Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.2, с. 42–59

УДК 519.833
ББК 22.18

РАВНОВЕСИЯ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ В ЦЕНОВОЙ ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА-ЭДЖВОРТА

Алексей Б. Искаков*
Михаил Б. Искаков
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: isk_alex@mail.ru, mih_iskakov@mail.ru

В статье исследуется модель ценовой дуополии Бертрана-Эджворта с помощью концепции равновесий в безопасных стратегиях. Эта концепция описывает модель осторожного поведения игроков в некооперативных играх. Она удобна для изучения игр, в которых учет угроз со стороны других игроков являются важным фактором при принятии решений. Показано, что в некоторых случаях, когда в ценовой игре Бертрана-Эджворта не существует равновесия Нэша, в ней существует единственное равновесие в безопасных ценах, когда оба игрока устанавливают одинаковую цену, которая меньше монопольной цены. В случае такого равновесия игроки ведут себя осторожно и понижают свою цену ниже монопольной, чтобы застраховаться от угрозы демпинга цен со стороны конкурента. В статье сформулирован и доказан критерий существования равновесия в безопасных стратегиях.

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-00131-а

Ключевые слова: дуополия Бертрана-Эджворта, равновесия в безопасных стратегиях, ограниченные производственные мощности, некооперативные игры.

1. Введение

В модели ценовой конкуренции Бертрана-Эджворта несколько фирм (олигополистов) устанавливают цену на однородный товар при условии ограниченности их производственной мощности. Хорошо известно, что в этой модели может не быть равновесия Нэша (см., например [8]). Пусть функция спроса $D(p)$ монотонно убывает с ростом цены p, а функция выручки $pD(p)$ строго вогнута и достигает своего максимума при монопольной цене p_M. Когда $D(p_M) \geq S_1 + S_2$ в модели дуополии Бертрана-Эджворта существует единственное ценовое равновесие Нэша (p^*, p^*) такое, что $D(p^*) = S_1 + S_2$. Когда $D(p_M) < < S_1 + S_2$, равновесия Нэша (в чистых стратегиях) в ценовой игре не существует. Предпринималось несколько попыток восстановить концепцию равновесия в данной модели. Например, д'Апремон и Габжевич [8] предложили концепцию квази-монополии, которая восстанавливает существование псевдо-равновесия, когда производственная мощность одного игрока значительно меньше производственной мощности другого. Дасгупта и Маскин [13] и Диксон [14] доказали существование равновесия в смешанных стратегиях. Тем не менее, его конкретный вид оказалось трудно определить. Аллен и Хэллвиг [5] смогли показать, что на большом рынке с большим числом фирм множество средней цены будет стремиться к конкурентной цене.

В этой статье мы анализируем модель дуополии Бертрана-Эджворта, используя концепцию равновесий в безопасных стратегиях (РБС), которая описывает модель осторожного поведения в некооперативных играх [18, 19]. РБС подходят для изучения игр, в которых учет угроз со стороны других игроков является важным фактором при принятии решений. Этот подход также полностью соответствует теории рефлексивности [4] при анализе структуры взаимных угроз, возникающих в играх с большим количеством участников. Данная концепция оказалась эффективной и позволила найти равновесные положения в некоторых хорошо известных экономических играх, которые не имеют равновесий Нэша [21]. В частности, этот подход был успешно применен при исследовании классической модели пространственной конкуренции Хотеллинга с линейными транспортными тарифами [17]. В ценовой игре Хотеллинга не существует равновесия Нэша, когда игроки выбирают расположения слишком близко друг к другу [7]. Тем не менее, в игре существует единственное ценовое РБС для всех парных расположений игроков, если предположить, что дуополисты страхуют себя от угрозы быть вытесненными с рынка в результате ценового демпинга со стороны конкурента [2, 20]. РБС были также успешно найдены для модели состязания, описанной Таллоком как борьба за ренту [24, 25]. Хорошо известно, что в состязании двух игроков не существует равновесия Нэша, когда параметр функции успеха превышает двойку. Тем не менее, РБС в этом состязании существует всегда. Причем, в том случае, когда параметр функции успеха превышает двойку, это равновесие единственно с точностью до перестановки игроков, и оно дает более низкую диссипацию ренты, чем соответствующее решение Нэша в смешанных стратегиях [22]. Предложенная концепция РБС может быть также применена к исследованию соревновательных систем стимулирования [3] и рассматриваться в качестве одного из перспективных направлений теоретико-игрового моделирования [1].

Цель данной статьи – проанализировать с помощью концепции РБС оригинальную модель ценовой дуополии Бертрана-Эджворта с ограниченными производственными мощностями, которая может не иметь равновесия Нэша. Мы показываем, что в некоторых случаях, когда не существует равновесия Нэша, в ней существует единственное РБС, когда оба игрока устанавливают одинаковую цену, которая меньше монопольной цены. Соответствующую разницу цен можно интерпретировать как дополнительную плату игроков за поддержание своей безопасности от угрозы демпинга цен со стороны конкурента. Мы сформулировали и доказали соответствующий критерий существования РБС.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована исследуемая модель Бертрана-Эджворта. В разделе 3 представлена концепция РБС, которую мы будем использовать для анализа ценовой игры дуополистов. В разделе 4 равновесия в безопасных ценах определяются для наиболее простого случая линейной функции спроса. В разделе 5 приводятся обобщенные результаты для строго вогнутой функции выручки. В заключении мы резюмируем и обсуждаем полученные результаты.

