Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.2, с. 3–31

УДК 519.862.5
ББК 22.18

МОДЕЛЬ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ: ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА НА РАВНОВЕСИЕ И ОБЩЕСТВЕННУЮ ОПТИМАЛЬНОСТЬ*

Ирина В. Антощенкова
НИУ Высшая Школа Экономики
190068, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
e-mail: airinaant@gmail.com

Игорь А. Быкадоров**
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр.ак. Коптюга, 4
НИУ ВШЭ, НИУ НГУ
e-mail: bykadorov.igor@mail.ru

Рассматривается модель монополистической конкуренции с эндогенным выбором технологий в случае закрытой экономики. Получена сравнительная статика равновесных и общественно-оптимальных решений по параметру «технологических инноваций», влияющему на издержки. Основные выводы: при росте инноваций потребление товара и инвестиции в производство растут; поведение равновесных переменных зависит только от свойств эластичности спроса, поведение общественно-оптимальных переменных зависит только от

* Выражаем благодарность экспертам EERC, а также коллегам из ИМ СО РАН и ТРПЭ НИУ ВШЭ, в частности С.Г.Коковину и особенно Е.В. Желободько (25.09.1973–27.03.2013).

** Исследование поддержано EERC (проект R08-1071), правительством РФ (проект 11.G34.31.0059) и РФФИ (проект 12-06-00174).

свойств эластичности полезности; поведение равновесных и общественно-оптимальных переменных не зависит от свойств издержек как функции инвестиций в НИОКР.

Ключевые слова: монополистическая конкуренция, эндогенный выбор инвестиций в НИОКР, технологический прогресс, общее равновесие, общественная оптимальность, сравнительная статика.

1. Введение

Монополистическая конкуренция – наиболее распространенный тип рынка, который характеризуется чертами монополии и совершенной конкуренции. В ней использовались идеи о рынке неоднородных благ, сформулированные Э.Г.Чемберлином:

- в отрасли производятся неоднородные блага, дифференцируемые по разновидностям;
- каждая фирма производит одну разновидность блага в условиях возрастающей отдачи от масштаба, устанавливая объем выпуска и цену на свою продукцию;
- число фирм в отрасли достаточно велико для того, чтобы каждая из них могла считать свое влияние на среднюю цену пренебрежимо малым;
- вход на рынок является свободным и продолжается, пока чистая прибыль в отрасли положительна.

Жесткая неценовая конкуренция – еще одна характерная черта монополистической конкуренции. Фирма, действующая в условиях монополистической конкуренции, может применять три основных стратегии влияния на объем продаж:

- изменять цены;
- производить товар с определенными качествами;
- пересмотреть стратегию рекламы и сбыта.

Нас интересует второй вариант выбора стратегии, который, в частности, заключается в усилении дифференциации своего товара по техническим характеристикам посредством инноваций в процесс производства продукции. Именно его мы и будем рассматривать в нашей модели. Также нельзя игнорировать значения разнообразия продуктов, свойственного монополистической конкуренции. Ведь чем больше разнообразие товаров, тем больше вероятность того, что будут полностью удовлетворены вкусы потребителей. Заметим, что, при одинаковых ценах на разнообразия продуктов, потребитель предпочитает покупать разнообразные товары, а не одну разновидность конкретного товара. Данный факт будем отмечать наличием «относительной любви к разнообразию».

Отметим, что в [2] и в [3] предполагается конкретная функциональная форма предпочтений потребителей – функция полезности с постоянной эластичностью замещения (CES-функция). Преимущество данного предположения в том, что технически удобнее получить в явном виде равновесные характеристики, такие как цены, объемы торговли и др. Однако, недостатков данной гипотезы существенно больше. Они подробно описаны в [5] и [6] (см. также [1]). Основной из них заключается в получении результатов, противоречащих реальной ситуации на рынке.

В работе изучается модель монополистической конкуренции с функцией полезности общего вида, в предположении существования равновесия на рынке. Исследуется влияние технологического прогресса на общественно-оптимальные и равновесные переменные: выпуск продукции, издержки, цены и количество фирм на рынке. Получена сравнительная статика вышеперечисленных переменных по параметру, показывающему, как технологические инновации влияют на издержки.

2. Постановка задачи

Изучается модель закрытой экономики[1] с эндогенным выбором инвестиций в производство, как и в [4]. Однако основное отличие нашей постановки от изучаемой в [4] состоит в наличии монополистической конкуренции и в том, что рассматривается общее равновесие

[1] Имеется в виду рассмотрение модели в рамках только одной страны.

и общественная оптимальность.

Можно выделить следующие особенности нашей модели:

- предусмотрена возможность инвестирования в производство;
- функция полезности имеет общий вид;
- предусмотрен только один сектор экономики и только один производственный фактор – труд;
- идентичность покупателей;
- идентичность фирм.

Будем использовать меру вогнутости Эрроу-Пратта, определенную для любой функции $g(z)$ как

$$r_g(z) = -\frac{g''(z)\,z}{g'(z)}.$$

Обозначим L – число покупателей и $[0, N]$ – эндогенный интервал фирм. Далее рассмотрим математическую постановку задачи.

2.1. Задача потребителя

Каждый потребитель максимизирует свою функцию полезности в соответствии с бюджетным ограничением путем выбора бесконечномерного вектора потребления $X : [0, N] \to R_+$. Так как в нашей модели потребители идентичные, индекс конкретного потребителя можно опустить. Задачу (максимизации полезности) потребителя при выполнении бюджетного ограничения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \int_0^N u(x_i)\,di \to \max\limits_X \\ \int_0^N p_i x_i di \le \omega + \frac{\int_0^N \pi_i di}{L} = 1. \end{cases}$$

Здесь N – число фирм или длина торговой линии, определяется эндогенно. Скаляр x_i – это «потребление» или количество i-ой разновидности товара, потребленное каждым клиентом, $X = (x_i)_{i \le N}$. Предполагается, что функция полезности $u(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$u(0) = 0,\ u'(x_i) > 0,\ u''(x_i) < 0,\ r_{u'}(x_i) \equiv -\frac{u'''(x_i)x_i}{u''(x_i)} < 2,$$

т.е. она везде возрастает, строго вогнута и ее вогнутость ограничена (последнее гарантирует строгую вогнутость прибыли производителя).[2]

В бюджетном ограничении ω – это зарплата, p_i – цена за единицу i-ой разновидности товара, π_i – прибыль i-ой фирмы. В силу условия свободы входа на рынок, $\pi_i = 0$ в равновесии. Так как мы рассматриваем общее равновесие, зарплата может быть нормирована как $\omega \equiv 1$, поэтому доход потребителя равен 1.

Условие первого порядка для задачи потребителя дает обратную функцию спроса для i-ого вида товара

$$p\left(x,i\right) = \frac{u'\left(x_i\right)}{\lambda}, \tag{2.1}$$

где λ – множитель Лагранжа бюджетного ограничения.[3] Таким образом, готовность платить зависит как от объема индивидуального потребления x_i, так и от предельной полезности дохода λ, причем увеличение λ ведет к уменьшению спроса, а следовательно и к уменьшению прибыли производителей.

