Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.1, с. 41–55

УДК 519.833.2
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЕ В ТРАНСПОРТНОЙ ИГРЕ

Анна В. Мельник*
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: a.mazalova@spbu.ru

В работе рассматривается бескоалиционная транспортная игра m лиц с ненулевой суммой, связанная с функционированием системы массового обслуживания $M/M/m$ на графе. Есть m серверов (транспортных компаний), которые обслуживают заявки с экспоненциальным распределением времени обслуживания с параметрами μ_i $i = 1, 2, \ldots, m$. Заявки на обслуживание образуют пуассоновский процесс с матрицей интенсивностей Λ. Решается задача о ценообразовании и определении оптимальной интенсивности для каждой из компаний в условиях конкуренции.

Ключевые слова: система обслуживания с очередями, граф маршрутов, цена на маршрут, равновесные цены.

1. Введение

Рассматривается бескоалиционная игра m лиц с ненулевой суммой, связанная с функционированием системы массового обслуживания $M/M/m$ на графе. Теоретико-игровому моделированию таких задач были посвящены работы [4–7]. Пусть $\Gamma =< N, G, Z_{i,i\in N}, H_{i,i\in N} >$

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета в рамках научного проекта 9.38.245.2014.

– транспортная игра, в которой $N = \{1, \ldots, m\}$ – множество игроков (транспортные компании), обслуживающие пассажиров на графе $G =< V, E >$, где V – множество вершин и E – множество ребер. Будем считать, что все вершины пронумерованы, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Для каждого игрока i существует набор маршрутов Z_i из вершины $v_s \in V$ в $v_t \in V$, которые обслуживает игрок i. Таким образом, $Z_i = (R^i_1, R^i_2, \ldots, R^i_{m_i})$, $i = 1, \ldots, m$. Каждый маршрут представляет собой путь, т.е. последовательность вершин, соединенных ребрами $R = (v_s, v_{s+1}, \ldots, v_t)$, в которой конец одного ребра является началом другого ребра, т.е. $(v_s, v_{s+1}), \ldots, (v_{t-1}, v_t) \in E$. Маршруты будем обозначать большими буквами R, а подпути обозначим малыми буквами r. Чтобы подчеркнуть, что начало пути есть v_s, а конец есть v_t, будем обозначать такой путь R_{st} или r_{st}. Будем говорить, что путь $r_{s't'}$ является подпутем пути r_{st} и писать $r_{s't'} \subset r_{st}$, если путь $r_{s't'}$ является подпоследовательностью вершин, содержащихся в r_{st}.

Обслуживание пассажиров игроком i имеет экспоненциальное распределение времени обслуживания с параметром μ^R_i на каждом маршруте $R \in Z_i$. Введем в рассмотрение матрицу интенсивностей $\{\lambda_{st}\}$ потоков из точки v_s в точку v_t для различных $s, t = 1, \ldots, n$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & 0 & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Игрок i назначает цены на свои услуги c^R_i, c^r_i на каждом маршруте $R \in Z_i$ и всех его подпутях $r \subset R$. Формируется профиль стратегий $\{c^{Z_i}_i\} = \{c^r_i\}, r \subset R \in Z_i, i = 1, \ldots, m$. Предположим, что пассажиры минимизируют свои затраты, которые представляют собой цену на билеты плюс ожидаемое время обслуживания, и выбирают сервис, который дешевле остальных.

Тогда входящий поток λ_{st} разбивается на пуассоновские потоки с интенсивностями λ^i_{st}, где $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda^i_{st} = \lambda_{st}$, причем, если ни в одном из маршрутов множества Z_i игрока i нет подпути r_{st}, то λ^i_{st}=0.