2. Дуополия Бертрана-Эджворта

В этом разделе мы рассмотрим модель выбора цен дуополистами с ограниченными производственными мощностями, которая возникла в работах Бертрана (1883) [11] и Эджворта (1925) [16]. Рассмотрим рынок некоторого однородного продукта с непрерывной строго убывающей функцией потребительского спроса $D(p)$. В отрасли имеются две фирмы $i = 1, 2$ с ограниченными производственными мощностями S_i такими, что $D(0) \geq S_1 + S_2$. Следуя работе Эджворта, предположим, что эти пределы являются физическими ограничениями и не зависят от цены. Фирмы устанавливают свои цены p_i и играют некооперативно. Фирма, установившая меньшую цену, удовлетворяет спрос до предела своей производственной мощности, а остаточный спрос удовлетворяется другой фирмой.

Все потребители одинаковы и покупают товары по наименьшей доступной на рынке цене в соответствии с принципом «первый пришел – первым обслужен» («first-come-first-serve»). Следуя работам Шубика [23] и Бекманна [9], предположим в нашем анализе, что остаточный спрос для фирмы, предлагающей более высокую цену, пропорционален общему спросу при этой цене. Если дуополисты устанавливают одинаковые цены, то они делят рынок пропорционально их производственным мощностям. Формально определим функции выигрыша игроков следующим образом:

$$
\begin{aligned}
u_1(p_1,p_2) &= \begin{cases} p_1 \min\{S_1, D(p_1)\}, & p_1 < p_2\,, \\ p_1 \min\{S_1, \frac{S_1}{S_1+S_2} D(p_1)\}, & p_1 = p_2\,, \\ p_1 \min\{S_1, \frac{D(p_1)}{D(p_2)} \max\{0, D(p_2) - S_2\}\}, & p_1 > p_2\,, \end{cases} \\
u_2(p_1,p_2) &= \begin{cases} p_2 \min\{S_2, D(p_2)\}, & p_2 < p_1\,, \\ p_2 \min\{S_2, \frac{S_2}{S_1+S_2} D(p_2)\}, & p_2 = p_1\,, \\ p_2 \min\{S_2, \frac{D(p_2)}{D(p_1)} \max\{0, D(p_1) - S_1\}\}, & p_2 > p_1\,. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

В частном случае линейной функции спроса $D(p) = 1 - p$, который мы будем рассматривать ниже, целевые функции игроков можно записать как:

$$u_1(p_1,p_2) = \begin{cases} p_1 \min\{S_1, 1-p_1\}, \quad p_1 < p_2\,, \\ p_1 \min\{S_1, \frac{S_1}{S_1+S_2}(1-p_1)\}, \quad p_1 = p_2\,, \\ p_1 \min\{S_1, \frac{(1-p_1)}{(1-p_2)} \max\{0, 1-p_2-S_2\}\}, \quad p_1 > p_2\,, \end{cases}$$
$$u_2(p_1,p_2) = \begin{cases} p_2 \min\{S_2, 1-p_2\}, \quad p_2 < p_1\,, \\ p_2 \min\{S_2, \frac{S_2}{S_1+S_2}(1-p_2)\}, \quad p_2 = p_1\,, \\ p_2 \min\{S_2, \frac{(1-p_2)}{(1-p_1)} \max\{0, 1-p_1-S_1\}\}, \quad p_2 > p_1\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Исследование этого случая позволит нам относительно просто получить главные результаты в разделе 4. Тем не менее, далее эти результаты будут обобщены на строго вогнутые функции выручки в разделе 5.

3. Равновесия в безопасных стратегиях

В этом разделе мы определим концепцию решения, которую будем использовать для анализа модели ценовой дуополии Бертрана-Эджворта (2.1). Ниже приводятся определения равновесия в безопасных стратегиях (РБС) из [21]. Рассмотрим некооперативную игру n игроков в нормальной форме $G = (i \in N, x_i \in X_i, u_i \in R)$. Определение РБС опирается на понятие угрозы и на понятие безопасной стратегии.

Определение 3.1. *Угрозой игрока j игроку i в профиле x называется пара профилей $\{x, (x'_j, x_{-j})\}$ такая, что $u_j(x'_j, x_{-j}) > u_j(x)$ и $u_i(x'_j, x_{-j}) < u_i(x)$. При этом профиль x называется содержащим угрозу игроку i со стороны игрока j.*

Определение 3.2. *Стратегия x_i игрока i называется безопасной стратегией игрока i при заданных стратегиях x_{-i} всех остальных игроков, если профиль x не содержит угроз игроку i. Профиль стратегий x называется безопасным профилем, если все его стратегии безопасны.*

Иными словами, угроза означает ситуацию, в которой одному игроку выгодно ухудшить положение другого. В безопасном профиле никто не может увеличить выигрыш односторонним отклонением и одновременно уменьшить при этом выигрыш другого игрока.