2.2. Задача производителя

В рассматриваемой модели предполагается взаимно однозначное соответствие: каждый вид товара производится одной фирмой и каждая фирма производит только один вид товара. Однако, каждая фирма выбирает свой технологический уровень производства товара; т.е. если производитель тратит f единиц труда в качестве фиксированных издержек, то общие издержки на производство y единиц продукции равны $c(f)y + f$ единиц труда. Предполагается, что функция $c(f)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$c'\left(f\right) < 0, \ \lim_{f\to\infty} c\left(f\right) > c_o > 0,$$

где $c_0 = const$, т.е. она везде убывает, строго положительна и стремится к строго положительной константе.

---

[2]Для функции полезности $u(\cdot)$ мера Эрроу-Пратта r_u означает «относительную любовь к разнообразию».

[3]Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Задача s-го производителя – максимизировать свою прибыль относительно x_s и f_s. Используя (2.1), ее можно записать следующим образом:

$$\pi_s(x_s, f_s, \lambda) = (p(x_s, \lambda) - c(f_s)) Lx_s - f_s =$$

$$= \left(\frac{u'(x_s)}{\lambda} - c(f_s)\right) Lx_s - f_s \to \max_{x_s \geq 0, f_s \geq 0}.$$

Используя предположение о достаточно большом количестве фирм (точнее, о бесконечном множестве фирм), нетрудно показать, что одна отдельно взятая фирма существенно не влияет на рыночную ситуацию. Следовательно, можно считать множитель Лагранжа $\lambda > 0$ постоянным и одинаковым для каждого производителя s.

Условие первого порядка (УПП) для задачи производителя имеет вид

$$\frac{u''(x_s) x_s + u'(x_s)}{\lambda} - c(f) = 0, \tag{2.2}$$

$$c'(f_s) Lx_s + 1 = 0. \tag{2.3}$$

Данные уравнения справедливы только при выполнении условий второго порядка (УВП):

$$u'''(x_s) x_s + 2u''(x_s) < 0 \Longleftrightarrow r_{u'}(x_s) < 2, \tag{2.4}$$

$$-\frac{(u'''(x_s) + 2u''(x_s)) c''(f_s) x_s}{\lambda} - (c'(f_s))^2 > 0. \tag{2.5}$$

3. Равновесие

Как и в стандартной модели монополистической конкуренции, предполагается, что фирмы входят на рынок, пока их прибыль положительна. Таким образом, условие свободы входа можно записать как равенство нулю прибыли производителя:

$$\frac{u'(x_s)}{\lambda} - c(f_s) = \frac{f_s}{Lx_s}. \tag{3.1}$$

Поскольку предполагается, что производители идентичны, задача производителя одинакова для каждого из них. Поэтому далее будем рассматривать случай симметричного равновесия, где $x_s = x,\ f_s = f$ для любого s. Теперь баланс по труду записывается как

$$\int\limits_0^N \left(c\left(f_i\right)x_i L + f_i\right)di = N\left(c\left(f\right)xL + f\right) = L. \tag{3.2}$$

Итак, симметричное равновесие определяется как пятерка $\left(x^*, p^*, \lambda^*, f^*, N^*\right)$, которая обеспечивает:

- рациональность в потреблении (2.1);
- рациональность в производстве (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5);
- условие свободы входа (3.1) и баланс по труду (3.2).

Утверждение 3.1. *Равновесная пара $\left(x^*, f^*\right)$ в закрытой модели с эндогенными технологиями является решением системы*

$$\frac{r_u\left(x\right)x}{1 - r_u\left(x\right)} = \frac{f}{Lc\left(f\right)}, \tag{3.3}$$

$$\left(1 - r_{lnc}\left(f\right) + r_c\left(f\right)\right)\left(1 - r_u\left(x\right)\right) = 1, \tag{3.4}$$

при условиях

$$r_u\left(x\right) < 1, \qquad \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right)r_c\left(f\right) > 1. \tag{3.5}$$

Равновесное количество фирм N^* определяется как

$$N = \frac{L}{c\left(f\right)xL + f}. \tag{3.6}$$

Равновесная цена p^* определяется как

$$p = \frac{c\left(f\right)}{1 - r_u\left(x\right)}. \tag{3.7}$$

Торговая надбавка (markup) удовлетворяет уравнению

$$\frac{p^* - c\left(f^*\right)}{p^*} = r_u\left(x^*\right) = \frac{N^* f^*}{L}. \tag{3.8}$$

В дальнейшем будем использовать понятие эластичности функции. В случае функции $g\left(x\right)$ одной переменной формула для эластичности имеет вид

$$\varepsilon_g\left(z\right)=\frac{dg}{dz}\cdot\frac{z}{g}. \tag{3.9}$$

Легко заметить, что знак эластичности совпадает со знаком производной функции. Кроме того, эластичность обладает более удобными, чем производная, свойствами.[4]

Отметим, что эластичность $\varepsilon_{g'}$ связана с мерой вогнутости Эрроу-Пратта r_g следующим образом:

$$r_g\left(z\right)=-\tfrac{g''(z)z}{g'(z)}=-\tfrac{dg'(z)}{dz}\cdot\tfrac{z}{g'(z)}=-\varepsilon_{g'(z)}.$$

Отметим также,[5] что

$$r_{\ln g}\left(z\right)=r_g\left(z\right)+\varepsilon_g\left(z\right). \tag{3.10}$$

4. Общественная оптимальность

В условиях нашей модели, где $x_s=x,\ f_s=f$ для любого s, рассмотрим еще одну задачу оптимизации: максимизировать общую (общественную) полезность при условии, что выполнен баланс по труду:

$$\begin{cases} Nu\left(x\right)\to\max\limits_{N,x,f} \\ N\left(c(f)xL+f\right)=L, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\tfrac{Lu(x)}{c(f)xL+f}\to\max\limits_{x,f}.$$

[4]Например,

$$\varepsilon_{h(z)\cdot g(z)}=\varepsilon_{h(z)}+\varepsilon_{g(z)},\qquad \varepsilon_{h(z)/g(z)}=\varepsilon_{h(z)}-\varepsilon_{g(z)},\qquad \varepsilon_{h(z)}=-\varepsilon_{1/h(z)},$$

$$\varepsilon_{h(z)\circ g(y)}=\varepsilon_{h(g(y))}=\varepsilon_{h(z)}\cdot\varepsilon_{g(y)},\qquad \varepsilon_{-h(z)}=\varepsilon_{h(z)},\qquad \varepsilon_{const}=0.$$

[5]Действительно,

$$r_{\ln g}(z)=-\frac{(\ln g(z))''z}{(\ln g(z))'}=-\frac{(\frac{g'(z)}{g(z)})'z}{\frac{g'(z)}{g(z)}}=-\frac{g''\left(z\right)z}{g'\left(z\right)}+\frac{g'\left(z\right)z}{g\left(z\right)}=r_g\left(z\right)+\varepsilon_g\left(z\right).$$

Тройку $(x^{opt}, f^{opt}, N^{opt})$, которая является решением данной задачи, и назовем *общественно оптимальной.*