Затраты посетителя, воспользовавшегося i-м сервисом по подпути

r какого-то маршрута $R \in Z_i$ будут равны

$$c_i^r + \sum_{e \in r} \frac{1}{\mu_i^R - \sum\limits_{r_{st}: e \in r_{st} \subset r} \lambda_{st}^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, в равновесии затраты всех пассажиров на конкурентных направлениях будут совпадать для всех сервисов. Отсюда можно найти интенсивности λ_{st}^i для всех сервисов $i = 1, \ldots, m$ и подпутей r_{st}. А именно,

$$c_i^r + \sum_{e \in r} \frac{1}{\mu_i^R - \sum\limits_{r_{st}: e \in r_{st} \subset r \subset R} \lambda_{st}^i} = c_j^r + \sum_{e \in r} \frac{1}{\mu_j^{R'} - \sum\limits_{r_{st}: r_{st} \subset r \subset R'} \lambda_{st}^j}$$

для всех i, j таких, что $r \subset R \in Z_i$ и $r \subset R' \in Z_j$. Если цена на маршруте какого-то сервиса слишком высока, то поток пассажиров распределяется между другими сервисами, и данный сервис не будет участвовать в конкуренции. Поэтому равновесные цены следует искать среди сбалансированных цен.

Выигрыш игрока i можно записать как доход в единицу времени от обслуживания всех потоков на всех маршрутах игрока, т.е.

$$H_i(\{c_i^{Z_i}\}_{i \in N}) = \sum_{r_{st}: r_{st} \subset r \subset R \in Z_i} \lambda_{st}^i c_i^r.$$

2. Конкуренция игроков на сегменте

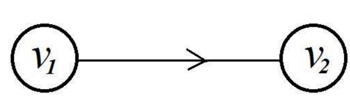

Рисунок 1. Конкуренция игроков на сегменте

2.1. Конкуренция двух игроков на сегменте

Начнем исследование предложенной модели с простого примера, рассмотренного в [2]. Есть две конкурирующие транспортные компании, которые обслуживают пассажиров на сегменте $G_1 = \{V_1, E_1\}$, изображенном на рис. 1, с экспоненциальным распределением времени обслуживания с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. В графе G_1 есть две вершины v_1, v_2 и одно ребро e. У игроков маршруты совпадают, т.е. $Z_i = (v_1, v_2)$ для $i = 1, 2$. Заявки на обслуживание образуют пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Предположим, что $\lambda < \mu_1 + \mu_2$. Игроки назначают цену на обслуживание c_1 и c_2 соответственно, и посетители выбирают услугу игрока с меньшими затратами. Тогда входящий поток разобьется на два пуассоновских потока с интенсивностями λ_1 и λ_2, где $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$. При этом затраты посетителя, воспользовавшегося i-м сервисом будут равны

$$c_i + \frac{c}{\mu_i - \lambda_i}, \quad i = 1, 2,$$

где $1/(\mu_i - \lambda_i)$ ожидаемое время пребывания пользователя в системе обслуживания [3] и c его потери за единицу времени ожидания. Понятно, что если

$$c_1 + \frac{1}{\mu_1 - \lambda} < c_2 + \frac{1}{\mu_2},$$

то все пассажиры выберут первый сервис, или наоборот

$$c_2 + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} < c_1 + \frac{1}{\mu_1},$$

то все пассажиры выберут второй. Такое решение тривиальное, так как в этом случае конкуренции нет. Для того, чтобы создать конкуренцию, игроки должны сбалансировать цены таким образом, чтобы эти условия не выполнялись. В работе рассмотрен конкурентный случай, когда пассажиры используют оба сервиса.

Без ограничения общности положим $c = 1$. Тогда интенсивности потоков λ_1 и λ_2 для соответствующих сервисов можно найти из условий

$$c_1 + \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = c_2 + \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2}, \tag{2.1}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda. \tag{2.2}$$

Теперь можно записать выигрыши игроков

$$H_1(c_1, c_2) = \lambda_1 c_1, \quad H_2(c_1, c_2) = \lambda_2 c_2.$$

Найдем равновесие в данной игре.

