

УДК 519.8

ББК 22.18

ПОТЕНЦИАЛ РОЗЕНТАЛЯ И ДИСКРЕТНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ДЕБРЕ–ГОРМАНА*

НИКОЛАЙ С. КУКУШКИН

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
119333, Москва, ул. Вавилова, 40
e-mail: ququns@inbox.ru

Ацикличность индивидуальных улучшений в обобщенной игре Розенталя (где суммы локальных выигрышей заменены произвольными правилами агрегирования) может быть установлена с помощью практически той же самой розенталевской конструкции, если все игроки пользуются квазисепарабельными правилами агрегирования. Любой универсальный сепарабельный порядок на конечном множестве может быть представлен комбинацией сложения и лексикографии.

Ключевые слова: динамика улучшений, ацикличность, сепарабельное агрегирование, игра Розенталя.

1. Введение

Предложенный Р. У. Розенталем [12] способ построения потенциала стратегической игры оказался исключительно плодотворным при изучении игр на сетях, формирования коалиций и т.п.; эта конструкция вдохновляла исследователей и в областях, где она не применима напрямую [10, 5, 6, 1, 13, 9, 4]. Она же послужила отправной точкой для предложенной Д. Мондерером и Л. С. Шепли [11] теории потенциальных игр.

©2014 Н.С. Кукушкин

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-07-00075).

Ключевая роль аддитивности в этой конструкции была продемонстрирована в [8]. Там были введены «обобщенные игры Розенталя», в которых игроки могут агрегировать локальные выигрыши произвольным образом, вместо обязательного сложения. В предположении непрерывности и строгой монотонности правил агрегирования была доказана необходимость аддитивности для гарантированного существования равновесия по Нэшу независимо от остальных характеристик игры.

Данная работа продолжает ту же линию исследования, но с еще более формалистическим оттенком. Во-первых, показано, что конструкция Розенталя может быть воспроизведена практически без изменений, если функции выигрыша всех игроков «квазисепарабельны», т.е. согласованы с универсальным сепарабельным порядком (предложение 3.1). Это относится, например, к агрегированию по минимуму («слабейшее звено»), которое согласовано с лексиминным порядком, хотя и не сепарабельно само.

Во-вторых, доказано, что любой универсальный сепарабельный порядок на конечном множестве может быть представлен комбинацией сложения и лексикографии (теорема 4.1). Этот результат может считаться дискретным аналогом знаменитой теоремы Дебре–Гормана [2, 3], см. также [14], хотя он и не может претендовать на сравнимую значимость. Предположение о непрерывности обсуждаемого порядка на связной области отброшено, но зато требуется его применимость к любой степени данного конечного множества (каковым свойством как раз и обладают аддитивное агрегирование или агрегирование по минимуму/максимуму).

Полученные результаты могут быть резюмированы прямо противоположными способами. С одной стороны, показано, что конструкция Розенталя применима к более широкому классу правил агрегирования, чем имелось в виду изначально. С другой стороны, это обобщение можно считать малосущественным, а тогда теорему 4.1 естественно считать отрицательным результатом, показывающим неприменимость конструкции Розенталя к принципиально другим правилам агрегирования.

2. Основные определения

Стратегическая игра Γ задается конечным множеством игроков N , а также множеством стратегий X_i и функцией выигрыша u_i на множестве $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ наборов стратегий для каждого $i \in N$. Каждое множество X_i предполагается конечным на протяжении всей работы.

Для каждого $i \in N$ обозначим $X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$. С любой стратегической игрой естественно ассоциируется бинарное отношение *индивидуального улучшения* на X_N ($i \in N, y_N, x_N \in X_N$):

$$y_N \triangleright_i x_N \Leftrightarrow [y_{-i} = x_{-i} \text{ и } u_i(y_N) > u_i(x_N)];$$

$$y_N \triangleright x_N \Leftrightarrow \exists i \in N [y_N \triangleright_i x_N].$$

По определению, *равновесие по Нэшу* – это *максимальный элемент* отношения \triangleright , т.е. такой набор стратегий $x_N \in X_N$, что $y_N \triangleright x_N$ невозможно ни для одного набора $y_N \in X_N$.