Утверждение 4.1. *В случае общественной оптимальности УПП имеет вид*

$$\begin{cases} r_{\ln u}(x) - r_u(x) = \frac{c(f)xL}{c(f)xL+f}, \\ c'(f)\,xL = -1, \end{cases} \tag{4.1}$$

а УВП имеет вид

$$\varepsilon_c + r_u(x)\,r_c(f) \equiv r_{\ln c}(f) - (1 - r_u(x))\,r_c(f) > 0. \tag{4.2}$$

Более того, верна следующая формула:

$$(1-\varepsilon_c)\,\varepsilon_u \equiv (1 - r_{\ln c}(f) + r_c(f))\,(r_{\ln u}(x) - r_u(x)) = 1. \tag{4.3}$$

Учитывая, что в равновесии УПП имеет вид

$$\begin{cases} 1 - r_u = \frac{c(f)xL}{c(f)xL+f}, \\ c'(f)\,xL = -1, \end{cases}$$

легко видеть, что равновесие оптимально в том и только в том случае, если $r_{\ln u} = 1$.

5. Случай $c = c(f, \alpha)$

Теперь рассмотрим случай более сложной функции издержек, которая будет зависеть не только от инвестиций, но и от параметра α, который показывает как технологические инновации влияют на издержки, т.е. случай $c = c(f, \alpha)$, где

$$\frac{\partial c}{\partial f} < 0, \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial f^2} > 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial \alpha} < 0, \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial f \partial \alpha} < 0.$$

Равновесное решение такое же, как и в случае $c = c(f)$, утверждение 3.1 будет справедливо и для этого случая, если введем следующие обозначения:

$$r_c := r_c(f, \alpha) := -\frac{\frac{\partial^2 c}{\partial f^2} \cdot f}{\frac{\partial c}{\partial f}} > 0, \tag{5.1}$$

$$r_{\ln c} := r_{\ln c}(f, \alpha) := -\frac{\frac{\partial^2 \ln c}{\partial f^2} \cdot f}{\frac{\partial \ln c}{\partial f}}.$$

Нас интересуют знаки эластичностей ε_x, ε_f, ε_N, ε_{Nf}, ε_p относительна параметра α.

Заметим, что

$$\begin{gathered} \varepsilon_u = \tfrac{du}{dx} \cdot \tfrac{x}{u} > 0, \quad \varepsilon_{c/\alpha} := \tfrac{\partial c}{\partial \alpha} \cdot \tfrac{\alpha}{c} < 0, \\ \varepsilon_{c/f} := \tfrac{\partial c}{\partial f} \cdot \tfrac{f}{c} < 0, \quad \varepsilon_{c'_f/\alpha} := \tfrac{\partial\left(\frac{\partial c}{\partial f}\right)}{\partial \alpha} \cdot \tfrac{\alpha}{\frac{\partial c}{\partial f}} = \tfrac{\partial^2 c}{\partial f \partial \alpha} \cdot \tfrac{\alpha}{\frac{\partial c}{\partial f}} > 0. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Далее везде для удобства полагаем $r_c\,(f, \alpha) = r_c$.

6. Сравнительная статика для закрытой экономики

В рамках нашей модели проведем сравнительную статику равновесных решений и общественно-оптимальных решений по параметру «технологических инноваций» α, влияющему на издержки. Для этого необходимо определить знаки производных $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial Nf}{\partial \alpha}$. Отметим, что эластичности являются более удобным аппаратом для изучения поведения соответствующих переменных в зависимости от параметра α, поэтому в дальнейшем основной нашей задачей будет определение знаков именно эластичностей ε_x, ε_f, ε_N и ε_{Nf}.

6.1. Равновесие

Изучим свойства равновесных переменных. Зависимость от параметра α определяется следующим утверждением.

Утверждение 6.1. *Эластичности равновесных переменных x^*, f^*, N^*, а также $N^* f^*$ и p^*, относительно параметра α имеют следующий вид:*

$$\varepsilon_{x^*/\alpha} = \frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha} - (1 - r_u)\, r_c \varepsilon_{c/\alpha}}{(2 - r_{u'})\, r_c - 1} > 0, \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{f^*/\alpha} = \frac{(2 - r_{u'})\, \varepsilon_{c'_f/\alpha} - (1 - r_u)\, \varepsilon_{c/\alpha}}{(2 - r_{u'})\, r_c - 1} > 0, \tag{6.2}$$

$$\varepsilon_{N^*/\alpha} = \frac{r'_u x}{r_u} \varepsilon_{x/\alpha} - \varepsilon_{f/\alpha}, \tag{6.3}$$

$$\varepsilon_{N^* f^*/\alpha} = \varepsilon_{\frac{p^* - c(f^*)}{p^*}/\alpha} = \frac{r'_u x}{r_u} \varepsilon_{x/\alpha}, \tag{6.4}$$

$$\varepsilon_{p^*/\alpha} = \frac{-r_u \varepsilon_{c'_f/\alpha} + (1 - r_u)\left((2 - r_{u'})\, r_c - 1 + r_u r_c\right) \varepsilon_{c/\alpha}}{(2 - r_{u'})\, r_c - 1} < 0, \tag{6.5}$$

и их знаки приведены в табл. 1: [6]

Таблица 1

	$r'_u < 0$	$r'_u = 0$	$r'_u > 0$
$\varepsilon_{x^*/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{f^*/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{N^* f^*/\alpha} = \varepsilon_{\frac{p^*-c(f^*)}{p^*}/\alpha}$	-	0	+
$\varepsilon_{N^*/\alpha}$	-	-	?
$\varepsilon_{p^*/\alpha}$	-	-	-

Таким образом, в равновесии, при росте «технологических инноваций»:

– потребление товара и инвестиции в производство возрастают;

– цены убывают;

– общие инвестиции возрастают в про-конкурентном случае и убывают в анти-конкурентном случае.[7]

6.2. Общественная оптимальность

Изучим свойства общественно-оптимальных переменных. Зависимость от параметра α определяется следующим утверждением.

Утверждение 6.2. *Эластичности общественно-оптимальных переменных x^{opt}, f^{opt}, N^{opt}, а также $N^{opt} f^{opt}$, относительно параметра α имеют вид*

$$\varepsilon_{x^{opt}/\alpha} = \frac{\varepsilon_{c/f} \cdot \left(\varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f} - \varepsilon_{c'_f/\alpha}\right)}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_c} > 0, \tag{6.6}$$

$$\varepsilon_{f^{opt}/\alpha} = \frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha}}{r_{c/f}} > 0, \tag{6.7}$$

$$\varepsilon_{N^{opt}/\alpha} = -\varepsilon_u \cdot (\varepsilon_{c/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha}), \tag{6.8}$$

$$\varepsilon_{N^{opt} f^{opt}/\alpha} = \frac{(r_{\ln u} - 1) \cdot r_{c/f}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha}\right), \tag{6.9}$$

а их знаки приведены в табл. 2:

---

[6] В табл. 1, как и в дальнейшем в табл. 2, знак «?» означает, что однозначно определить знак соответствующей эластичности не представляется возможным.