Пусть для определенности $\mu_1 > \mu_2$. Зафиксируем c_2 и найдем наилучший ответ первого игрока. Воспользуемся методом множителей Лагранжа, который позволит определить стационарные точки задачи оптимизации с ограничениями в виде равенств [3]. Формально схема этого метода представима в следующем виде. Найдем максимум функции H_1, при ограничениях (2.1)–(2.2)

$$L_1 = c_1\lambda_1 + k_1 \left(c_1 + \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} - c_2 - \frac{1}{\mu_2 - \lambda + \lambda_2} \right).$$

Дифференцируем

$$\frac{\partial L_1}{\partial c_1} = \lambda_1 + k_1 = 0, \quad k_1 = -\lambda_1,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = c_1 + k_1 \left(\frac{1}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\mu_2 - \lambda_2)^2} \right),$$

откуда

$$c_1^* = \lambda_1 \left(\frac{1}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\mu_2 - \lambda_2)^2} \right). \tag{2.3}$$

Аналогично находим цену для второго игрока

$$c_2^* = \lambda_2 \left(\frac{1}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\mu_2 - \lambda_2)^2} \right). \tag{2.4}$$

Из (2.3)–(2.4) следует, что

$$\frac{c_1^*}{\lambda_1} = \frac{c_2^*}{\lambda_2},$$

т.е. в равновесии интенсивности пропорциональны установленным ценам. Отсюда

$$\lambda_1 = \lambda \frac{c_1^*}{c_1^* + c_2^*}, \quad \lambda_2 = \lambda \frac{c_2^*}{c_1^* + c_2^*}.$$

Подставив в (2.3)–(2.4), приходим к уравнению

$$c_1^* + c_2^* = \lambda \left(\frac{1}{(\mu_1 - \frac{c_1^*}{c_1^* + c_2^*}\lambda)^2} + \frac{1}{(\mu_2 - \frac{c_2^*}{c_1^* + c_2^*}\lambda)^2} \right). \tag{2.5}$$

С другой стороны, из (2.1) получаем

$$c_1^* - c_2^* = \frac{1}{\mu_2 - \frac{c_2^*}{c_1^*+c_2^*}\lambda} - \frac{1}{\mu_1 - \frac{c_1^*}{c_1^*+c_2^*}\lambda}. \tag{2.6}$$

Системой уравнений (2.5)–(2.6) однозначно определяются равновесные цены c_1^* и c_2^*. Значения равновесных цен для параметров $\lambda = 10$ и различных μ_1 и μ_2 представлены в табл. 1. Несложно проверить, что условия второго порядка тоже выполнены.

Таблица 1. Значение (c_1^*, c_2^*) при $\lambda = 10$

	μ_2				
μ_1	6	7	8	9	10
6	(10;10)				
7	(5,38;5,05)	(2,5;2,5)			
8	(3,94;3,53)	(1,75;1,64)	(1,11;1,11)		
9	(3,26;2,81)	(1,38;1,22)	(0,87;0,81)	(0,625;0,625)	
10	(2,86;2,39)	(1,18;0,98)	(0,73;0,64)	(0,52;0,49)	(0,4;0,4)

2.2. Конкуренция m игроков на сегменте

Рассмотренную выше модель конкуренции двух серверов несложно распространить на случай m игроков. Представим, что есть m конкурентных серверов, которые обслуживают заявки с экспоненциальным распределением времени обслуживания соответственно с параметрами μ_1, μ_2, ..., μ_m. Игроки назначают цены на свои услуги c_1, c_2, ..., c_m соответственно. Тогда посетители будут выбирать сервис с меньшими затратами и входящий поток разобьется на m пуассоновских потоков с интенсивностями λ_1, λ_2,..., λ_m, где $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m = \lambda$. При этом затраты посетителя, воспользовавшегося i-м сервисом будут равны

$$c_i + \frac{1}{\mu_i - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда интенсивности потоков λ_1, λ_2, …, λ_m для соответствующих сервисов можно найти из условия

$$c_1 + \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = c_2 + \frac{1}{\mu_2 - \lambda_2} = \ldots = c_m + \frac{1}{\mu_m - \lambda_m}. \qquad (2.7)$$

Выигрыш i-го игрока имеет вид

$$H_i(c_1, c_2, \ldots, c_m) = \lambda_i c_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

