Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.1, с. 73–90

УДК 519.83+519.86
ББК 22.18

МОДЕЛИ БОРЬБЫ С АДМИНИСТРАТИВНОЙ КОРРУПЦИЕЙ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Геннадий А. Угольницкий
Анатолий Б. Усов *
Южный федеральный университет
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8А
e-mail: ougoln@mail.ru, usov@math.rsu.ru

В статье строится система динамических моделей административной коррупции. Базовой схемой математического моделирования коррупции служит иерархическая система «принципал - супервайзер - агент». Приведены одноуровневая, двухуровневая и трехуровневая модели оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции. Предложены алгоритмы построения равновесий указанных игр, апробированные на числовых примерах.

Ключевые слова: динамические игры, иерархические системы, игры Гермейера, коррупция, устойчивое развитие.

1. Введение

Исследование коррупции математическими методами началось с работы Rose-Ackerman [19]. В основном исследование проводится в статическом случае [7,12,13,17]. Количество публикаций по динамическим моделям коррупции в иерархических системах управления

* Работа поддержана РФФИ, проект №12-01-00017

не слишком велико. Обычно такие модели являются многошаговыми теоретико-игровыми, в которых динамика управляемой системы явно не описывается. Среди работ такого рода отметим [14,16,18,20].

Базовой схемой математического моделирования коррупции сегодня служит иерархическая система «принципал-супервайзер-агент». В [18] рассматривается двухшаговая модель этого типа, в которой принципал использует нелегальный характер сделок супервайзера и агента и может за счет этого в долгосрочном периоде получить больший выигрыш, чем в краткосрочном. Анализ коррупции, проведенный в [20], показал, что некоторые институциональные особенности китайской системы лицензирования делают коррупцию структурно устойчивым исходом. Анализ сравнительной статики также показал, что некоторые антикоррупционные меры могут иметь контринтуитивные последствия. В качестве адекватной меры борьбы с коррупцией предлагается введение конкуренции среди лицензирующих органов. Настоящая статья является логическим продолжением работ [2,6,9], где рассмотрены статические модели борьбы с коррупцией, и посвящена динамическим моделям административной коррупции. В рамках авторской концепции описание коррупции и методов борьбы с ней в динамике основывается на следующих положениях.

1. Базовой схемой моделирования служит иерархическая система «принципал - супервайзер - агент - объект» в различных модификациях и ее исследование средствами теории оптимального управления и теории динамических игр. Коррупции подвержен средний уровень управления (супервайзер), верхний уровень управления (принципал) считается не подверженным коррупции и выполняет функции борьбы с ней. В ряде случаев принципал может учитываться в модели неявно через назначаемые им параметры управления.

2. Как ведущий игрок (принципал или супервайзер), так и ведомый игрок (супервайзер или агент соответственно) для достижения своих целей используют методы принуждения (преимущественно административно-законодательные воздействия) и побуждения (преимущественно экономические воздействия); при математической формализации принуждение означает воздействие ведущего на множество допустимых стратегий ведомого (как правило, без обратной связи), а побуждение - на функцию выигрыша ведомого с обратной свя-

зью [8].

3. В случае административной коррупции за взятку ослабляются административные требования. При моделировании административная коррупция означает принуждение с возникающей обратной связью по величине взятки.

4. Исследование коррупции в системе «принципал - супервайзер - агент - объект» возможно с трех позиций. Если функция взяточничества, то есть зависимость переменных управления от взятки, известна, то с позиции агента коррупция может быть описана моделью оптимального управления. С позиции супервайзера возникает иерархическая параметрическая игра Ю.Б. Гермейера вида Γ_{2t} [4]. С позиции принципала задача борьбы с коррупцией заключается в нахождении таких значений параметров управления, при которых найденная оптимальная стратегия супервайзера удовлетворяет требованиям устойчивого развития для управляемой динамической системы (объекта).

5. Целесообразно строить ряды последовательно усложняемых моделей, все более точно описывающих реальные феномены коррупции в иерархических системах управления. Основная логическая схема такого усложнения имеет вид «модели оптимального управления - динамические иерархические игры двух лиц – динамические иерархические игры трех лиц».

Последний принцип определяет структуру настоящей статьи.