[7] Знак r'_u определяет поведение эластичности спроса, а это, в свою очередь и определяет «про-» или «анти-» конкурентность случая.

Таблица 2

	$\varepsilon'_u > 0$	$\varepsilon'_u = 0$	$\varepsilon'_u < 0$
$\varepsilon_{x^{opt}/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{f^{opt}/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{N^{opt}f^{opt}/\alpha}$	-	0	+
$\varepsilon_{N^{opt}/\alpha}$	-	-	?

Таким образом, в ситуации общественной оптимальности, при росте «технологических инноваций»:

– потребление товара и инвестиции в производство возрастают;

– количество фирм уменьшается в случае возрастающей эластичности полезности;

– общие инвестиции возрастают в случае убывающей эластичности полезности и убывают в случае возрастающей эластичности полезности.

Сравним знаки полученных эластичностей переменных в случаях общественной оптимальности и равновесия.

Равновесие:

	$r'_u < 0$	$r'_u = 0$	$r'_u > 0$
$\varepsilon_{x^*/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{f^*/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{N^*f^*/\alpha}$	-	0	+
$\varepsilon_{N^*/\alpha}$	-	-	?

Оптимальность:

	$\varepsilon'_u > 0$	$\varepsilon'_u = 0$	$\varepsilon'_u < 0$
$\varepsilon_{x^{opt}/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{f^{opt}/\alpha}$	+	+	+
$\varepsilon_{N^{opt}f^{opt}/\alpha}$	-	0	+
$\varepsilon_{N^{opt}/\alpha}$	-	-	?

Таким образом, *наблюдается* ***полная идентичность*** *характера зависимости равновесных переменных от свойств эластичности спроса и зависимости общественно-оптимальных переменных от свойств эластичности полезности.*

7. Заключение

В работе рассмотрена модель монополистической конкуренции с эндогенным выбором технологий. Исследовано влияние технологического прогресса на равновесные и общественно-оптимальные переменные: потребление продукции, издержки, количество фирм и цены (в случае равновесия). Проведена сравнительная статика общественно-оптимальных и равновесных переменных по параметру «технологических инноваций». Определены знаки эластичностей основных величин данной модели. Показано, что, при росте параметра, отвечающего за технологического прогресс:

- потребление товара и инвестиции в производство растут в обоих случаях;
- поведение равновесных и общественно-оптимальных переменных не зависит от свойств издержек как функции инвестиций в НИОКР;
- поведение равновесных переменных зависит только от свойств эластичности спроса;
- поведение общественно-оптимальных переменных зависит только от свойств эластичности полезности;
- наблюдается полная идентичность характера зависимости равновесных переменных от свойств эластичности спроса и зависимости общественно-оптимальных переменных от свойств эластичности предельных издержек как функции инвестиций.

8. Приложение: доказательство утверждений

8.1. Условие первого порядка для задачи потребителя

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \int_0^N u(x_i)\, di - \lambda \left(\int_0^N p_i x_i di - 1 \right),$$

где $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\in[0,N]}$. Продифференцируем по x_i и приравняем производную к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \int\limits_0^N u'(x_i)\,di - \lambda \int\limits_0^N p_i di = \int\limits_0^N (u'(x_i) - \lambda p_i)\,di = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'(x_i) - \lambda p_i = 0 \Leftrightarrow p_i(x_i, \lambda) = \frac{u'(x_i)}{\lambda}.$$

8.2. Условие первого порядка для задачи производителя

Формула для прибыли имеет вид

$$\pi_s(x_s, f_s, \lambda) = \left(\frac{u'(x_s)}{\lambda} - c(f_s)\right) L x_s - f_s.$$

Приравняем к нулю частные производные $\frac{\partial \pi_s}{\partial x_s}$ и $\frac{\partial \pi_s}{\partial f_s}$:

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial x_s} = \frac{u''(x_s) L x_s + u'(x_s) L}{\lambda} - c(f_s) L = 0,$$

что и есть (2.2);

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial f_s} = -c'(f_s) L x_s - 1 = 0,$$

что и есть (2.3).

8.3. Условие второго порядка для задачи производителя

Рассмотрим матрицу Гессе

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s^2} & \frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s \partial f_s} \\ \frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s \partial f_s} & \frac{\partial^2 \pi_s}{\partial f_s^2} \end{pmatrix}.$$

Проверим отрицательность главных миноров нечетного порядка и положительность главных миноров четного порядка:

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{u'''(x_s) L x_s + 2L u''(x_s)}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'''(x_s)\, x_s + 2u''(x_s) < 0 \Leftrightarrow r_{u'}(x_s) < 2,$$

что и есть (2.4);

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial f_s^2} < 0 \Leftrightarrow -c''\left(f_s\right) L x_s < 0,$$

что верно в силу условия $\frac{\partial^2 c}{\partial f^2} > 0$;

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s^2} \cdot \frac{\partial^2 \pi_s}{\partial f_s^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial x_s \partial f_s}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\left(u'''\left(x_s\right) x_s + 2u''\left(x_s\right)\right) c''\left(f_s\right) x_s}{\lambda} - \left(c'\left(f_s\right)\right)^2 > 0,$$

что и есть (2.5).

8.4. Доказательство утверждения 3.1

В симметричном случае запишем равновесные уравнения (2.2), (2.3), (3.1), (3.2):

$$(1 - r_u(x)) \cdot \frac{u'(x)}{\lambda} - c(f) = 0, \tag{8.1}$$

$$c'(f)Lx + 1 = 0, \tag{8.2}$$

$$\frac{u'(x)}{\lambda} - c(f) = \frac{f}{Lx}, \tag{8.3}$$

$$N \cdot (c(f)xL + f) = L. \tag{8.4}$$

Используя (8.3), уравнение (8.1) можно записать в виде

$$\frac{r_u(x)}{1 - r_u(x)} = \frac{f}{Lxc(f)},$$

что и есть (3.3).

Используя (8.2) и (3.9), уравнение (3.3) можно записать в виде

$$(1 - \varepsilon_c(f)) \cdot (1 - r_u(x)) = 1. \tag{8.5}$$

Выразив $\varepsilon_c\left(f\right)$ из (3.10) и подставив в (8.5), получим (3.4):

$$(1 - r_{lnc}(f) + r_c(f)) \cdot (1 - r_u(x)) = 1.$$

Запишем (2.5) для симметричного случая:

$$-(2 - r_{u'}(x)) \cdot \frac{u''(x) \cdot c''(f) \cdot x}{\lambda} - (c'(f))^2 > 0. \tag{8.6}$$

Выразив $\frac{u'(x)}{\lambda}$ из (8.3) и подставив в (8.1), получим

$$\frac{u''(x)x}{\lambda} = c(f) - \frac{u'(x)}{\lambda} = c(f) - (\frac{f}{Lx} + c(f)) = -\frac{f}{Lx}. \tag{8.7}$$

Выразив Lx из (8.2) и подставив в (8.7), получим

$$\frac{u''(x)x}{\lambda} = f \cdot c'(f). \tag{8.8}$$

В итоге имеем

$$\frac{u''(x)x}{\lambda} = c(f) - \frac{u'(x)}{\lambda} = -\frac{f}{Lx} = f \cdot c'(f).$$

Подставив (8.8) в (8.6), получим

$$-(2 - r_{u'}(x)) \cdot f \cdot c'(f) \cdot c''(f) - (c'(f))^2 > 0,$$

$$((2 - r_{u'}(x)) \cdot r_c(f) - 1) \cdot (c'(f))^2 > 0,$$

$$(2 - r_{u'}(x)) \cdot r_c(f) > 1.$$

Согласно $1 - \varepsilon_c(f) > 0$ и (8.5) делаем вывод, что

$$r_u(x) < 1.$$

Таким образом, (3.5) доказано.