Воспользовавшись методом множителей Лагранжа, найдем наилучший ответ первого игрока. Зафиксируем c_i $i = 2, 3, \ldots, m$. Найдем максимум функции H_1, при ограничениях (2.7)

$$L_1 = c_1\lambda_1 + \sum_{i=2}^{m} k_i \left(c_1 + \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} - c_i - \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \right) + \gamma(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \lambda).$$

Условия на экстремум первого порядка дают равенства

$$\frac{\partial L_1}{\partial c_1} = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{m} k_i = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = c_1 + \frac{\sum\limits_{i=2}^{m} k_i}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} + \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_i} = -\frac{k_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} + \gamma = 0, \quad i = 2, \ldots, m.$$

Проделывая аналогичную процедуру для каждого игрока приходим к системе, которая позволяет определить равновесные цены и интенсивности потоков на G_1

$$\begin{cases} c_i^* = \lambda_i \left(\frac{1}{\sum_{j=0, j\neq i}^{m} (\mu_j - \lambda_j)^2} + \frac{1}{(\mu_i - \lambda_i)^2} \right), \\ c_i^* + \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} = c_{i+1}^* + \frac{1}{\mu_{i+1} - \lambda_{i+1}}, \quad i = 0, \ldots, m-1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = \lambda. \end{cases} \qquad (2.8)$$

3. Конкуренция m игроков на линейном маршруте

Рассмотрим поведение m игроков на линейном маршруте $G_2 = \{V_2, E_2\}$, представленном на рис. 2. В качестве иллюстрации можно представлять движение на междугородних маршрутах, в которых пассажиры садятся на начальной станции и постепенно выходят на промежуточных остановках. Здесь множество вершин $V_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множество ребер $E_2 = \{e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{n-1n}\}$. Игроки обслуживают пассажиров с экспоненциальным распределением времени обслуживания с параметром $\mu^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что у всех игроков один и тот же линейный маршрут $Z_i = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Заявки на обслуживание образуют пуассоновский процесс с матрицей интенсивностей пуассоновских потоков Λ.

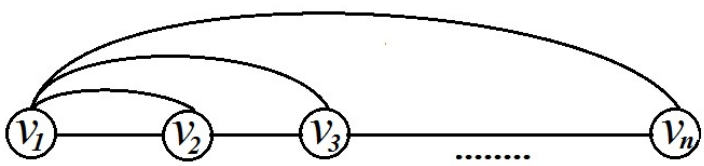

Рисунок 2. Конкуренция игроков на линейном маршруте

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Игроки назначают цену на обслуживание $c_{1s}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $s = 2, 3, \ldots, n$ и посетители выбирают услугу игрока с меньшими затратами. Тогда входящий поток Λ разобьется на потоки с интенсивностями $\lambda_{1s} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{1s}^{(i)}$, $s = 2, 3, \ldots, n$. При этом затраты пассажира, воспользовавшегося i-м сервисом на пути r_{1j} будут равны

$$c_{1j}^{(i)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 2, \ldots, n,$$

где

$$a_k^{(i)} = \frac{1}{\mu^{(i)} - \sum\limits_{s=k+1}^{n} \lambda_{1s}^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

это задержки на ребре e_{kk+1}.

Балансовые уравнения примут вид

$$c_{1j}^{(1)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(1)} - c_{1j}^{(i)} - \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(i)} = 0, \quad i = 2, \dots, m, \quad j = 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Выигрыш i-ого игрока равен

$$H_i(c_Z^{(1)}, \dots, c_Z^{(m)}) = \sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{(i)} \lambda_{1j}^{(i)}.$$

Построим функцию Лагранжа для игрока 1 при ограничениях (3.1).

$$L_1 = \sum_{j=2}^{n} c_{1j}^{(1)} \lambda_{1j}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \gamma_j \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{1j}^{(i)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} k_j^i \left(c_{1j}^{(1)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(1)} - c_{1j}^{(i)} - \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(i)} \right),$$