2. Система динамических моделей административной коррупции

Рассмотрим ряд моделей административной коррупции. Для удобства интерпретации и без существенного ограничения общности будем говорить о задачах оптимальной эксплуатации биоресурсов [1]. В этом случае уравнение динамики управляемой системы с начальными условиями можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = h(x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \tag{2.1}$$

Здесь $x(t)$ – биомасса эксплуатируемой (например, рыбной) популяции; $u(t)$ – доля вылова (в момент t); h – некоторая функция динамики численности однородной популяции (например, Мальтуса, Ферхюльста-Пирла, Риккера и т.д.); x_0 – значение биомассы в начальный момент времени. В качестве примера функции $h(x(t))$ рассмотрим линейную функцию Мальтуса, т.е. $h(x(t)) = \varepsilon x(t)$; $\varepsilon = const$ – коэффициент естественного прироста популяции.

Общий доход от рыболовства равен $au(t)x(t)$, где a – цена единицы биомассы, доля вылова $u(t)$ ограничена сверху назначаемой государством квотой s_0 (параметр управления неявно учитываемого принципала). За взятку супервайзер увеличивает величину квоты на вылов от значения s_0 до $s_0 + s(b(t))$. Функция взяточничества $s(t) = s(b(t))$ характеризует увеличение квоты супервайзера за взятку. В обмен на увеличение квоты агент выделяет долю $b(t)$ возникающего дополнительного дохода на взятку супервайзеру. Таким образом, целевой функционал агента можно записать в виде

$$J_A(s(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) =$$

$$= \int_0^T (au(t) - cu^2(t) - \max(0, b(t)(u(t) - s_0)))x(t)dt \to \max. \quad (2.2)$$

Здесь $cu^2(t)$ – затраты агента на вылов доли биомассы $u(t)$ (квадратичный вид функции выбран преимущественно из соображений удобства аналитического исследования) [15]; T – период рассмотрения; $\max(0, b(t)(u(t) - s_0))x(t)$ – плата («откат») за «сверхквотный» вылов. Функционал (2.2) рассматривается при следующих ограничениях на управления

$$0 \le b(t) \le 1; \quad 0 \le u(t) \le s_0 + s(b(t)), \quad (2.3)$$

т.е. используются ограничения со связанными переменными.

При административной коррупции квота на долю вылова представляет собой функцию доли взятки. Если рассмотрение ведется с позиции агента, то эта функция считается заданной. Например, можно использовать нелинейную функцию попустительства вида [10]

$$s(b(t)) = (1 - s_0)b^k(t); \quad k = const, \quad (2.4)$$

где $s(0) = 0$; $s(1) = 1 - s_0$.

Подставляя значение (2.4) в (2.3), получаем

$$0 \le u(t) \le s_0 + (1 - s_0)b^k(t). \quad (2.5)$$

Таким образом, получаем задачу оптимального управления со связанными ограничениями (2.1)–(2.5). Конечно, наряду с (2.4) можно использовать и другие функции административной коррупции. Большой интерес представляет идентификация функции $s(b)$ на основе фактических данных о коррупции. Вместе с тем, не лишено смысла и теоретическое исследование различных классов функций $s(b)$.

Если рассмотрение ведется с позиции супервайзера, то функция $\tilde{s}(t) = s(b(t))$ ищется как решение игры типа Γ_{2t} между супервайзером и агентом [4]. Целевой функционал супервайзера можно записать в виде

$$J_S(q(\cdot), s(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) =$$

$$= \int_0^T (\max(0, b(t)(u(t) - s_0))x(t) - K\mu s(t))dt \to \max . \qquad (2.6)$$

Он рассматривается с ограничениями на управления

$$0 \leq s(t) \leq q(t). \qquad (2.7)$$

Второе слагаемое в подынтегральной функции (2.6) представляет собой штраф, налагаемый на супервайзера при обнаружении «сверхквотного» вылова; K – коэффициент штрафа; μ – вероятность поимки; $q(t)$ – контроль сверху величины $s(t)$ со стороны принципала. Значения K и μ характеризуют возможности принципала по борьбе с коррупцией (т.е. обеспечению условия $s(t) = s_0$) путем принуждения (административного воздействия на область допустимых управлений супервайзера). В целом, соотношения (2.1)–(2.3), (2.5)–(2.7) определяют дифференциальную иерархическую игру двух лиц вида Γ_{2t}.