Определение 3.3. *Безопасным отклонением игрока i от профиля x называется стратегия x_i' такая, что $u_i(x_i', x_{-i}) > u_i(x)$ и $u_i(x_i', x_j', x_{-ij}) \geq u_i(x)$ для любой угрозы $\{(x_i', x_{-i}), (x_i', x_j', x_{-ij})\}$ игрока $j \neq i$ игроку i.*

В определении есть два условия. Во-первых, безопасное отклонение увеличивает выигрыш игрока. Во-вторых, его дополнительный выигрыш при безопасном отклонении не меньше, чем потери, которые могут возникнуть в случае реализации ответных угроз другими игроками. Важно отметить, что безопасное отклонение не обязательно означает отклонение в безопасный профиль. После безопасного отклонения профиль (x_i', x_{-i}) может содержать угрозы игроку i. Однако, реализация этих угроз не может сделать его выигрыш меньше, чем в исходном профиле x. Мы предполагаем, что игроки, стремящиеся максимизировать свой выигрыш безопасно, будут выбирать безопасные отклонения.

Определение 3.4. *Безопасный профиль стратегий называется равновесием в безопасных стратегиях (РБС), если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш в этом профиле безопасным отклонением.*

В определении РБС есть два условия. В профиле не должно содержаться угроз, и не должно быть возможности безопасно отклониться. Второе условие неявно предполагает, что игроки в РБС стремятся максимизировать выигрыш на множестве своих безопасных стратегий.

Любое равновесие Нэша не содержит угроз игрокам, поэтому оно является безопасным профилем. Кроме того, в равновесии Нэша ни один игрок не может увеличить свой выигрыш никаким односторонним отклонением (в том числе и безопасным). Оба условия определения РБС выполняются. Отсюда получаем:

Утверждение 3.1. *Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.*

Равновесие Нэша является профилем, в котором стратегия каждого игрока является его наилучшим ответом на стратегии других игроков. Подобным же образом оказывается, что стратегия каждого игрока в РБС является его наилучшим *безопасным* ответом на стратегии других игроков.

Определение 3.5. *Безопасная стратегия x_i игрока i является его наилучшим безопасным ответом (НБО) на стратегии x_{-i} всех других игроков, если игрок i не имеет более выгодной безопасной стратегии при x_{-i}. Профиль x^* называется профилем наилучших безопасных ответов (или НБО-профилем), если стратегии всех игроков являются наилучшими безопасными ответами.*

РБС является безопасным профилем по определению. Оно также должно быть наилучшим безопасным ответом для каждого игрока, так как в противном случае существует игрок, который может отклониться в свой наилучший безопасный ответ, и таким образом, увеличить свой выигрыш безопасным отклонением. Отсюда мы получаем:

Утверждение 3.2. *Любое равновесие в безопасных стратегиях является профилем наилучших безопасных ответов.*

Это свойство позволяет сформулировать практический метод нахождения РБС в три этапа: (i) проанализировать взаимные угрозы игроков и определить условия безопасности профиля, (ii) найти все НБО-профили в результате решения задачи максимизации игроками их выигрышей в множестве безопасных профилей, (iii) проверить выполнение определений РБС для найденных НБО-профилей.

4. Решение в безопасных ценах для линейного спроса

В этом разделе найдем РБС в ценовой модели Бертрана-Эджворта в простейшем случае линейной функции спроса $D(p) = 1 - p$. Это позволит проиллюстрировать логику предлагаемого подхода, не загромождая ее техническими деталями. Прежде всего, проанализируем угрозы, существующие между игроками, и определим множество безопасных профилей.

Утверждение 4.1. *Профиль (p_1, p_2) является безопасным профилем ценовой игры дуополии Бертрана-Эджворта с линейной функцией спроса $D(p) = 1-p$ и целевыми функциями (2.2) тогда и только* *тогда, когда он лежит в множестве* $M = \{(p_1, p_2) : 0 < p_i \le p^*,\ i = 1, 2\}$, *где* $p^* = 1 - S_1 - S_2$.

Доказательство. **(1)**. Рассмотрим случай $p^* < p_1 < p_2$. Если $1 - p_1 > S_1$, то игрок 1 всегда угрожает игроку 2 слегка повысить цену p_1. Если $1 - p_1 \le S_1$, то игрок 2 может уменьшить свою цену до $\tilde{p}_2 < p_1$. В этом случае, в соответствии с (2.2): $\tilde{u}_1(p_1, \tilde{p}_2) = p_1(1 - p_1)\frac{\max\{0, 1-p_2-S_2\}}{1-p_2} < p_1(1 - p_1) = u_1(p_1, p_2)$ и $\tilde{u}_2(p_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_2 \min\{S_2, 1 - p_2\} > 0 = u_2(p_1, p_2)$, и потому всегда существует угроза игрока 2 игроку 1. Симметрично, если $p^* < p_2 < p_1$, то либо игрок 2 угрожает игроку 1, либо наоборот. Если $p^* < p_2 = p_1$, то для обоих игроков существует взаимная угроза ценового демпинга при небольшом уменьшении цены конкурентом.