Запишем условия на экстремум первого порядка

$$\frac{\partial L_1}{\partial c_{1s}^{(1)}} = \lambda_{1s}^{(1)} + \sum_{i=2}^{m} k_s^i = 0, \quad s = 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{1s}^{(1)}} = c_{1s}^{(1)} + \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2+l}^{n} \frac{k_j^i}{(a_{l+1}^{(1)})^2} + \gamma_s \quad s = 2, \dots, n.$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_{1s}^{(k)}} = -\sum_{l=0}^{s-2} \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2+l}^{n} \frac{k_j^i}{(a_{l+1}^{(k)})^2} + \gamma_s, \quad s = 2, \dots, n, \quad k = 2, \dots, m.$$

3.1. Симметричный случай

Пусть игроки обслуживают пассажиров с экспоненциальным распределением времени обслуживания с одинаковым параметром μ. Тогда очевидно, что в равновесии $\lambda_{1j}^{(i)} = \lambda_{1j}^{(s)} = \frac{\lambda_{1j}}{m}$ и $c_{1j}^{(i)} = c_{1j}^{(s)}$ для любых $j = 2, \dots, n$, $i, s = 1, \dots, m$. Тогда решением системы является

$$c_{1s}^* = \frac{1}{m-1} \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{j=2+l}^{n} \frac{\lambda_{1j}}{(a_{l+1})^2}, \quad s = 2, \ldots, n, \tag{3.2}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\mu - \frac{\sum\limits_{s=k+1}^{n} \lambda_{1s}}{m}}.$$

Утверждение 3.1. *Решение системы (3.2) является точкой максимума функции выигрыша $H(c_Z)$.*

Доказательство. Для упрощения выкладок предположим, что число игроков равно 2. Тогда решение будет точкой максимума, если, начиная с углового минора порядка $2n-1$, последующие $n-2$ угловых миноров окаймленной матрицы Гессе образуют знакопеременный числовой ряд, в котором знак первого члена определяется множителем $(-1)^n$. Для двух игроков равновесием будет

$$c_{1i}^* = \sum_{k=1}^{i-1} (a_k)^2 \left(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda_{1j} \right), \quad i = 2, \ldots, n,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\mu - \sum\limits_{j=k+1}^{n} \frac{\lambda_{1j}}{2}}.$$

Заметим, что матрица Гессе имеет блочный вид

$$H = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & E_{n-1} & A_{n-1} \\ E_{n-1} & 0_{n-1} & E_{n-1} \\ A_{n-1} & E_{n-1} & 0_{n-1} \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица размерности $(n-1 \times n-1)$, 0 – нулевая матрица размерности $(n-1 \times n-1)$ и

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_2 & \ldots & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_2 + a_3 & \ldots & a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_2 + a_3 & \ldots & a_1 + \ldots + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель матрицы такого вида

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки $(n+1)$-ю строку, домноженную на a_1, затем вычтем $(n+2)$-ю строку, домноженную на a_1, и т.д., вычтем $(2n+1)$-ю строку, домноженную на a_1. Далее вычитаем из второй строки $(n+1)$-ю строку, домноженную на a_1, затем вычтем $(n+2)$-ю строку, домноженную на a_2, и т.д., вычтем $(2n+1)$-ю строку, домноженную на a_1. Продолжая далее аналогичным образом получаем определитель

$$\begin{vmatrix} -a_1 & \dots & -a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & \dots & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскладываем определитель по $(2n+1)$-му,..., $(3n)$-му столбцам и получаем

$$\begin{vmatrix} -a_1 & \dots & -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ -a_1 & \dots & -a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & \dots & -a_n & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя к первой строке $(n+1)$-ю строку, ко второй строке $(n+2)$-ю, и т.д., получаем

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 2 \\ a_1 & \dots & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2^n(-1)^{n(n+2)} \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 - a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 2^n(-1)^{n(n+2)} a_1 \prod_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j).$$

Таким образом, получаем, что определитель минора размерности $2n-1+i$, где $i = 0, \dots, n-2$ матрицы Гессе равен

$$\Delta_i = 2^i(-1)^{(i+1)(i+3)+(n+2i+3)+(5+3i)} \prod_{j=1}^{i+1} (a_j),$$

причем степень $(n+2i+3)+(5+3i)$ определяется четностью $n+i$. Тогда

$$\Delta_i = 2^i(-1)^{n+i}(-1)^{(i+1)(i+3)} \prod_{j=1}^{i-1} (a_j),$$

что означает, что последовательность миноров, начиная с $(2n-1)$-ого, окаймленной матрицы Гессе образуют знакопеременный числовой ряд, в котором знак первого члена, который соответствует $i = 0$, определяется множителем $(-1)^n$. $\square$