Наконец, целевой функционал принципала можно записать как

$$J_P(q(\cdot), s(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T (C(q(t)) + M(x(t) - \bar{x})^2)dt \to \min . \quad (2.8)$$

Здесь $\bar{x}$ – значение биомассы, оптимальное для устойчивого состояния популяции; M – постоянная штрафа, налагаемого на принципала при отклонении текущего значения биомассы от оптимального (квадратичный вид функции штрафа призван минимизировать отклонения от оптимального значения в любую сторону); $C(q(t))$ – выпуклая убывающая функция затрат на контроль; $C(0) = \infty$;

$C(1-s_0)=0$. В качестве функции $C(q(t))$ можно взять, например, функцию $C(q(t))=C_1(1-s_0-q)/q$.

Предполагается, что принципал использует метод принуждения, то есть ограничивает область допустимых управлений супервайзера посредством управляющей переменной

$$0 \le q(t) \le 1-s_0. \tag{2.9}$$

Первое слагаемое в подынтегральной функции в выражении (2.8) означает затраты принципала на контроль; второе – штраф, налагаемый на него при нарушении требований устойчивого развития.

В целом соотношения (2.1)–(2.3), (2.5)–(2.9) определяют дифференциальную иерархическую игру трех лиц. Ее регламент зависит от используемых принципалом методов управления. Если принципал использует принуждение [8], то игра между принципалом и супервайзером есть Γ_{1t} или Γ_{2t} в зависимости от того, считается ли функция $q(t)$ зависящей только от времени или также от управления супервайзера. Игра между супервайзером и агентом всегда имеет вид Γ_{2t} [4], поскольку при описании коррупции принципиально наличие обратной связи по величине взятки.

Непосредственное взаимодействие принципала и агента не рассматривается.

Итак, на примере эксплуатации биоресурсов определена последовательность динамических моделей административной коррупции вида «задача оптимального управления – динамическая иерархическая игра двух лиц – динамическая иерархическая игра трех лиц». Ниже опишем алгоритмы их исследования. При этом предполагается, что в системе используется только принуждение.

3. Одноуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции

Рассмотрим модель административной коррупции, описываемую соотношениями (2.1)–(2.5). Функционал (2.1) описывает прибыль, например, рыболовецкого предприятия, которое может выступать в качестве взяткодателя. Из полученного дохода предприятие платит налоги, а также, возможно, дает взятку чиновнику службы рыбного хозяйства. Размер квоты на вылов определяется величиной взятки:

чем она больше, тем больше фактически назначаемая квота. Если величина взятки равна нулю (отсутствует), то квота назначается в соответствии с определенным законом значением. Очевидно, что размер квотных послаблений за взятку должен компенсировать расходы, связанные с дачей взятки, иначе коррупционная сделка будет невыгодной для рыболовецкого предприятия. Получаем задачу оптимального управления со связанными ограничениями, которую разобьем на две, в зависимости от ограничений на управления. Первая рассматривается в случае

$$b(t) = 0; \quad 0 \le u(t) \le s_0, \tag{3.1}$$

вторая – при

$$0 < b(t) \le 1; \quad s_0 < u(t) \le s_0 + s(b(t)). \tag{3.2}$$

Обе задачи решаются с использованием принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона для первой задачи имеет вид

$$H(u(t), y(t), x(t)) = au(t)x(t) - cu^2(t)x(t) + y(t)x(t)(\varepsilon - u(t)),$$

где x – переменная состояния; u – управления; y – сопряженная переменная (как функции времени). Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial u} = ax(t) - 2cu(t)x(t) - y(t)x(t) = 0.$$

Таким образом, внутри области (3.1) точка, «подозрительная» на максимум, имеет вид

$$u^0(t) = \frac{a - y(t)}{2c}, \tag{3.3}$$

где

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dy}{dt} = -au(t) + cu^2(t) + (u(t) - \varepsilon)y(t); \quad y(T) = 0. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) в (3.4) и решая дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получаем

$$T - t = \int_0^T \frac{dy}{B + Ey + 0.25y^2/c} =$$

$$= \begin{cases} 2/D\ arctg(y/(2c)+E)/D|_0^y, & E^2 < B/c, \\ 1/D\ \ln(y/(2c)+E-D)/(y/(2c)+E+D)|_0^y, & E^2 > B/c, \\ -1/(Dy+2cDE)|_0^y, & E^2 = B/c, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$B = \frac{a^2}{2c}(a-0.5); E = \varepsilon - \frac{a^2}{2c}; D = \sqrt{|B/c - E^2|}.$$

