i$, соответствующее стратегии b_i.

Для каждой собственной коалиции $S \subset N, S \neq \varnothing, N$ и ситуации $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \prod_{i \in N} B_i$ определим редуцированную игру $\Gamma^{S,b} = (S, \overline{K}, \overline{P}, \overline{A}, \overline{p}, \overline{h})$ следующим образом (см. [14]):

- позиции $x \in P_i, i \in N \backslash S$ добавим к позициям случая исходной игры Γ :
$$\overline{P}_0 = \left(\cup_{i \in N \backslash S} P_i\right) \cup P_0;$$
- вероятностное распределение $\bar{p}(x)$ на множестве альтернатив $S(x)$ для каждой «новой» позиции случая определим по правилу $\bar{p}(x) = b_i(x), x \in \overline{P}_0 \backslash P_0$;

- $\bar{h}(z), z \in Z$ – ограничение исходного набора векторных функций выигрыша на множество игроков $i \in S$.

Отметим, что класс игр MG_o^P является замкнутым относительно операции образования редуцированных игр, т.е. из условий $\Gamma = \{N, K, P, A, p, h\} \in MG_o^P, S \subset N, S \neq \varnothing, N$ и $b \in \prod\limits_{i \in N} b_i$ следует, что $\Gamma^{S,b} \in MG_o^P$.

Решение (принцип оптимальности) θ, определенное на классе игр MG_0^P, ставит в соответствие каждой игре $\Gamma \in MG_0^P$ некоторое подмножество $\theta(\Gamma) \subset \prod\limits_{i \in N} B_i$.

Для каждой игры $\Gamma \subset MG_0^P$ с числом игроков $|N| \geq 2$ введем обозначение

$$\tilde{\theta}(\Gamma) = \{b \in \prod_{i \in N} B | b_S \in \theta(\Gamma^{S,b}) \ \forall \ S \subset N, S \neq \varnothing, N\}. \tag{5.1}$$

Ситуации из множества $\tilde{\theta}$ в исходной игре Γ обладают тем свойством, что их ограничения в каждой собственной редуцированной игре удовлетворяют принципу оптимальности θ в соответствующей редуцированной игре.

Определение 5.1. *Решение θ, заданное на замкнутом классе позиционных многокритериальных игр MG_o^P, удовлетворяет свойству состоятельности (CONS), если для каждой игры $\Gamma \subset MG_0^P$ с числом игроков $|N| \geq 2$, каждой собственной коалиции $S \subset N$, $S \neq \varnothing, N$, и каждой оптимальной ситуации $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \theta(\Gamma)$ выполняется условие*

$$b_S \in \theta\left(\Gamma^{S,b}\right). \tag{5.2}$$

Отметим, что с учетом обозначения (5.1) условие (5.2) можно записать в виде: $\theta(G) \subset \tilde{\theta}(G)$.

Определение 5.2. *Решение θ, заданное на замкнутом классе игр MG_0^P, удовлетворяет свойству обратной состоятельности (COCONS), если для каждой игры $\Gamma \in MG_o^P, |N| \geq 2$ выполнено условие*

$$\tilde{\theta}(G) \subset \theta(G).$$

Определение 5.3. *Решение θ, заданное на MG_0^P, удовлетворяет свойству $COCONS_0$, если для каждой игры $\Gamma \in MG_0^P, |N| \geq 2$ и каждой ситуации $b \in \prod\limits_{i \in N} b_i$ справедливо*

$$\left[\cup \left\{S \subset N | S \neq \varnothing \text{ и } b_S \in \theta(\Gamma^{S,b})\right\} = N\right] \Rightarrow b \in \theta(\Gamma). \qquad (5.3)$$

Определение 5.4. *Решение θ, заданное на MG_0^P, удовлетворяет свойству совершенной рациональности в играх с одним игроком (POPR), если для каждой игры $\Gamma = (\{i\}, K, P, A, p, h) \subset MG_0^P$ с одним игроком*

$$\theta(\Gamma) = \{b_i \in B_i | b_i - \text{ситуация абсолютного равновесия в } \Gamma\}.$$