В терминологии Мондерера и Шепли [11] функция $P : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ называется *точным потенциалом* игры Γ , если $u_i(y_N) - u_i(x_N) = P(y_N) - P(x_N)$ при всех $i \in N, y_N, x_N \in X_N$ и $y_{-i} = x_{-i}$. Функция $P : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обобщенным ординальным потенциалом* игры, если $P(y_N) > P(x_N)$ всякий раз, когда $y_N, x_N \in X_N$ и $y_N \triangleright x_N$. Очевидным образом, точный потенциал является также обобщенным ординальным.

Поскольку предпочтения игроков в данной работе считаются *ординальными*, мы, следуя [7], будем называть *потенциалом* Γ антирефлексивное и транзитивное бинарное отношение \succ на X_N , удовлетворяющее условию:

$$\forall x_N, y_N \in X_N [y_N \triangleright x_N \Rightarrow y_N \succ x_N]. \quad (2.1)$$

Поскольку множество X_N конечно, наличие потенциала в этом смысле эквивалентно существованию обобщенного ординального потенциала [11, лемма 2.5] и из него непосредственно вытекает существование равновесия по Нэшу.

Множество игроков N в *игре Розенталя* [12] (congestion game) может быть произвольным конечным, а стратегии и функции выигрыша порождаются следующей конструкцией. Задано конечное множество объектов A ; для каждого $\alpha \in A$ задана *локальная функция*

выигрыша $\varphi_\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; каждая стратегия $x_i \in X_i$ ($i \in N$) является подмножеством A . Для заданного $x_N \in X_N$ и для каждого $\alpha \in A$, обозначим $N(\alpha, x_N) = \{i \in N \mid \alpha \in x_i\}$ и $n(\alpha, x_N) = |N(\alpha, x_N)|$. Теперь функция выигрыша каждого игрока i – это

$$u_i(x_N) = \sum_{\alpha \in x_i} \varphi_\alpha(n(\alpha, x_N)). \quad (2.2)$$

В наиболее привычной интерпретации A – множество ребер ориентированного графа, а каждое множество X_i состоит из путей с заданными началом и концом. При такой интерпретации естественно предполагать функции φ_α убывающими. Однако это предположение не нужно для самых базовых результатов; его не было в [12] и не будет здесь.

Функция

$$P(x_N) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{k=1}^{n(\alpha, x_N)} \varphi_\alpha(k) \quad (2.3)$$

является точным потенциалом игры Розенталя [12]; следовательно, строгий порядок на X_N , заданный этой функцией, $y_N \succ x_N \iff P(y_N) > P(x_N)$, является потенциалом в смысле (2.1).

Понятие *обобщенной игры Розенталя* было введено в [8]. Грубо говоря, речь идет об игре с той же структурой стратегий, что и в собственно игре Розенталя, но где сумма в (2.2) заменена произвольной функцией. Несколько сужая это понятие, мы будем полагать, что каждый игрок характеризуется *универсальным правилом агрегирования*, т.е. бесконечной последовательностью симметричных функций $U_i^{(m)}: V^m \rightarrow \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{N}$), где $V \subseteq \mathbb{R}$, и что его функция выигрыша такова:

$$u_i(x_N) = U_i^{(|x_i|)}(\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, x_N)) \rangle_{\alpha \in x_i}).$$

Естественно, эта формула имеет смысл в предположении, что все значения всех функций φ_α лежат в V . Поскольку $U_i^{(|x_i|)}$ симметрична, нет нужды задавать порядок на x_i . В дальнейшем изложении будем использовать выражение *неупорядоченный кортеж* (длины $|x_i|$), т.е. набор вещественных чисел, в котором возможны повторы. В принципе, естественно предполагать каждую функцию $U_i^{(m)}$ возрастающей по всем аргументам, но такое предположение в дальнейшем не

потребуется (нестрогая монотонность следует из определения квазисепарабельного агрегирования).

3. Квазисепарабельное агрегирование

Универсальный сепарабельный порядок \succeq на подмножестве $V \subseteq \mathbb{R}$ – это бесконечная последовательность рефлексивных, транзитивных и полных бинарных отношений \succeq^m на V^m ($m \in \mathbb{N}$; асимметричная и симметричная компоненты \succeq^m обозначаются, соответственно, \succ^m и \sim^m), удовлетворяющих условиям

1. \succeq совпадает с порядком \geq на V , индуцированным стандартным порядком на \mathbb{R} ;
2. для любой перестановки σ множества $\{1, \dots, m\}$ справедливо

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle \sim^m \langle v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)} \rangle$$

(симметрия); это условие позволяет считать \succeq^m определенным на множестве неупорядоченных кортежей длины m ;

3. при любых $m' > m \geq 1$, $\langle v_1, \dots, v_{m'} \rangle \in V^{m'}$ и $\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \in V^m$ справедливо

$$\begin{aligned} \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m'} \rangle \succeq^{m'} \langle v'_1, \dots, v'_m, v_{m+1}, \dots, v_{m'} \rangle &\iff \\ \iff \langle v_1, \dots, v_m \rangle \succeq^m \langle v'_1, \dots, v'_m \rangle & \end{aligned}$$

(сепарабельность).