Отсюда

$$y(t) = \begin{cases} 0.5c(D\ tg(0.5D(T-t) + arctg(E/D)) - E), E^2 < B/c, \\ 0.5c(2D(E+D)/(E-D)\exp -D(T-t) - E - D), E^2 > B/c, \\ 4cE^2(T-t)(2 - TE + Et), E^2 = B/c. \end{cases} \quad (3.6)$$

Вторая производная функции Гамильтона

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}|_{(u^0(t),b^0(t))} = -cx(t)$$

в этом случае меньше нуля. Следовательно, оптимальная доля вылова в любой момент времени определяется по формуле

$$u^*(t) = \begin{cases} u^0(t), & 0 \le u^0(t) \le s_0, \\ s_0, & s_0 \le u^0(t), \\ 0, & u^0(t) \le 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

В случае (3.2) функция Гамильтона имеет вид

$$H(u(t), b(t), y(t), x(t)) =$$

$$= au(t)x(t) - cu^2(t)x(t) - b(t)x(t)(u(t) - s_0) + y(t)x(t)(\varepsilon - u(t)).$$

Решим уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -(u(t) - s_0) = 0.$$

В этом случае максимум может достигаться только на границе области допустимых управлений. Исследование границ $b(t) = 0$ и $u(t) = s_0$ было проведено ранее при исследовании первой задачи.

В случае $b(t) = 1$ функция Гамильтона имеет вид

$$H(u(t), y(t), x(t)) = au(t)x(t) - cu^2(t)x(t) - (u(t) - s_0)x(t) + y(t)x(t)(\varepsilon - u(t)).$$

Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial u} = ax(t) - 2cu(t)x(t) - x(t) - y(t)x(t) = 0,$$

т.е. внутри области (3.2) точка, «подозрительная» на максимум, имеет вид

$$u^{(1)}(t) = \frac{a - 1 - y(t)}{2c}; \qquad (3.8)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dy}{dt} = -au(t)+cu^2(t)+u(t)-s_0+(u(t)-\varepsilon)y(t); \;\; y(T) = 0. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.7) в (3.8), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, решение которого задается формулой (3.5), в случае

$$B = s_0 - \frac{a^2}{4c} - \frac{a^2}{2c}(a-1); E = \varepsilon - \frac{a}{2c} + \frac{1}{2c}.$$

Матрица Гессе на найденном решении отрицательно определена. Следовательно, оптимальные стратегии субъектов управления в любой момент времени в этом случае определяются с учетом (3.7), (3.8) по формуле

$$(u^*(t), b^*(t)) = \begin{cases} (u^{(1)}(t), 1), & s_0 \le u^{(1)}(t) \le 1 - s_0, \\ (s_0, 1), & u^{(1)}(t) < s_0, \\ (1 - s_0, 1), & 1 - s_0 \; < \; u^{(1)}(t). \end{cases} \qquad (3.10)$$

На границе $u(t) = (1 - s_0)b^k(t)$ функция Гамильтона имеет вид

$$H(u(t), b(t), y(t), x(t)) = au(t)b^k(t)(1 - s_0)x(t) - cb^{2k}(t)(1 - s_0)^2x(t) -$$

$$-b^{k+1}(t)(1 - s_0)x(t) + b(t)s_0x(t) + y(t)x(t)(\varepsilon - u(t)).$$

Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial b} = kb^{k-1}(t)a(1 - s_0) - 2kb^{2k-1}(t)c(1 - s_0)^2 -$$

$$-(k + 1)b^k(t)(1 - s_0) + s_0 - y(t)kb^{k-1}(t)(1 - s_0) = 0.$$

В результате для определения стационарных точек в этом случае получим уравнение

$$kb^{k-1}(t)(a - y(t))(1 - s_0) - 2kb^{2k-1}(t)c(1 - s_0)^2 -$$

$$-(k+1)b^k(t)(1-s_0)+s_0=0, \qquad (3.11)$$

которое решается численно, например, методом Ньютона [3].

Таким образом, оптимальной является одна из пар точек: (3.6), (3.9) или решение (3.10). Подставляя найденное решение в (2.2), получим оптимальный выигрыш агента.

4. Двухуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции

Рассмотрим модель административной коррупции, описываемую соотношениями (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7). В отличие от случая экономической коррупции, при моделировании административной коррупции для агента решается задача со связанными ограничениями. Определим множества допустимых управлений супервайзера и агента при заданной функции $q(t)$:

$$S(q)=\{0\le s(t)\le q(t)\};\quad U(s(t))=\{0\le u(t)\le s_0+s(t)\};$$

$$B=\{0\le b(t)\le 1\};\ 0\le t\le T;$$

множества, связанные с информационной структурой задачи

$$\tilde{S}=\{\tilde{s}=s(u,b):U\times B\to S\};\quad \tilde{\tilde{U}}=\{\tilde{\tilde{u}}=u(\tilde{s}):\tilde{S}\to U\}$$

и проекцию [5] $\pi:\tilde{S}\times\tilde{\tilde{U}}\times B\times X\to S\times U\times B\times X$.

Предлагается алгоритм построения равновесия, основанный на идее работы [5].

1. Вычислим максимальный гарантированный выигрыш агента при использовании супервайзером стратегии наказания:

$$L_A=\sup_{(\tilde{\tilde{u}},b)\in\tilde{\tilde{U}}\times B}\ \inf_{\tilde{s}\in\tilde{S}} J_A(\pi(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b,x)).$$

При вычислении величины L_A решается задача оптимального управления со связанными ограничениями, отражающая специфику административной коррупции. Функции, реализующие величину L_A, обозначим через $s^P(t),u^P(t),b^P(t)$, где $s^P(t)$ – стратегия наказания агента супервайзером.

2. Определим множество

$$D_A=\{(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b,x):J_A(\pi(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b,x))\ge L_A\}.$$

3. Вычислим максимальный гарантированный выигрыш супервайзера при учете интересов агента:

$$L_S = \sup_{(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b)\in D_A} J_A(\pi(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b,x))$$

и тем самым его оптимальные стратегии

$$(s^*,u^*,b^*) \in arg \sup_{(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b)\in D_A} J_S(\pi(\tilde{s},\tilde{\tilde{u}},b,x)).$$

Реализация этого алгоритма возможна в случае $D_A \neq \oslash$.

Стратегия наказания агента супервайзером (пункт 1 алгоритма) состоит в выборе $s^P(t) = 0$ (увеличения квоты не наблюдается). В этом случае взятка агентом не предлагается ($b^P(t) = 0$), а для определения оптимальной доли вылова (функции $u^P = u^P(t)$) возникает задача оптимального управления, исследованная для одноуровневой модели в случае (3.1). Решение имеет вид (3.6), причем

$$L_A = \int_0^T (au^P(t) - c(u^P)^2)x^P(t)dt,$$

где

$$\frac{dx^P}{dt} = (\varepsilon - u^P(t))x(t), \quad x^P(0) = x_0.$$

Функция $u^P = u^P(t)$ определяется по формуле (3.6). Задача, сформулированная в пункте 3 алгоритма, решается численно (см. раздел 6).

5. Трехуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции

Рассмотрим модель административной коррупции, описываемую соотношениями (2.1)–(2.3), (2.6)–(2.9). Взаимоотношения внутри такой иерархической системы устроены следующим образом: субъект управления верхнего уровня (принципал) воздействует на субъект управления среднего уровня (супервайзера), тот, в свою очередь, на субъект нижнего уровня (агента). Агент меняет состояние системы, преследуя свои частные цели. Эти цели, вообще говоря, не совпадают с объективно существующими целями устойчивого развития всей системы, которая является пассивным объектом.

Для поддержания системы в устойчивом состоянии нужен принципал, который, влияя на остальных субъектов управления, способен обеспечить выполнение условий, гарантирующих устойчивое развитие всей системы. Считается, что в системе используется метод принуждения, т.е. принципал и супервайзер воздействуют на целевые функционалы супервайзера и агента соответственно. Предполагается, что принята следующая совокупность правил относительно поведения и информированности различных субъектов управления:

1) главной задачей принципала является выполнение условий устойчивого развития системы. Он стремится к оптимизации частного функционала, который выражает получаемый им доход. Принципал объявляет свою стратегию первым (делает ход первым), когда стратегии остальных субъектов управления еще не известны. Принципал, сделав свой ход, не знает ответных ходов супервайзера и агента;

2) все субъекты управления знают свои целевые функционалы и функционалы остальных субъектов;

3) супервайзер стремится к оптимизации своего частного целевого функционала. Он выбирает свою стратегию поведения вторым, когда выбор принципала уже известен, а агент еще не сделал свой ход (делает свой ход вторым). Сделав свой ход, супервай0ор не знает ответного хода агента;