Условие (3.6)

$$N = \frac{L}{c(f) \cdot x \cdot L + f}$$

прямо следует из (8.4).

Для равновесного случая (2.1) принимает вид

$$p = \frac{u'(x)}{\lambda},$$

или, согласно (8.1):

$$p = \frac{c(f)}{1 - r_u(x)},$$

что и есть (3.7).

Согласно (3.7), получим

$$\frac{p - c(f)}{p} = 1 - \frac{c(f)}{p} = 1 - \frac{c(f)}{\frac{c(f)}{1-r_u(x)}} = r_u(x). \tag{8.9}$$

Поскольку из (3.3) имеем

$$r_u(x) = \frac{f}{f + xLc(f)},$$

то

$$r_u(x) = \frac{Nf}{L}. \tag{8.10}$$

Таким образом, из (8.9) и (8.10) получим (3.8):

$$\frac{p - c(f)}{p} = r_u(x) = \frac{Nf}{L}.$$

8.5. Доказательство утверждения 4.1

Для вывода условия первого порядка приравняем к нулю две частные производные $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})$ и $\frac{\partial}{\partial f}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx + f}) = \frac{(c(f)Lx + f)u'(x) - u(x)Lc(f)}{(c(f)Lx + f)^2} \cdot L = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c(f)Lx + f)u'(x) - u(x)Lc(f) = 0 \Leftrightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{c(f)L}{c(f)Lx + f}.$$

Согласно (3.10), имеем

$$\frac{u'(x) \cdot x}{u(x)} = \varepsilon_u(x) = r_{\ln u}(x) - r_u(x) = \frac{c(f)\,xL}{c(f)\,xL + f}.$$

Кроме того,

$$1 - \varepsilon_u(x) = 1 - \frac{cLx}{cxL + f} = \frac{f}{cxL + f},$$

поэтому

$$(1 - \varepsilon_u(x))\varepsilon_u(x) = \frac{cfLx}{(cxL + f)^2}. \tag{8.11}$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial f}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx + f}) = \frac{(c'(f)Lx + 1)u(x)}{(c(f)Lx + f)^2} \cdot L = 0 \Leftrightarrow c'(f)Lx = -1.$$

Таким образом, (4.1) доказано.

Для вывода условия второго порядка, запишем матрицу Гессе

$$\begin{pmatrix} (\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{xx} & (\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{xf} \\ (\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{xf} & (\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{ff} \end{pmatrix}$$

и проверим отрицательность диагональных элементов и положительность определителя.

Имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{cLu'(x) + (cLx+f)u''(x) - u'(x)\,cL}{(cLx+f)^2} \cdot L < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u''(x)}{cLx+f} \cdot L < 0 \Leftrightarrow Nu''(x) < 0,$$

что верно в силу условия $u''(x) < 0$.

Далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial f^2}(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((c'Lx+1)u)'_f(cLx+f) - 2(c'Lx+1)'_f \cdot (c'Lx+1)u(x)}{(cLx+f)^3} \cdot L < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{c''Lxu}{(cLx+f)^2} \cdot L < 0 \Leftrightarrow -c''N^2ux < 0 \Leftrightarrow -\frac{c''u'xN}{c} < 0,$$

что верно в силу условий $u'(x) < 0,\ c''(x) < 0$.

Далее,

$$(\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{xx} \cdot (\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{ff} - \left((\frac{Lu(x)}{c(f)Lx+f})''_{xf}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\left(-\frac{c'u'N}{c}\right)^2 \cdot (\frac{c''c}{(c')^2} \cdot \frac{u''x}{u'} + 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c'u'N}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_c}{r_{lnc} - r_c} \cdot r_u + 1\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\left(\frac{c'u'N}{c}\right)^2}{r_{lnc} - r_c} \cdot (r_c r_u + r_{lnc} - r_c) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{u'N}{f}\right)^2 \cdot \varepsilon_c \cdot (\varepsilon_c + r_c r_u) > 0.$$

Отсюда, в силу $\varepsilon_c(f) < 0$, получаем (4.2):

$$\varepsilon_c + r_c r_u > 0.$$

8.6. Доказательство утверждения 6.1

Для начала докажем вспомогательные тождества

$$r_u' x \equiv (1 + r_u - r_{u'})\, r_u, \tag{8.12}$$

$$\varepsilon_u' x \equiv (1 - \varepsilon_u + \varepsilon_{u'})\, \varepsilon_u. \tag{8.13}$$

Имеем

$$r_u'(x) = \left(-\frac{u''(x) \cdot x}{u'(x)}\right)_x' = -\frac{u'''(x) \cdot x + u''(x)}{u'(x)} + \left(\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)^2 \cdot x =$$

$$= -\frac{(1 - r_{u'}(x)) \cdot u''(x)}{u'(x)} - r_u(x) \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Поэтому

$$r_u'(x)x = (1 + r_u(x) - r_{u'}(x))r_u,$$

это и есть (8.12).

Далее, согласно (3.9):

$$\varepsilon_u'(x) = \left(-\frac{u'(x) \cdot x}{u(x)}\right)_x' =$$

$$= \frac{(u''(x) \cdot x + u'(x)) \cdot u(x) - (u'(x))^2 \cdot x}{u^2(x)} =$$

$$= \frac{u'(x) \cdot x}{u(x)} \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)} + \frac{u'(x) \cdot x}{u(x)} \cdot \frac{1}{x} - \frac{u'(x) \cdot x}{u(x)} \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} =$$

$$= \varepsilon_u(x) \left(\frac{u''(x)}{u'(x)} + \frac{1}{x} - \frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Поэтому

$$\varepsilon_u'(x)x = \varepsilon_u(x)\left(1 - \varepsilon_u(x) + \varepsilon_{u'}(x)\right),$$

это и есть (8.13).