Лемма 5.1. *Равновесие ME в стратегиях поведения удовлетворяет свойству $COCONS_0$ на классе игр MG_0^P.*

Доказательство. Рассмотрим для наглядности случай, когда набор коалиций в (5.3) состоит из двух непустых коалиций S_1 и $S_2, S_1 \cup S_2 = N$, таких, что

$$b_{S_1} \in ME(\Gamma^{S_1,b}), b_{S_2} \in ME(\Gamma^{S_2,b}).$$

Используя определение 3.1 равновесия и определение редуцированной игры, эти условия можно записать в виде:

$$\forall i \in S_1 \nexists\, b_i' \in B_i : H_i(b_i', b_{-i}) > H_i(b_i, b_{-i}),$$

$$\forall i \in S_2 \nexists\, b_i' \in B_i : H_i(b_i', b_{-i}) > H_i(b_i, b_{-i}).$$

Объединение этих двух условий приводит к заключению, что $b \in ME(\Gamma)$. □

Теорема 5.1. *Решение θ, заданное на замкнутом классе многокритериальных игр MG_0^P в развернутой формой с полной информацией (с наличием позиций случая), удовлетворяет свойствам POPR, CONS и COCONS тогда и только тогда, когда $\theta = SPME$.*

Доказательство. Очевидно, что абсолютное равновесие $SPME$ удовлетворяет свойству POPR. Кроме того, используемое определение редуцированной игры $\Gamma^{S,b}$ обеспечивает выполнение свойства CONS.

Проверим, что SPME удовлетворяет свойству $COCONS$ на MG_0^P. Пусть $\Gamma = (N, K, P, A, p, h) \subset MG_0^P, |N| \geq 2$, и $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \in \widetilde{SPME}(G)$, т.е. для каждой собственной коалиции $S \subset N, S \neq \varnothing, N$ выполнено условие:

$$b_S \in SPME(\Gamma^{S,b}).$$

В частности, $b_i \in SPME(\Gamma^{\{i\},b})$) для всех $i \in N$.

Пусть Γ_* – некоторая подыгра игры Γ, b_i^* – ограничение стратегии $b_i, i \in N$, отвечающее подыгре Γ_*. Отметим, что для всех $i \in N$ редуцированная игра $\Gamma_*^{\{i\},b^*}$ подыгры Γ_* является подыгрой редуцированной игры $\Gamma^{\{i\},b}$ исходной игры Γ. Следовательно, b_i^* является равновесием в игре $\Gamma^{\{i\},b^*}$:

$$b_i^* \in ME(\Gamma^{\{i\},b^*}), i \in N. \tag{5.4}$$

Используя свойство $COCONS_0$ равновесия (лемма 5.1.) и (5.4), получим, что

$$b^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*) \in ME(\Gamma_*).$$

Следовательно, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in SPME(\Gamma)$, и абсолютное равновесие SPME удовлетворяет свойству COCONS.

Предположим далее, что решение θ удовлетворяет свойствам POPR, CONS и COCONS на классе MG_0^P многокритериальных позиционных игр с полной информацией (с наличием позиций случая).

Докажем, что $\theta = SPME$ индукцией по числу игроков $|N|$ в игре $\Gamma = (N, K, P, A, p, h) \in MG_0^P$. Если $|N| = 1, \theta(\Gamma) = SPME(\Gamma)$ по свойству POPR.

Предположим, что $\theta(\Gamma) = SPME(\Gamma)$ в каждой игре $\Gamma \subset MG_0^P$ с числом игроков $|N| = k \leq n$ и рассмотрим игру Γ с n игроками, $n \geq 2$.