3.2. Несимметричный случай

В несимметричном случае равновесием будет решение следующей системы

$$c_{1s}^{(i)} = \sum_{l=0}^{s-2} \sum_{j=2+l}^{n} \lambda_{1j}^{(i)} \left(\frac{1}{(a_{l+1}^{i})^2} + \frac{1}{\sum\limits_{k=2, k\neq i}^{m} (a_{l+1}^{(k)})^2} \right), \quad s = 2, \ldots, n, \quad (3.3)$$

$$c_{1j}^{(1)} + \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(1)} - c_{1j}^{(i)} - \sum_{k=1}^{j-1} a_k^{(i)} = 0, \quad i = 2, \ldots, m, \quad j = 2, \ldots, n, \quad (3.4)$$

$$\lambda_{1s} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{1s}^{(i)}, \quad s = 2, 3, \ldots, n. \quad (3.5)$$

Вычисления для случая $m = 2$, $n = 4$ системы (3.3)-(3.5) представлены в табл. 2, 3, 4, в которых вычислены равновесные цены и представлено разбиение потоков при $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{13} = 3$, $\lambda_{14} = 4$.

Таблица 2. Значение $(c_{12}^{(1)}, c_{12}^{(2)})$ при $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{13} = 3$, $\lambda_{14} = 4$

		μ_2				
μ_1		5	6	7	8	9
6	$(c_{12}^{(1)};c_{12}^{(2)})$ $(\lambda_{12}^{(1)};\lambda_{12}^{(2)})$	(13,87;13,03) (0,988;1,02)	(4;4) (1;1)			
7	$(c_{12}^{(1)};c_{12}^{(2)})$ $(\lambda_{12}^{(1)};\lambda_{12}^{(2)})$	(9,92;8,98) (0,92;1,08)	(2,54;2,37) (0,996;1,004)	(1,44;1,44) (1;1)		
8	$(c_{12}^{(1)};c_{12}^{(2)})$ $(\lambda_{12}^{(1)};\lambda_{12}^{(2)})$	(8,34;7,36) (0,86;1,14)	(1,95;1,71) (0,98;1,02)	(1,08;1) (0.999;1,001)	(0,735;0,735) (1;1)	
9	$(c_{12}^{(1)};c_{12}^{(2)})$ $(\lambda_{12}^{(1)};\lambda_{12}^{(2)})$	(7,499;6,51) (0,8;1,2)	(1,63;1,37) (0,96;1,04)	(0,88;0,77) (0.99;1,01)	(0,596;0,55) (0,999;1,001)	(0,44;0,44) (1;1)

Из результатов моделирования, представленных в таблицах, мы видим, что с увеличением расстояния цены на билеты увеличиваются, но не линейным образом. Кроме того, увеличение интенсивности обслуживания ведет к удешевлению стоимости проезда. Также заметим, что если интенсивность обслуживания одной из компаний больше, чем у другой, то на коротких дистанциях посетители предпочтут пользоваться услугами той компании, где цена на обслуживание дешевле, а на более длинных дистанциях той компанией, у которой больше интенсивность обслуживания. В практических задачах матрицу интенсивностей Λ можно найти, используя статистические методы (см. [1]).