Отметим, что согласно (3.10) и (8.13) имеем

$$r'_{\ln u}x - r'_u x = \varepsilon'_u x = (1 - \varepsilon_u + \varepsilon_{u'})\varepsilon_u = (1 - \varepsilon_u - r_u)\varepsilon_u. \qquad (8.14)$$

Приступим теперь непосредственно к доказательству утверждения 6.1. Используем уравнения равновесия:

$$\frac{r_u(x)x}{1 - r_u(x)} - \frac{f}{Lc(f,\alpha)} = 0, \qquad (8.15)$$

$$c'_f(f,\alpha)Lx = -1, \qquad (8.16)$$

$$p - \frac{c(f,\alpha)}{1 - r_u(x)} = 0. \qquad (8.17)$$

Продифференцируем (8.15) как неявную функцию от α :

$$\left(\frac{r_u(x)\,x}{1 - r_u(x)} - \frac{f}{Lc(f,\alpha)}\right)'_\alpha + \left(\frac{r_u(x)\,x}{1 - r_u(x)} - \frac{f}{Lc(f,\alpha)}\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} +,$$

$$+\left(\frac{r_u(x)\,x}{1 - r_u(x)} - \frac{f}{Lc(f,\alpha)}\right)'_f \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

т.е.

$$\frac{c'_\alpha(f,\alpha)\,f}{Lc^2(f,a)} + \frac{(r'_u(x)\,x + r_u(x))(1 - r_u(x)) + r_u(x)\,r'_u(x)\,x}{(1 - r_u(x))^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} -$$

$$-\frac{Lc(f,\alpha) - Lc'_f(f,\alpha)\,f}{L^2c^2(f,\alpha)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

т.е.

$$\frac{c'_\alpha(f,\alpha)\,f}{Lc^2(f,a)} + \frac{(2 - r_{u'}(x))\,r_u(x)}{(1 - r_u(x))^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{c(f,\alpha) - c'_f(f,\alpha)\,f}{Lc^2(f,\alpha)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

В силу (8.12) и (8.15), имеем

$$\frac{c'_\alpha(f,\alpha)\,f\alpha}{Lc^2(f,a)} + \frac{(2 - r_{u'}(x))}{1 - r_u(x)} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \frac{c(f,\alpha) - c'_f(f,\alpha)\,f}{Lc^2(f,\alpha)} \cdot f \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0.$$

т.е.

$$\varepsilon_{c/\alpha} + \frac{(2 - r_{u'}(x))}{1 - r_u(x)} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \left(1 - \varepsilon_{c/f}\right) \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0.$$

Воспользовавшись (8.5), получаем

$$\left(1-r_u\left(x\right)\right)\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+\left(2-r_{u'}\left(x\right)\right)\cdot\varepsilon_{x/\alpha}-\varepsilon_{f/\alpha}=0. \tag{8.18}$$

Продифференцируем следующее уравнение равновесия (8.16) как неявную функцию от α:

$$\left(c_f'\left(f,\alpha\right)Lx\right)_\alpha'+\left(c_f'\left(f,\alpha\right)Lx\right)_x'\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(c_f'\left(f,\alpha\right)Lx\right)_f'\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0,$$

поэтому

$$c_{f\alpha}''\left(f,\alpha\right)Lx+c_f'\left(f,\alpha\right)L\cdot\frac{x}{\alpha}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+c_{ff}''\left(f,\alpha\right)Lx\cdot\frac{f}{\alpha}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0,$$

т.е.

$$\frac{c_{f\alpha}''\left(f,\alpha\right)\alpha}{c_f'\left(f,\alpha\right)}+\varepsilon_{x/\alpha}+\frac{c_{ff}''\left(f,\alpha\right)f}{c_f'\left(f,\alpha\right)}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0,$$

т.е.

$$\varepsilon_{c_f'/\alpha}+\varepsilon_{x/\alpha}-r_c\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0. \tag{8.19}$$

Продифференцируем оставшееся уравнение равновесия (8.17) как неявную функцию от α:

$$\left(p-\frac{c\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\right)_\alpha'+\left(p-\frac{c\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\right)_p'\cdot\frac{\partial p}{\partial\alpha}+$$

$$+\left(p-\frac{c\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\right)_x'\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(p-\frac{c\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\right)_f'\cdot\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0,$$

или, в эластичностях,

$$-\frac{c_\alpha'\left(f,\alpha\right)}{1-r_u(x)}+\frac{p}{\alpha}\cdot\varepsilon_{p/\alpha}-\frac{r_u'\left(x\right)c\left(f,\alpha\right)}{\left(1-r_u\left(x\right)\right)^2}\cdot\frac{x}{\alpha}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}-\frac{c_f'\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\cdot\frac{f}{\alpha}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0.$$

Согласно (3.7), имеем

$$-\frac{c_\alpha'\left(f,\alpha\right)\alpha}{1-r_u(x)}+\frac{c\left(f,\alpha\right)}{1-r_u\left(x\right)}\cdot\varepsilon_{p/\alpha}-\frac{r_u'\left(x\right)c\left(f,\alpha\right)x}{\left(1-r_u\left(x\right)\right)^2}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}-\frac{c_f'\left(f,\alpha\right)f}{1-r_u\left(x\right)}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0.$$

т.е.

$$-\frac{c_\alpha'\left(f,\alpha\right)\alpha}{c\left(f,\alpha\right)}+\varepsilon_{p/\alpha}-\frac{r_u'\left(x\right)x}{1-r_u\left(x\right)}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}-\frac{c_f'\left(f,\alpha\right)f}{c\left(f,\alpha\right)}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0,$$

т.е.

$$-\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{p/\alpha}-\frac{r'_u(x)\,x}{1-r_u(x)}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}-\varepsilon_{c/f}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}=0. \tag{8.20}$$

Выразив из (8.18), (8.19) и (8.20) интересующие нас эластичности, получаем

$$\varepsilon_{x/\alpha}=r_c\cdot\varepsilon_{f/\alpha}-\varepsilon_{c'_f/\alpha} \tag{8.21}$$

$$\varepsilon_{p/\alpha}=\frac{r'_u(x)\,x}{1-r_u(x)}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+\varepsilon_{c/f}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}+\varepsilon_{c/\alpha} \tag{8.22}$$

$$\varepsilon_{f/\alpha}=(1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+(2-r_{u'}(x))\cdot\varepsilon_{x/\alpha} \tag{8.23}$$

Согласно (8.23), представление (8.21) может быть записано в виде

$$\varepsilon_{x/\alpha}=r_c\cdot\big((1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+(2-r_{u'}(x))\cdot\varepsilon_{x/\alpha}\big)-\varepsilon_{c'_f/\alpha},$$

т.е.

$$\varepsilon_{x/\alpha}(1-r_c(2-r_{u'}(x)))=r_c(1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}-\varepsilon_{c'_f/\alpha},$$

т.е.

$$\varepsilon_{x/\alpha}=\frac{-r_c(1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_c(2-r_{u'}(x))-1}>0.$$

Тем самым доказано (6.1).

Согласно (8.21), представление (6.1) может быть записано в виде

$$\varepsilon_{f/\alpha}=\frac{\varepsilon_{x/\alpha}+\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_c}=$$

$$=\frac{-r_c(1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{c'_f/\alpha}+((2-r_{u'}(x))\,r_c-1)\,\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{(r_c(2-r_{u'}(x))-1)\,r_c},$$

т.е.

$$\varepsilon_{f/\alpha}=\frac{-(1-r_u(x))\,\varepsilon_{c/\alpha}+(2-r_{u'}(x))\,\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{(2-r_{u'}(x))\,r_c-1}>0.$$

Тем самым доказано (6.2).