С учетом индуктивного предположения $\tilde{\theta}(\Gamma) = \widetilde{SPME}(\Gamma)$. Поскольку решения θ и $SPME$ удовлетворяют свойствам CONS и COCONS, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\theta(\Gamma) = \widetilde{\theta}(\Gamma) = \widetilde{SPME}(\Gamma) = SPME(\Gamma).$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузютин Д.В. *К проблеме устойчивости решений позиционных игр*// Вестник СПбГУ. 1995. Сер.1. Вып.4. № 22. С. 18–23.

2. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. *Устойчивые решения позиционных игр*// СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008.

3. Петросян Л.А. *Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Вып. 4. № 19. 1977. С. 46–52.

4. Фахретдинова В.А. *Позиционные игры с векторной функцией выигрыша* // МКО-10. 2002. С. 151–153.

5. Borm P., Van Megen F., Tijs S. *A perfectness concept for multicriteria games* //Mathematical Methods of Operation Research. 49. 1999. P. 401-412.

6. Kuhn H. W. *Extensive games and the problem of information* // Annals of Mathematics Studies. 1953. V. 28. P. 193–216.

7. Kuzutin D. *Reexamination of the strong time consistency concept in extensive games* // Proceedings of the 7th Intern. Symposium on Dynamic Games and Applications. 1996. Kanagawa. P. 564–572.

8. Kuzyutin D. *On the consistency of weak equilibria in multicriteria extensive games* // Contributions to game theory and management, collected papers, vol. V . Editors L.A. Petrosjan, N. A. Zenkevich. - SPb.: Graduated School of Management, SPbGU, 2012, P. 168–177.

9. Myerson R. *Game theory. Analysis of conflict* // Harvard Univ. Press. 1991.

10. Nash J. F. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

11. Nash J. F.*Non-cooperative games* // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. № 2. P. 286–295.

12. Norde H., Potters J., Reijnierse H. and Vermeulen D. *Equilibrium Selection and Consistency* // Games and Economic Behavior. 1996. № 12. P. 219–225.

13. Peleg B., Potters J. and Tijs S. *Minimality of consistent solutions for strategic games, in particular for potential games* // Economic Theory. 1996. № 7. P. 81–93.

14. Peleg B., Tijs S. *The consistency principle for games in strategic form* // International Journal of Game Theory. 1996. № 25. P. 13-34.

15. Petrosjan L., J. Puerto. *Folk theorems in multicriteria repeated n-person games* // Sociedad de Estatistica e Investigation Operativa Top. 2002. V. 10. № 2. P. 275-287.

16. Selten R. *Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games* // International Journal of Games Theory. 1975. № 4. P. 25–55.

17. Shapley L. *Equilibrium points in games with vector payoffs*. Naval Research Logistics Quarterly. 1959. P. 57–76.

18. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. *Ideal equilibria in non-cooperative multicriteria games*// Mathematical Methods of Operations Research. 2000. № 52. P. 65–77

19. Voorneveld M., Vermeulen D., Borm P. *Axiomatization of Pareto equilibria in multicriteria games* // Games and Economic Behavior. 1999. № 28. P. 146–154.

20. Zhukovskiy V., Salukvadze M. *The vector-valued maximin*. N.Y.: Academic press, 1994.

ON EQUILIBRIUM PROPERTIES IN MULTICRITERIA EXTENSIVE N-PERSON GAMES

Denis V. Kuzyutin, Saint-Petersburg State University, International Banking Institute, Cand.Sc., assoc.prof. (d.kuzyutin@yandex.ru),
Mariya V. Nikitina, International Banking Institute, assistant (maryaniki@gmail.com),
Yaroslavna B. Pankratova, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc., assistant (yasyap@gmail.com).

Abstract: The paper considers Pareto equilibria properties in multicriteria extensive n-person games (with perfect or incomplete information). It is proved that the set of all equilibriums satisfies time consistency but does not satisfy the dynamical compatibility property. The axiomatic characterization of subgame perfect equilibrium in multicriteria extensive games with perfect information is derived.

Keywords: multicriteria games, extensive games, subgame perfect equilibrium, Pareto equilibria, time consistency, reduced game.