(2). Если $p_1 \le p^* < p_2$, то игрок 1 всегда угрожает игроку 2 увеличить свою цену до величины $p^* + 0 < p_2$, которая превышает p^* на произвольно малую величину. Действительно, в этом случае $1 - p_1 > 1 - (p^* + 0) \ge S_1$ и в соответствии с (2.2) $u_1(p_1, p_2) = p_1 S_1 < (p^* + 0)S_1 = u_1(p^* + 0, p_2)$, т.е. игрок 1 увеличивает свой выигрыш. С другой стороны, целевая функция игрока 2 согласно (2.2) при $p < p_2$ имеет вид: $u_2(p, p_2) = p_2 \min\left\{S_2, (1 - p_2)\left(1 - \frac{S_1}{1-p}\right)\right\}$. Эта функция при $p \le 1 - S_1 - \frac{S_1 S_2}{1-p_2-S_2}$ равна константе $p_2 S_2$, а при $1 - S_1 - \frac{S_1 S_2}{1-p_2-S_2} < p < p_2$ строго убывает. Так как в рассматриваемом случае $p_2 > p^* = 1 - S_1 - S_2$ и соответственно $\frac{S_1}{1-p_2-S_2} > 1$, то в этом случае $1 - S_1 - \frac{S_1 S_2}{1-p_2-S_2} < p^* = 1 - S_1 - S_2 < p_2$, и поэтому из $p_1 < p^*$ следует, что $u_2(p_1, p_2) > u_2(p^*, p_2)$, т.е. увеличение цены игроком 1 до $p^* + 0$ действительно представляет угрозу игроку 2. Симметрично, если $p_2 \le p^* < p_1$, то игрок 2 всегда угрожает игроку 1.

(3). Из доказанного выше следует, что все безопасные профили должны лежать в множестве $M = \{(p_1, p_2) : 0 < p_i \le p^*,\ i = 1, 2\}$. С другой стороны, если $p_1 \le p^*$, то $u_1(p_1, p_2) = S_1 p_1$ линейно возрастает по p_1 и не зависит от p_2. Поэтому для игрока 1 не существует никаких угроз. Симметрично, если $p_2 \le p^*$, то для игрока 2 тоже не существует никаких угроз. Поэтому (p_1, p_2) является безопасным профилем в игре (2.2) тогда и только тогда, когда он лежит в множестве $M = \{(p_1, p_2) : 0 < p_i \le p^*,\ i = 1, 2\}$. □

Найдем теперь все НБО-профили в множестве M всех безопасных профилей.

Утверждение 4.2. *В ценовой игре дуополии Бертрана-Эджворта с линейной функцией спроса $D(p) = 1 - p$ и целевыми функциями (2.2) существует единственный профиль наилучших безопасных ответов (p^*, p^*), где $p^* = 1 - S_1 - S_2$.*

Доказательство. В соответствии с определением 3.5 и утверждением 4.1 любой НБО-профиль должен лежать в множестве $M = \{(p_1, p_2) : 0 < p_i \leq p^*,\ i = 1, 2\}$ всех безопасных профилей, найденных в утверждении 3. В соответствии с (2.2) целевые функции игроков $u_1 = S_1 p_1$ и $u_2 = S_2 p_2$ возрастают в множестве M линейно по их ценам p_1 и p_2 соответственно. Поэтому в множестве M может быть только один НБО-профиль (p^*, p^*), так как в любом другом профиле M один из игроков всегда может слегка увеличить свою цену, оставаясь в множестве M, т.е. отклониться в более выгодную безопасную стратегию. Докажем, что профиль (p^*, p^*) действительно является НБО-профилем. Любое уменьшение цены в профиле (p^*, p^*) не выгодно для игроков. С другой стороны, как показано в пункте 2 доказательства утверждения 4.1 любое увеличение цены игроком в профиле (p^*, p^*) не является для него безопасным. Таким образом, ни один игрок не имеет более выгодной безопасной стратегии в (p^*, p^*), и этот профиль в рассматриваемой игре по определению является профилем наилучших безопасных ответов. □

В соответствии с утверждением 3.2 в ценовой игре дуополии Бертрана-Эджворта не может быть других РБС, кроме НБО-профиля (p^*, p^*), найденного в утверждении 4.2. Ниже мы сформулируем и докажем необходимое и достаточное условие, при выполнении которого НБО-профиль (p^*, p^*) является РБС.

Утверждение 4.3. *В ценовой игре дуополии Бертрана-Эджворта с линейной функцией потребления $D(p) = 1 - p$ и функциями выигрышей (2.2) существует равновесие в безопасных стратегиях (p^*, p^*), где $p^* = 1 - S_1 - S_2$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1 - S_1}{2} \leq p^* \quad \text{и} \quad \frac{1 - S_2}{2} \leq p^*. \tag{4.1}$$

Когда $p^* \geq p_M = \frac{1}{2}$, это равновесие в безопасных стратегиях является равновесием Нэша. Других РБС в игре нет.