Согласно (6.1) и (6.2), представление (8.22) примет вид

$$\varepsilon_{p/\alpha}=\frac{r'_u(x)\,x}{1-r_u(x)}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+\varepsilon_{c/f}\cdot\varepsilon_{f/\alpha}+\varepsilon_{c/\alpha}=$$

$$=\frac{r'_u(x)\,x}{1-r_u(x)}\cdot\frac{-r_c(1-r_u(x))\cdot\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_c(2-r_{u'}(x))-1}+$$

$$+\varepsilon_{c/f} \cdot \frac{-\left(1 - r_u\left(x\right)\right)\varepsilon_{c/\alpha} + \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right)\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} + \varepsilon_{c/\alpha} =$$

$$= \frac{-r_c x r'_u\left(x\right) - \left(1 - r_u\left(x\right)\right)\varepsilon_{c/f} + \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} +$$

$$+ \frac{\frac{r'_u(x)x}{1 - r_u(x)} + \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right)\varepsilon_{c/f}}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha},$$

Учитывая (8.5) и (8.12), получаем

$$\varepsilon_{p/\alpha} =$$

$$= \frac{-\left(1 + r_u\left(x\right) - r_{u'}\left(x\right)\right) r_u\left(x\right) r_c + r_u\left(x\right) + \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{(1 + r_u(x) - r_{u'}(x)) r_u(x)}{1 - r_u(x)} + \left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) \cdot \frac{r_u(x)}{r_u(x) - 1}\right)}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha} =$$

$$= \frac{\left(-\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_u\left(x\right) + \left(1 - r_u\left(x\right)\right) r_u\left(x\right) + 2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} -$$

$$- \frac{\left(1 - r_u\left(x\right)\right)}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} - \frac{r_u\left(x\right)}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha} =$$

$$= \frac{\left(\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1 + r_u r_c\right)\left(1 - r_u\left(x\right)\right) \cdot \varepsilon_{c/\alpha} - r_u\left(x\right)\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{\left(2 - r_{u'}\left(x\right)\right) r_c - 1} < 0.$$

Тем самым доказано (6.5).

Далее,

$$\varepsilon_{Nf/\alpha} = \varepsilon_{\frac{Nf}{L}/\alpha} = \varepsilon_{r_u(x)/\alpha} = \varepsilon_{r_u(x)/x} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} = \frac{r'_u\left(x\right) x}{r_u\left(x\right)} \cdot \varepsilon_{x/\alpha},$$

$$\varepsilon_{N/\alpha} = \varepsilon_{Nf/\alpha} - \varepsilon_{f/\alpha} = \frac{r'_u\left(x\right)}{r_u\left(x\right)} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \varepsilon_{f/\alpha},$$

что и доказывает (6.4) и (6.3) соответственно.

8.7. Доказательство утверждения 6.2

Используем следующие уравнения оптимальности:

$$\varepsilon_u(x) = \frac{cxL}{cxL + f}, \tag{8.24}$$

$$c'_f xL + 1 = 0, \tag{8.25}$$

$$N = \frac{L}{cxL + f}. \tag{8.26}$$

Продифференцируем (8.24) как неявную функцию от α:

$$\left(\varepsilon_u(x) - \frac{cxL}{cxL+f}\right)'_\alpha + \left(\varepsilon_u(x) - \frac{cxL}{cxL+f}\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} +$$

$$+ \left(\varepsilon_u(x) - \frac{cxL}{cxL+f}\right)'_f \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

или, в эластичностях,

$$-\frac{c'_\alpha xLf\alpha}{(cxL+f)^2} + \left(\varepsilon'_u(x)x - \frac{cfLx}{(cxL+f)^2}\right) \cdot \varepsilon_{x/\alpha} -$$

$$-\frac{\left(\varepsilon_{c/f} - 1\right) cxLf}{(cxL+f)^2} \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0,$$

т.е.

$$\varepsilon'_u(x)x \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \frac{cxLf}{(cxL+f)^2} \cdot \left(\varepsilon_{x/\alpha} + \varepsilon_{c/\alpha} + \varepsilon_{c/f}\varepsilon_{f/\alpha} - \varepsilon_{f/\alpha}\right) = 0.$$

В силу (8.14) и (8.11), имеем

$$(1 - \varepsilon_u - r_u)\varepsilon_u \varepsilon_{x/\alpha} - (1 - \varepsilon_u)\varepsilon_u \left(\varepsilon_{c/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha} + \left(\varepsilon_{c/f} - 1\right) \varepsilon_{f/\alpha}\right) = 0,$$

т.е.,

$$r_u \cdot \varepsilon_{x/\alpha} + (1 - \varepsilon_u) \cdot \varepsilon_{c/\alpha} + (1 - \varepsilon_u) \left(\varepsilon_{c/f} - 1\right) \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0,$$

т.е., используя (4.3),

$$r_u \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} + \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0. \tag{8.27}$$

Продифференцируем (8.25) как неявную функцию от α :

$$\left(c'_f xL + 1\right)'_\alpha + \left(c'_f xL + 1\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left(c'_f xL + 1\right)'_f \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

или, в эластичностях,

$$c''_{f\alpha} xL + c'_f L \cdot \frac{x}{\alpha} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} + c''_{ff} xL \cdot \frac{f}{\alpha} \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0,$$

или

$$\varepsilon_{c'_f/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha} - r_{c/f} \cdot \varepsilon_{f/\alpha} = 0,$$

или, выразив $\varepsilon_{f/\alpha}$,

$$\varepsilon_{f/\alpha} = \frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha}}{r_{c/f}}. \tag{8.28}$$

Подставим (8.28) в (8.27):

$$r_u \cdot \varepsilon_{x/\alpha} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c/\alpha} + \varepsilon_{c/f} \cdot \frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha} + \varepsilon_{x/\alpha}}{r_{c/f}} = 0,$$

т.е.

$$\left(r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}\right) \cdot \varepsilon_{x/\alpha} + \varepsilon_{c/f} \cdot \left(-\varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c'_f/\alpha}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{x/\alpha} = -\frac{-\varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} \cdot \varepsilon_{c/f}. \tag{8.29}$$

Поэтому, в силу (4.2), (5.1) и (5.2),

$$\varepsilon_{x/\alpha} > 0,$$

и, кроме того, в силу (8.28),

$$\varepsilon_{f/\alpha} > 0.$$

Тем самым доказано (6.6) и (6.7).