Таблица 3. Значение $(c_{13}^{(1)}, c_{13}^{(2)})$ при $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{13} = 3$, $\lambda_{14} = 4$

		μ_2				
μ_1		5	6	7	8	9
6	$(c_{13}^{(1)};c_{13}^{(2)})$	(15,87;14,86)	(5,12;5,12)			
	$(\lambda_{13}^{(1)};\lambda_{13}^{(2)})$	(1,496;1,504)	(1,5;1,5)			
7	$(c_{13}^{(1)};c_{13}^{(2)})$	(11,46;10,28)	(3,39;3,14)	(2,01;2,01)		
	$(\lambda_{13}^{(1)};\lambda_{13}^{(2)})$	(1,48;1,52)	(1,498;1,504)	(1,5;1,5)		
8	$(c_{13}^{(1)};c_{13}^{(2)})$	(9,64;8,39)	(2,65;2,29)	(1,54;1,43)	(1,08;1,08)	
	$(\lambda_{13}^{(1)};\lambda_{13}^{(2)})$	(1,45;1,55)	(1,49;1,51)	(1.499;1,501)	(1,5;1,5)	
9	$(c_{13}^{(1)};c_{13}^{(2)})$	(8,65;7,37)	(2,24;1,82)	(1,29;1,1)	(0,89;0,82)	(0,676;0,676)
	$(\lambda_{13}^{(1)};\lambda_{13}^{(2)})$	(1,42;1,58)	(1,48;1,52)	(1.496;1,504)	(1,4996;1,5004)	(1,5;1,5)

Таблица 4. Значение $(c_{14}^{(1)}, c_{14}^{(2)})$ при $\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{13} = 3$, $\lambda_{14} = 4$

		μ_2				
μ_1		5	6	7	8	9
6	$(c_{14}^{(1)};c_{14}^{(2)})$	(16,23;15,17)	(5,37;5,37)			
	$(\lambda_{14}^{(1)};\lambda_{14}^{(2)})$	(2,16;1,84)	(2;2)			
7	$(c_{14}^{(1)};c_{14}^{(2)})$	(11,78;10,51)	(3,6;3,32)	(2,17;2,17)		
	$(\lambda_{14}^{(1)};\lambda_{14}^{(2)})$	(2,32;1,68)	(2,17;1,83)	(2;2)		
8	$(c_{14}^{(1)};c_{14}^{(2)})$	(9,92;8,57)	(2,85;2,43)	(1,69;1,55)	(1,19;1,19)	
	$(\lambda_{14}^{(1)};\lambda_{14}^{(2)})$	(2,47;1,53)	(2,33;1,67)	(2.17;1,83)	(2;2)	
9	$(c_{14}^{(1)};c_{14}^{(2)})$	(8,91;7,51)	(2,42;1,94)	(1,42;1,2)	(0,996;0,911)	(0,76;0,76)
	$(\lambda_{14}^{(1)};\lambda_{14}^{(2)})$	(2,599;1,401)	(2,48;1,52)	(2.33;1,67)	(2,17;1,83)	(2;2)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буре В.М., Мазалов В.В., Плаксина Н.В. *Вычисление характеристик пассажиропотоков в транспортных системах* // Управление большими системами. 2014. Вып. 47. С. 77–91.

2. Мазалова А.В. *Дуополия в системе обслуживания с очередями* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 4. С. 32–41.

3. Хемди А. Таха *Введение в исследование операций.* Издательский дом «Вильямс», 2005.

4. Altman E., Shimkin N. *Individual equilibrium and learning in processor sharing systems* // Operations Research. 1998. V. 46. N 6. P. 776–784.

5. Hassin R., Haviv M. *To queue or not to queue. Equilibrium behavior in queueing systems.* Springer, 2003.

6. Levhari D., Luski I. *Duopoly pricing and waiting lines* // European Economic Review. 1978. N 11. P. 17–35.

7. Luski I. *On partial equilibrium in a queueing system with two services* // The Review of Economic Studies. 1976. V. 43. N 3. P. 519–525.

EQUILIBRIUM IN TRANSPORTATION GAME

Anna V. Melnik, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (a.mazalova@spbu.ru).

Abstract: A non-cooperative m-person transportation game which is related to the queueing system $M/M/m$ on graph is considered. There are m services (transport companies) which serve the stream of customers with exponential distribution with parameters μ_i $i = 1, 2, \ldots, m$. The stream forms the Poisson process with matrix of intensities Λ. The solution of the problem of pricing and determining the optimal intensity for each firm in the competition is derived.

Keywords: queueing system, graph of routs, price for route, equilibrium prices.