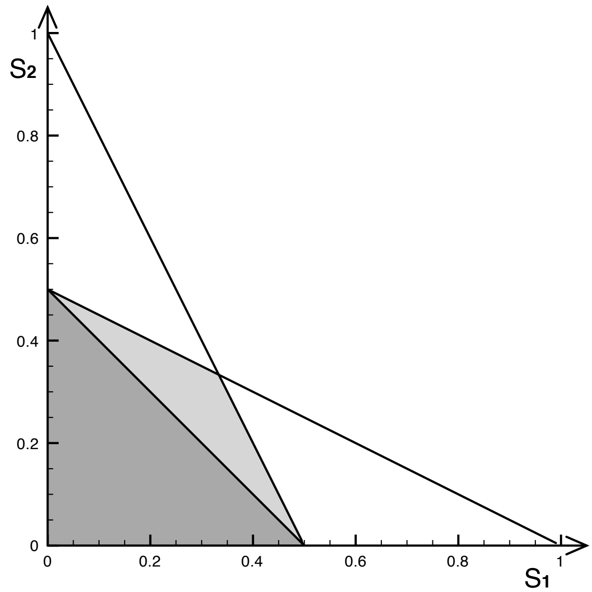

Рисунок 1. Равновесия в безопасных ценах в дуополии Бертрана-Эджворта с $D(p) = 1 - p$ в пространстве параметров производственных мощностей (S_1, S_2). В темно-серой области РБС совпадает с равновесием Нэша, в светло-серой области существует единственное РБС и не существует равновесия Нэша, в белой области нет ни равновесия Нэша, ни РБС.

Равновесия в безопасных ценах в пространстве параметров производственных мощностей (S_1, S_2) показаны на Рис.1. Профиль (p^*, p^*) является равновесием Нэша, если $S_1 + S_2 \leq \frac{1}{2}$ (темно-серая область). При более слабых условиях (4.1) этот профиль является РБС. Область РБС, которые не являются равновесиями Нэша, закрашена на Рис.1 светло-серым цветом. Если условия (4.1) не выполняются, то этот профиль больше не является РБС и соответствует неустойчивому НБО-профилю. Найденное РБС решение можно сравнить с общей ценой, которая бы максимизировала суммарную прибыль в отрасли $p_M = \max\{1 - S_1 - S_2, \frac{1}{2}\}$. Когда равновесие Нэша существует (т.е. когда $S_1 + S_2 \leq \frac{1}{2}$), обе цены совпадают. Если, однако, РБС существует, а равновесия Нэша при этом не существует (т.е. если $S_1 + S_2 > \frac{1}{2}$ и выполняется (4.1)), то обе фирмы предлагают одинаковые РБС цены $p^* = 1 - S_1 - S_2$, которые меньше монопольной цены $p_M = \frac{1}{2}$. Разницу между монопольной и РБС ценами $S_1 + S_2 - \frac{1}{2}$ можно интерпретировать как дополнительное снижение цены, необходимое игрокам, чтобы обезопасить себя от угрозы ценового демпинга со стороны конкурента. Такой учет взаимных угроз соответствует логике осторожного поведения, заложенной в концепции РБС.

Доказательство. **(1) Необходимость**. Рассмотрим профиль (p^*, p^*) и докажем условия (4.1). Предположим, например, что $p^* < \hat{p}(S_2) \equiv \equiv \frac{1-S_2}{2}$. Тогда игрок 1 может отклониться $p^* \to \hat{p}$. Его выигрыш увеличится, поскольку $p^* < \hat{p} \le p_M = \frac{1}{2}$, и $u_1(p_1, p_2)$ строго возрастает по p_1 при $p_1 \le p_M = \frac{1}{2}$ в соответствии с (2.2). Любая ответная угроза игрока 2 в соответствии с (2.2) не может сделать выигрыш игрока 1 меньше, чем $\min\limits_{p_2} u_1(\hat{p}, p_2) = \min\limits_{p_2 < \hat{p}} u_1(\hat{p}, p_2) = u_1(\hat{p}, p_2)|_{p_2 = \hat{p} - 0} = = \hat{p} \min\{S_1, 1 - \hat{p} - S_2\}$. Выигрыш игрока 1 в начальном профиле не превосходит этой величины. В самом деле, согласно (2.2) этот выигрыш равен $u_1(p^*, p^*) = p^* \min\left\{S_1, \frac{S_1(1-p^*)}{S_1+S_2}\right\} = p^* S_1$, и требуется доказать неравенство $p^* S_1 \le \hat{p} \min\{S_1, 1 - \hat{p} - S_2\}$. Оно следует из очевидного неравенства $p^* S_1 < \hat{p} S_1$ (так как $p^* < \hat{p}$ по предположению) и из неравенства $p^* S_1 = (1 - S_1 - S_2) S_1 \le (1 - \hat{p} - S_2)\hat{p}$, которое следует из того, что $\hat{p} = \frac{1-S_2}{2} = \operatorname{argmax}\limits_{p} (1 - p - S_2) \cdot p$. Таким образом, после отклонения игрока 1 в $\hat{p} = \frac{1-S_2}{2}$ никакие ответные угрозы не могут сделать его выигрыш меньше, чем в исходном профиле (p^*, p^*), т.е. в соответствии с определением 3.3 это отклонение является безопасным отклонением. Поэтому профиль (p^*, p^*) не является РБС. Симметрично, если $p^* < \hat{p}(S_1) \equiv \frac{1-S_1}{2}$, то игрок 2 может совершить безопасное отклонение в $\hat{p}(S_1)$ и профиль (p^*, p^*) также не будет являться РБС. Необходимость условий (4.1) доказана.