4) принципал воздействует на область допустимых управлений супервайзера, тот, в свою очередь, на область допустимых управлений агента. Таким образом, в системе реализуется метод принуждения;

5) агент выбирает свою стратегию последним, когда выбор вышестоящих субъектов известен. Он стремится к достижению своих целей;

6) допускается возможность коррупции в системе. Агент может предлагать супервайзеру взятку, в обмен на которую супервайзер ослабляет свое управляющее воздействие на него (в этом основной смысл административной коррупции);

7) принципал контролирует наличие взяток в системе и наказывает за их дачу. Определим множества, связанные с информационной структурой задачи в этом случае:

$$\tilde{Q} = \{\tilde{q} = q(s) : S \to Q\}; \quad \tilde{\tilde{S}} = \{\tilde{\tilde{s}} = s(\tilde{q}, u, b) : \tilde{Q} \times U \times B \to S\};$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{U}}} = \{\tilde{\tilde{\tilde{u}}} = u(\tilde{\tilde{s}}) : \tilde{\tilde{S}} \to U\},$$

и проекцию [5] $\pi_1 : Q \times \tilde{S} \times \tilde{\tilde{U}} \times B \times X \to Q \times S \times U \times B \times X$.

Предлагается алгоритм построения равновесия, который опирается на предложенную в [5] процедуру.

1. Вычислим максимальный гарантированный выигрыш агента при использовании принципалом и супервайзером стратегий наказания:

$$L_A = \sup_{(\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b)\in\tilde{\tilde{\tilde{U}}}xB} \inf_{\tilde{q}\in Q} \inf_{\tilde{\tilde{s}}\in\tilde{\tilde{S}}} J_A(\pi_1(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)).$$

При вычислении величины L_A , как и в предыдущем пункте, решается задача со связанными ограничениями, отражающая специфику административной коррупции. Функции, реализующие величину L_A , обозначим через $s^P(t), q^P(t), u^P(t), b^P(t)$.

2. Определим множество

$$D_A = \{(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b) : J_A(\pi_1(q^P,\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)) \geq L_A\},$$

где q^P - стратегия наказания супервайзера принципалом, т.е.

$$J_S(\pi_1(q^P,\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)) = \min_{\tilde{q}\in Q} J_S(\pi_1(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)).$$

3. Вычислим максимальный гарантированный выигрыш супервайзера при учете интересов агента и использовании принципалом стратегии наказания:

$$L_S = \sup_{(\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b)\in D_A} J_S(\pi_1(\tilde{q}^P,\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)).$$

4. Введем множество

$$D_S^* = \{(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b) : J_S(\pi(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b)) \geq L_S \ ; \ J_A(\pi_1(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)) \geq L_A\}$$

учета интересов супервайзера и принципала при выполнении требований устойчивого развития в условиях экономической коррупции.

5. Тогда гарантированный выигрыш принципала равен

$$\gamma_p = \sup_{(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b)\in D_S^*} J_p(\pi(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{\tilde{u}}},b,x)),$$

откуда получаем стратегии в равновесии системы

$$(q^*, s^*, u^*, b^*) = arg \sup_{(\tilde{q},\tilde{\tilde{s}},\tilde{\tilde{u}},b)\in D_S^*} J_p(\pi(\tilde{q}, \tilde{\tilde{s}}, \tilde{\tilde{\tilde{u}}}, b, x)).$$

Реализация этого алгоритма возможна при условиях

$$D_A \neq \varnothing; D_S^* \neq \varnothing.$$

Целевой функционал агента не зависит от управлений принципала, поэтому величина L_A (пункт 1 алгоритма) определяется по формулам предыдущего раздела. Задачи из пунктов 3–5 алгоритма решаются численно. Примеры численных расчетов приведены в следующем разделе.

6. Примеры расчетов

Решение задачи оптимального управления в одноуровневом случае получается путем перебора точек (3.6), (3.9) и решения уравнений (3.10). Уравнение (3.10) решается методом Ньютона. В качестве начального приближения берется $b(t) = 0$. Равновесия двух- и трехуровневых моделей в общем случае строятся численно после их дискретизации по времени методом прямого упорядоченного перебора областей допустимых управлений по аналогии с [9].