Далее, продифференцируем (8.26) как неявную функцию от α :

$$\left(N - \frac{L}{cxL+f}\right)'_\alpha + \left(N - \frac{L}{cxL+f}\right)'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} +$$

$$+ \left(N - \frac{L}{cxL+f}\right)'_f \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \left(N - \frac{L}{cxL+f}\right)'_N \cdot \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0,$$

или, в эластичностях,

$$\frac{L^2 c'_\alpha x}{(cxL+f)^2} + \frac{L^2 c}{(cxl+f)^2} \cdot \frac{x}{\alpha} \cdot \varepsilon_{x/\alpha} + \frac{N}{\alpha} \cdot \varepsilon_{N/\alpha} = 0.$$

Используя (8.26) и (8.24), получаем

$$\frac{Lc'_\alpha x\alpha}{cxL+f}+\frac{Lcx}{cxL+f}\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+\varepsilon_{N/\alpha}=0,$$

или

$$\varepsilon_u\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_u\varepsilon_{x/\alpha}+\varepsilon_{N/\alpha}=0,$$

поэтому

$$\varepsilon_{N/\alpha}=-\varepsilon_u\cdot(\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{x/\alpha}),$$

что и доказывает (6.8).

Докажем (6.9). Имеем

$$\varepsilon_{Nf/\alpha}=\varepsilon_{N/\alpha}+\varepsilon_{f/\alpha}=-\varepsilon_u\cdot(\varepsilon_{c/\alpha}+\varepsilon_{x/\alpha})+\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}+\varepsilon_{x/\alpha}}{r_{c/f}}=$$

$$=\left(\frac{1}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\right)\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}=$$

(используя (4.3))

$$=\frac{1}{r_{c/f}}\cdot(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{x/\alpha}+\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}=$$

(подставляя (8.29))

$$=-\frac{(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_{c/f}}\cdot\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\cdot r_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}+\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}=$$

$$=\left(1-\frac{(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}\right)\left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\right)=$$

$$=\frac{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}-(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\right)=$$

$$=\frac{r_u\cdot r_{c/f}+(1-(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u)\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\right)=$$

(используя (4.3))

$$=\frac{r_u\cdot r_{c/f}+\left(\left(1-\varepsilon_{c/f}\right)\cdot\varepsilon_u-(1-r_{\ln c})\cdot\varepsilon_u\right)\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\right)=$$

$$=\frac{r_u\cdot r_{c/f}+r_{c/f}\cdot\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/f}}{r_u\cdot r_{c/f}+\varepsilon_{c/f}}\cdot\left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}}-\varepsilon_u\cdot\varepsilon_{c/\alpha}\right)=$$

$$= \frac{\left(r_u + \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/f}\right) \cdot r_{c/f}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha}\right) =$$

(используя (4.3))

$$= \frac{(r_u + \varepsilon_u - 1) \cdot r_{c/f}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha}\right) =$$

$$= \frac{(r_{\ln u} - 1) \cdot r_{c/f}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_{c/f}} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha}\right),$$

что и есть (6.9).

В силу (5.1), (4.2) и (5.2),

$$\frac{r_{c/f}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}} > 0,$$

$$\frac{\varepsilon_{c'_f/\alpha} - \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f}}{r_{c/f}} > 0,$$

следовательно, знак $\varepsilon_{Nf/\alpha}$ зависит от знака $(r_{\ln u} - 1)$, как и показано в табл. 2.

Далее, в силу (3.10) и (8.13),

$$1 - r_{\ln u}(x) = 1 - \varepsilon_u(x) - r_u(x) = 1 - \varepsilon_u(x) + \varepsilon_{u'}(x) =$$

$$= \frac{(1 - \varepsilon_u(x) + \varepsilon_{u'}(x))\, \varepsilon_u(x)}{\varepsilon_u(x)} = \frac{\varepsilon'_u(x)\, x}{\varepsilon_u(x)} = \varepsilon_{\varepsilon_u}(x).$$

Итак,

$$1 - r_{\ln u}(x) = \varepsilon_{\varepsilon_u}(x). \tag{8.30}$$

Подставим (6.6) в (6.8):

$$\varepsilon_{N/\alpha} = -\varepsilon_u \cdot \frac{\varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/\alpha} \cdot \varepsilon_{c/f} + \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f} - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_c}.$$

Преобразуем числитель:

$$\varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/\alpha} \cdot \varepsilon_{c/f} + \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_u \cdot \varepsilon_{c/\alpha} \cdot r_{c/f} - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha} =$$

$$= \varepsilon_{c/\alpha} \cdot \left(\left(r_u + \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_u\right) \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}\right) - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha} =$$

(в силу (4.3))

$$= \varepsilon_{c/\alpha} \cdot \left((r_u + \varepsilon_u - 1) \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}\right) - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha} =$$

$$= \varepsilon_{c/\alpha} \cdot \big((r_{\ln u} - 1) \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}\big) - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha}.$$

В силу (8.30),

$$\varepsilon_{N/\alpha} = -\varepsilon_u \cdot \frac{\varepsilon_{c/\alpha} \cdot \big(\varepsilon_{\varepsilon_u}(x) \cdot r_{c/f} + \varepsilon_{c/f}\big) - \varepsilon_{c/f} \cdot \varepsilon_{c'_f/\alpha}}{r_u \cdot r_{c/f} + \varepsilon_c}.$$

В силу (4.2), (5.1) и (5.2), знак числителя, а следовательно и знак $\varepsilon_{N/\alpha}$, однозначно определяется только в случае, когда $\varepsilon_{\varepsilon_u} > 0$, т.е. только в случае, когда $\varepsilon'_u > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bykadorov I., Kokovin S. and Zhelobodko E. *Investments in Productivity under Monopolistic Competition: Large Market Advantage* // The Economic Education and Research Consortium, 2013. Working Paper No 13/08E.

2. Dixit A. and Stiglitz J. *Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity* // American Economic Review. 1977. V. 67. N. 3. P. 297–308.

3. Krugman P.R. *Increasing returns, monopolistic competition, and international trade* // Journal of International Economics. 1974. V. 9. P. 469–479.

4. Vives X. *Innovation and competitive pressure*// The Journal of Industrial Economics. 2008. V. 56. Iss. 3. P. 419–469.

5. Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M. and Thisse J.-F. *Monopolistic competition in general equilibrium: beyond the CES* // 2011, CPSE Working Papers halshs-00566431, HAL.

6. Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M. and Thisse J.-F. *Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the Constant Elasticity of Substitution*// Econometrica. 2012. V. 80. Iss. 6. P. 2765–2784.

MONOPOLISTIC COMPETITION MODEL: THE INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL PROGRESS ON EQUILIBRIUM AND SOCIAL OPTIMALITY

Irina V. Antoshchenkova, NRU Higher School of Economics (airinaant@gmail.com).
Igor A. Bykadorov, Sobolev Institute of Mathematics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, NRU HSE, NRU NSU, Cand.Sc, docent (bykadorov.igor@mail.ru).

Abstract: We consider a monopolistic competition model with endogenous choice of technology in the closed economy case. The aim is to make comparative statistics of equilibrium and social optimal solutions with respect to "technological innovation" parameter which influences on costs. Key findings: with the growth of innovation and investment in the production increase; behavior of the equilibrium variables depends only on the elasticity of demand; behavior of the socially optimal variables depends only on the elasticity of utility; behavior of the equilibrium and socially optimal variables does not depend on the properties of the cost as a function of R&D.

Keywords: monopolistic competition, endogenous choice of investments in R&D, technological progress, general equilibrium, social optimality, comparative statistics.