(2) Достаточность. Предположим, что условия (4.1) выполняются (т.е. $\hat{p}(S_1) \le p^*$ и $\hat{p}(S_2) \le p^*$). Рассмотрим произвольное отклонение $p^* \to p_1$ игрока 1, и предположим, что оно является безопасным по определению 3.3. Если $p_1 < p^*$, то такое отклонение не может быть выгодным для игрока 1. Поэтому, предположим $p_1 > p^*$. Игрок 1 увеличивает свой выигрыш тогда и только тогда, когда $u_1(p^*, p^*) =$

$= p^* S_1 = p^* \frac{1-p^*-S_2}{1-p^*}(1-p^*) < u_1(p_1, p^*) = p_1 \frac{1-p^*-S_2}{1-p^*}(1-p_1)$, т.е. должно выполняться $p^*(1-p^*) < p_1(1-p_1)$. В таком случае, существует ответная угроза игрока 2 отклониться из профиля (p_1, p^*) в профиль произвольно близкий к (p_1, p_1-0). Из $p^* S_2 < p_1 S_2$ и $p^*(1-p^*) < p_1(1-p_1)$ следует, что игрок 2 увеличивает свой выигрыш при ответном отклонении. Выигрыш игрока 1 в этом профиле бесконечно близок к $u_1(p_1, p_1-0) = p_1 \min\{S_1, 1-p_1-S_2\}|_{p^*<p_1} = p_1(1-p_1-S_2)$. Поскольку $p(1-p-S_2)$ строго убывает при $p \geq \hat{p}(S_2) = \frac{1-S_2}{2}$, и $p_1 > p^* \geq \hat{p}(S_2) = \frac{1-S_2}{2}$, то $u_1(p^*, p^*) = p^*(1-p^*-S_2) > p_1(1-p_1-S_2) = u_1(p_1, p_1-0)$. Поэтому отклонение игрока в профиль (p_1, p^*) не является безопасным отклонением, и наше предположение было ошибочно. Симметрично доказывается, что произвольное отклонение игрока 2 также не является безопасным отклонением, когда выполнено (4.1). Таким образом, ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением в (безопасном) профиле (p^*, p^*). Следовательно, этот профиль по определению 3.4 является РБС. Достаточность условий (4.1) доказана.

(3) Условие равновесия Нэша. Из формул (2.2) можно легко проверить, что условие $p_M \leq p^*$ $(S_1 + S_2 \leq \frac{1}{2})$ является условием достижения максимума функциями $u_1(p_1) = u_1(p_1, p^*)$ и $u_2(p_2) = u_2(p^*, p_2)$ в точках $p_1 = p^*$ и $p_2 = p^*$ соответственно. Иными словами, это и есть условие достижения равновесия Нэша в профиле (p^*, p^*).

(4) Единственность РБС. Она следует из утверждения 3.2 и из единственности НБО-профиля, доказанной в утверждении 4.2. □

5. Решение для строго вогнутой функции выручки

Полученные выше результаты можно обобщить на более общий случай строго вогнутой функции выручки $pD(p)$. Хотя доказательства усложняются в деталях, их общая логика не меняется.

Утверждение 5.1. *Пусть функция выручки $pD(p)$ строго вогнута и достигает своего максимума в p_M. Тогда в ценовой игре дуополии Бертрана-Эджворта с функциями выигрышей (2.1) существует РБС (p^*, p^*), где $D(p^*) = S_1 + S_2$, тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} \arg\max\limits_{p>0}\{p(D(p)-S_1)\} \le p^*\,, \\ \arg\max\limits_{p>0}\{p(D(p)-S_2)\} \le p^*\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Если $p^* \ge p_M$, то указанное РБС является равновесием Нэша. Других РБС в игре нет.

Замечание 5.1. Поскольку функция выручки $pD(p)$ строго вогнута, то функция $p(D(p) - S)$ при заданном значении S также строго вогнута по p и достигает единственного максимума при $p > 0$. Поэтому выражение $\arg\max\limits_{p>0}\{p(D(p) - S)\}$ в (5.1) можно рассматривать как однозначную функцию S.

Доказательство утверждения 5.1 приводится в [21].

Условие (5.1) можно также легко сформулировать в дифференциальной форме.