Пример 1 (Одноуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции). В случае $\varepsilon = 1/(720$ сут$)$; $a = 1$ у.е./кг; $k = 0.5$; $s_0 = 0.6$; $c = 2$ у.е./кг; $x_0 = 1000$ кг; $T = 360$ сут (у.е. – условные единицы; сут. – сутки) получим, что выигрыш агента равен $J_A = 12355$ у.е.

При увеличении законодательно установленной квоты на вылов или увеличении коэффициента прироста популяции выигрыш агента растет. Так, при $s_0 = 0.8$ – $J_A = 21087$ у.е.; при $\varepsilon = 0.9/(720$ сут$)$ – $J_A = 19502$ у.е. С ростом показателя степени k , определяющего вид функции взятки, или затрат на вылов единицы биомассы, выигрыш агента уменьшается при $k = 2$ – $J_A = 5402$ у.е.; при $c = 3$ у.е./кг – $J_A = 7360$ у.е.

Пример 2 (Двухуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции). В случае $\varepsilon =$

$=1/(720$ сут); $a = 1$ у.е./кг; $k = 0.5$; $s_0 = 0.3$; $c = 2$ у.е./кг; $x_0 = 1000$ кг; $T = 360$ сут; $K = 100$ у.е.; $\mu = 0.1$ для агента в рамках предложенной модели становится невыгодным продолжать свою деятельность, его управления равны нулю. Выигрыш всех субъектов равен нулю. Дальнейшие примеры описывают случай уменьшения затрат на вылов ($c = 0.2$ у.е./кг). Тогда заниматься выловом в условиях коррупции становится выгодно, выигрыши субъектов соответственно равны $L_A = 326$ у.е.; $J_A = 365$ у.е.; $J_S = 693$ у.е. При увеличении законодательно установленной квоты на вылов ($s_0 = 0.9$) выигрыш агента растет, супервайзера уменьшается, коррупции в системе нет ($L_A = 1134$ у.е.; $J_A = 1151$ у.е.; $J_S = 340$ у.е.). При увеличении коэффициента прироста популяции ($\varepsilon = 1/(1440$ сут)) или уменьшении вероятности обнаружения факта взятки выигрыш обоих субъектов в условиях коррупции растет – $L_A = 485$ у.е.; $J_A = 526$ у.е. ; $J_S = 798$ у.е. и $L_A = 536$ у.е.; $J_A = 2765$ у.е. ; $J_S = 875$ у.е. соответственно.

Пример 3. Трехуровневая модель оптимальной эксплуатации биоресурсов с учетом административной коррупции. В случае $\varepsilon = 1/(720$ сут); $a = 1$ у.е./кг; $k = 0.5$; $s_0 = 0.6$; $C = 2$ у.е./кг; $x_0 = 1000$ кг; $T = 360$ сут; $K = 100$ у.е.; $M = 0.004$ у.е./кг; $\mu = 0.1$ агент и принципал в условиях коррупции имеют выигрыш, супервайзер терпит убытки и $L_A = 336$ у.е.; $L_S = -143$ у.е.; $J_A = 345$ у.е.; $J_S = -102$ у.е.; $J_P = 290$ у.е. В случае уменьшения наказания супервайзера за отклонение от законодательно установленной налоговой ставки ($K = 50$ у.е.) выигрыши агента и супервайзера в условиях коррупции растут, выигрыш принципала уменьшается ($L_A = 236$ у.е.; $L_S = 37$ у.е.; $J_A = 281$ у.е.; $J_S = 41$ у.е.; $J_P = 221$ у.е.). При уменьшении расходов на вылов ($C = 0.1$ у.е./кг) или увеличении законодательно установленной квоты на вылов ($s_0 = 0.8$) выигрыш агента растет, супервайзера и принципала падает ($L_A = 1180$ у.е.; $L_S = -38$ у.е.; $J_A = 1198$ у.е.; $J_S = -20$ у.е. ; $J_P = -711$ у.е.). При уменьшении значения биомассы, оптимального для устойчивого состояния популяции ($x_0 = 1050$ кг), наоборот, выигрыш агента уменьшается, супервайзера и принципала растет ($L_A = 236$ у.е.; $L_S = 37$ у.е.; $J_A = 241$ у.е. ; $J_S = 43$ у.е.; $J_P = 329$ у.е.).

Таким образом, в рамках предложенных моделей проведенное исследование показало, что успешная борьба с административной коррупцией возможна путем увеличения законодательно установленной квоты на вылов или усиления контроля супервайзера.