Утверждение 5.2. *Если функция выручки $pD(p)$ дифференцируема, то условие (5.1) эквивалентно условию:*

$$\frac{d}{dp}\Big(pD(p)\Big)\Big|_{p=p^*} \le \min\{S_1, S_2\} \tag{5.2}$$

Доказательство. Можно легко проверить, что $\hat{p} = \arg\max\limits_{p>0}\{p(D(p)-$ $-S)\}$ $<=>$ $\frac{d}{dp}\Big(pD(p)\Big)\Big|_{p=\hat{p}} = S$. Кроме того, функция $\frac{d}{dp}\Big(pD(p)\Big)$ строго убывающая. Поэтому $\hat{p} \le p^*$ $<=>$ $\frac{d}{dp}\Big(pD(p)\Big)\Big|_{p=p^*} \le$ $\le \frac{d}{dp}\Big(pD(p)\Big)\Big|_{p=\hat{p}} = S$. Отсюда получаем эквивалентность условий (5.1) и (5.2). □

Полученные результаты в целом аналогичны результатам, полученным ранее для случая линейного спроса. В РБС обе фирмы устанавливают одинаковые цены, такие что рыночный спрос при этих ценах равняется суммарной производственной мощности. Если равновесная цена превышает или равняется монопольной цене, то найденное решение совпадает с хорошо известным равновесием Нэша. Однако, в РБС, которое не является равновесием Нэша, цены оказываются ниже монопольной цены. Соответствующую разницу можно интерпретировать как дополнительную плату за поддержание безопасности в ситуации, когда игроки ведут себя осторожно и страхуются от угрозы демпинга цен со стороны конкурента.

6. Заключение

В этой статье рассмотрена модель дуополии Бертрана-Эджворта с ограниченными производственными мощностями, которая может не иметь ценового равновесия Нэша. Хотя существование равновесия в смешанных стратегиях для этой модели и было доказано Диксоном [14], получить их явный вид оказалось не легко. Разными авторами выдвигались аргументы о том, что решение в смешанных стратегиях не является адекватным в контексте модели Бертрана-Эджворта. Поэтому было предложено несколько альтернативных подходов в качестве ответа на проблему несуществования равновесий в чистых стратегиях. Аллен и Хэллвиг [6] предложили модификацию игры, в которой фирмы выбирают количество товара, которое они согласны продать по каждой конкретной цене. Дастигар [12] предложил, что фирмы обязаны удовлетворить весь спрос по заявленной ими цене. Бенасси [10] дополнил модель Бертрана-Эджворта моделью продуктовой дифференциации. Диксон [15] исследовал модель Бертрана-Эджворта с дискретными ценами, когда фирмы не могут подрезать цену друг друга на произвольно малую величину. Все эти подходы в том или ином смысле меняют постановку исходной игры и предлагают специальную *ad hoc* модификацию модели Бертрана-Эджворта.

В качестве альтернативного подхода к анализу модели дуополии Бертрана-Эджворта мы предлагаем использовать концепцию равновесий в безопасных стратегиях (РБС). В статье представлена новая интуитивно-понятная формулировка РБС из [21]. Сформулированы и доказаны условия существования РБС в ценовой дуополии Бертрана-Эджворта, что позволяет расширить множество ценовых равновесий Нэша в игре. Когда найденная равновесная цена равна или превышает монопольную цену, РБС решение совпадает с хорошо известным равновесным решением Нэша. Однако, в тех РБС, которые не являются равновесиями Нэша, равновесная цена оказываются ниже монопольной цены. Соответствующую разницу между этими ценами можно интерпретировать как дополнительное снижение цены, на которое дуополисты готовы пойти, чтобы застраховаться от угрозы ценового демпинга в ходе конкуренции.

Хотя предложенный подход не решает полностью проблему несуществования равновесий Нэша в модели Бертрана-Эджворта, он тем не менее, может обладать рядом преимуществ. В отличие от упомянутых выше *ad hoc* концепций равновесия, разработанных в контексте модели Бертрана-Эджворта, РБС является общей концепцией равновесия, показавшей свою эффективность и позволившей найти равновесные положения в нескольких хорошо известных экономических играх, которые не имеют равновесий Нэша [21]. С другой стороны, в отличие от равновесий в смешанных стратегиях, РБС предлагает решение в явной форме, которое можно легко интерпретировать в терминах безопасного поведения.

Благодарности

Статья написана на основе доклада, прочитанного на Седьмой международной конференции «Теория игр и менеджмент» GTM 2013. Мы благодарим Л.А. Петросяна за любезное приглашение опубликовать эту статью в журнале «МТИ&П». Мы глубоко признательны К. Д'Апремону, который помог нам найти элегантную и интуитивно-понятную формулировку концепции РБС, а также вдохновил нас применить ее к модели Бертрана-Эджворта. Мы выражаем признательность Ф.Т. Алескерову и Д.А. Новикову за регулярные обсуждения концепции РБС на московских семинарах в Высшей школе экономики и Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова. Благодарим рецензента за внимательное прочтение статьи и полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-00131-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алескеров Ф.Т. *Теоретико-игровое моделирование: попытка краткого обсуждения и прогноза развития* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. Т. 17. Вып. 1. С. 181–184.

2. Искаков М.Б., Искаков А.Б. *Полное решение задачи Хотеллинга: концепция равновесия в безопасных стратегиях для игры*

определения цен // Журнал Новой экономической ассоциации. 2012. Т. 13. Вып. 1. С. 10–33.

3. Новиков Д.А. *Стимулирование в организационных системах.* Москва: СИНТЕГ, 2003.

4. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Рефлексивные игры.* Москва: СИНТЕГ, 2003.

5. Allen B., Hellwig M. *Bertrand-Edgeworth oligopoly in large markets* // Review of Economic Studies. 1986. V. 53. P. 175–204.

6. Allen B., Hellwig M. *Price-Setting Firms and the Oligopolistic Foundations of Perfect Competition* // The American Economic Review. 1986. V. 76. N 2. P. 387–392.

7. d'Aspremont C., Gabszewicz J. and Thisse J.-F. *On Hotelling's 'Stability in Competition'* // Econometrica. 1979. V. 47. N 5. P. 1145–1150.

8. d'Aspremont C., Gabszewicz J. *Quasi-Monopolies* // Economica. 1985. V. 52. N 206. P. 141–151.

9. Beckmann M.J. *Edgeworth-Bertrand duopoly revisited.* In: Operations Research – Verfahren, vol. III (Rudolf Henn et al. eds.), Sonderruck: Verlag, Anton Hain, Meisenheim, 1965.

10. Benassy J.-P. *Market Size and Substitutability in Imperfect Competition: A Bertrand-Edgeworth-Chamberlin Model?* // Review of Economic Studies. 1989. V. 56. N 2. P. 217–234.

11. Bertrand J. *Review of Cournot's 'Rechercher sur la theoric mathematique de la richesse'* // Journal des Savants. 1883. P. 499–508.

12. Dastidar K.G. *On the existence of pure strategy Bertrand equilibrium* // Economic Theory. 1995. V. 5. P. 19–32.

13. Dasgupta P., Maskin E. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, II: Applications* // Review Economic Studies. 1986. V. LIII. P. 27–41.

14. Dixon H.D. *The existence of mixed-strategy equilibria in a price-setting oligopoly with convex costs* // Economics Letters. 1984. V. 16. P. 205–212.

15. Dixon H.D. *Integer Pricing and Bertrand-Edgeworth Oligopoly with Strictly Convex Costs: Is It Worth More Than a Penny?* // Bulletin of Economic Research. 1993. V. 45. N 3. P. 257–268.

16. Edgeworth F.M. *Papers Relating to Political Economy I.* London: Macmillan, 1925.

17. Hotelling H. *Stability in Competition* // The Economic Journal. 1929. V. 39. N 153. P. 41–57.

18. Iskakov M.B. *Equilibrium in Safe Strategies* // Automation and Remote Control. 2005. V. 66. N 3. P. 465–478.

19. Iskakov M.B. *Equilibrium in Safety Strategies and equilibriums in objections and counter objections in noncooperative games* // Automation and Remote Control. 2008. V. 69. N 2. P. 278–298.

20. Iskakov M., Iskakov A. *Solution of the Hotelling's game in secure strategies* // Economics Letters. 2012. V. 117. P. 115–118.

21. Iskakov M., Iskakov A. *Equilibrium in secure strategies* // CORE Discussion Paper 2012/61, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), 2012.

22. Iskakov M., Iskakov A., Zakharov A. *Equilibria in secure strategies in the Tullock contest* // CORE Discussion Paper 2014/10, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE), 2014.

23. Shubik M. *A comparison of treatments of a duopoly problem (part II)* // Econometrica. 1955. V. 23. P. 417–431.

24. Tullock G. *The welfare costs of tariffs, monopoly and theft* // Western Economic Journal. 1967. V. 5. P. 224–232.

25. Tullock G. *Efficient rent seeking.* In: Toward a theory of the rent-seeking society (Buchanan J.M., Tollison R.D. and Tullock G., eds.). P. 97–112, A&M University Press: College Station, TX, 1980.

EQUILIBRIUM IN SECURE STRATEGIES IN THE BERTRAND-EDGEWORTH DUOPOLY

Alexey B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Dr.Sc. (isk_alex@mail.ru, iskakov@ipu.ru),
Mikhail B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Dr.Sc. (mih_iskakov@mail.ru).

Abstract: We analyze the Bertrand-Edgeworth duopoly model using a solution concept of Equilibrium in Secure Strategies (EinSS), which provides a model of cautious behavior in non-cooperative games. It is suitable for studying games, in which threats of other players are an important factor in the decision-making. We show that in some cases when Nash-Cournot equilibrium does not exist in the price duopoly of Bertrand-Edgeworth there is a unique EinSS, in which both players choose the same equilibrium price lower than the monopoly price. The difference between these prices can be interpreted as an additional reduction in price, which allows players to secure themselves against mutual threats of undercutting. We formulate and prove a criterion for the EinSS existence.

Keywords: Bertrand-Edgeworth duopoly, equilibrium in secure strategies, capacity constraints, cautious behavior.