7. Заключение

В статье предложены общие принципы построения динамических моделей борьбы с административной коррупцией. В отличие от моделей экономической коррупции, в случае административной коррупции за взятку ослабляются административные требования. При моделировании административная коррупция означает принуждение с обратной связью по величине взятки, при этом возникают задачи оптимального управления со связанными ограничениями. Построен ряд динамических моделей административной коррупции вида «задача оптимального управления - динамическая иерархическая игра двух лиц - динамическая иерархическая игра трех лиц» в приложении к задаче об оптимальной эксплуатации биоресурсов. Рассмотрение основано на авторской концепции иерархически управляемых динамических систем и понятии равновесия принуждения с учетом требований устойчивого развития, в том числе в условиях коррупции [11]. Предложены алгоритмы нахождения этих равновесий на основе результатов [4,5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абакумов А.И. *Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций.* Владивосток: Дальнаука, 1993.

2. Антоненко А.В., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Статические модели борьбы с коррупцией в иерархических системах управления* // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 4. С. 164–176.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы.* М.: Наука, 1987.

4. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. *Анализ конфликтных ситуаций в системах управления.* М.: Радио и связь, 1991.

5. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. *Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах.* М.: Радио и связь, 1982.

6. Денин К.И., Угольницкий Г.А. *Теоретико-игровая модель коррупции в системах иерархического управления* // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 1. С. 192–198.

7. Левин М.И., Цирик М.Л. *Коррупция как объект математического моделирования* // Экономика и матем. методы. 1998. Т. 34. № 3. С. 40–62.

8. Угольницкий Г.А. *Иерархическое управление устойчивым развитием.* М.: Изд-во физико-математической литературы, 2010.

9. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Управление устойчивым развитием иерархических систем в условиях коррупции* // Проблемы управления. 2010. № 6. С.19–26.

10. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Статические модели борьбы с коррупцией в системах контроля качества водных ресурсов* // Проблемы управления. 2012. № 4. С.38–44.

11. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. *Динамические иерархические игры двух лиц в программных стратегиях и их приложения* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 2. С. 82–104.

12. Bac M. *Corruption and supervision costs in hierarchies* // Journal of Comparative Economics. 1996. V .24. № 2. P. 99–118.

13. Bag P.K. *Controlling corruption in hierarchies* // Journal of Comparative Economics. 1997. V. 25. № 3. P. 322–344.

14. Basu K., Bhattacharya S., Mishra A.*Notes on bribery and the control of corruption* // Journal of Public Economics. 1992. № 48. P. 349–359.

15. Dockner E., Jorgensen S., Van Long N., Sorger G. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000. 382 p.

16. Lambert-Mogiliansky A., Majumdar M., Radner R. *Strategic analysis of petty corruption: Entrepreneurs and bureaucrats* // Journal of Development Economics. 2007. № 83. P. 351–367.

17. Mishra A. *Hierarchies, incentives and collusion in a model of enforcement* // Journal of Economic Behavior and Organization. 2002. V. 47 P. 165–178.

18. Olsen T. E., Torsvik G. *Collusion and Renegotiations in Hierarchies: A Case of Beneficial Corruption* // International Economic Review. 1998. Vol. 39. № 2. P. 143–157.

19. Rose-Ackerman S. *The Economics of Corruption* // Journal of Public Economics. 1975. № 4. P. 187–203.

20. Yang D. *Corruption by monopoly: Bribery in Chinese enterprize licensing as a repeated bargaining game* // China Economic Review. 2005. № 16. P. 171–188.

THE DYNAMIC HIERARCHICAL GAMES OF TWO PLAYERS IN PROGRAMMING STRATEGIES AND THEIR EXHIBITS

Gennady A. Ougolnitskiy, Federal State University, Dr.Sc., prof. (ougoln@mail.ru),
Anatoly B. Usov, Federal State University, Dr.Sc., prof. (usov@math.rsu.ru).

Abstract: The private classes of the differential hierarchical games of two players in programming strategies are considered in this article. Their interpretation is given as models to corruptions and controls of the sustainable development in hierarchical systems. The optimum principles for these classes of the games as modifications of the Stackelberg balance are formulate. The algorithms of the construction balance of these games are offered. These algorithms are approved on numeric examples.

Keywords: dynamic games, hierarchical systems, Stackelberg balance, corruption, sustainable development.