Универсальное правило агрегирования U согласовано с универсальным сепарабельным порядком \succeq , если можно подобрать такую бесконечную последовательность $\{\bar{v}_m \in V\}_{m=2,3,\dots}$, чтобы при всех $m' \geq m$, $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \in V^m$ и $\langle v'_1, \dots, v'_{m'} \rangle \in V^{m'}$ выполнялись условия

$$\begin{aligned} U^{(m')}(v'_1, \dots, v'_{m'}) > U^{(m)}(v_1, \dots, v_m) &\implies \\ \implies \langle v'_1, \dots, v'_{m'} \rangle \succ^{m'} \langle v_1, \dots, v_m, \bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_{m'} \rangle & \end{aligned} \quad (3.1a)$$

и

$$\begin{aligned} U^{(m)}(v_1, \dots, v_m) > U^{(m')}(v'_1, \dots, v'_{m'}) &\implies \\ \implies \langle v_1, \dots, v_m, \bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_{m'} \rangle \succ^{m'} \langle v'_1, \dots, v'_{m'} \rangle. & \end{aligned} \quad (3.1b)$$

Такие правила агрегирования естественно называть *квазисепарабельными*.

Предложение 3.1. Пусть \succeq – универсальный сепарабельный порядок на $V \subseteq \mathbb{R}$, а Γ – обобщенная игра Розенталя, где $\varphi_\alpha(\mathbb{N}) \subseteq V$ для каждого $\alpha \in A$ и правило агрегирования U_i каждого игрока согласовано с \succeq . Тогда Γ обладает потенциалом в смысле (2.1).

Доказательство. Обозначим \bar{v}_k^i константы, ассоциированные с правилом агрегирования, применяемым игроком i , и введем константы $M_i = \max_{x_i \in X_i} |x_i|$ и $M = \sum_{i \in N} M_i$. С каждым набором стратегий $x_N \in X_N$ свяжем неупорядоченный кортеж

$$\varkappa(x_N) = \left\langle \langle \varphi_\alpha(k) \rangle_{\alpha \in A, k=1, \dots, n(\alpha, x_N)}, \langle \bar{v}_k^i \rangle_{i \in N, k=|x_i|+1, \dots, M_i} \right\rangle$$

(здесь и далее предполагается, что в $\varkappa(x_N)$ отсутствуют объекты $\alpha \in A$ с $n(\alpha, x_N) = 0$). Легко понять, что $\sum_i |x_i| = \sum_\alpha n(\alpha, x_N)$; следовательно, длина кортежа $\varkappa(x_N)$ равна M при всех $x_N \in X_N$. Показав, что $y_N \triangleright x_N$ влечет за собой $\varkappa(y_N) \succ^M \varkappa(x_N)$, мы докажем (2.1) с \succ^M в качестве \succ .

Пусть $y_N \triangleright_i x_N$, т.е. $u_i(y_N) > u_i(x_N)$ и $y_{-i} = x_{-i}$. Множество A разбивается на четыре непересекающихся подмножества: $A^0 = x_i \cap y_i$, $A^+ = y_i \setminus x_i$, $A^- = x_i \setminus y_i$, $A^* = A \setminus (x_i \cup y_i)$; при этом $x_i = A^0 \cup A^-$, а $y_i = A^0 \cup A^+$. Обозначив $\bar{m} = \max\{|x_i|, |y_i|\}$, положим

$$\begin{aligned} \varkappa_{-i} = & \left\langle \langle \varphi_\alpha(k) \rangle_{\alpha \in A^0, k=1, \dots, n(\alpha, x_N)-1=n(\alpha, y_N)-1}, \right. \\ & \langle \varphi_\alpha(k) \rangle_{\alpha \in A^+, k=1, \dots, n(\alpha, x_N)=n(\alpha, y_N)-1}, \\ & \langle \varphi_\alpha(k) \rangle_{\alpha \in A^-, k=1, \dots, n(\alpha, y_N)=n(\alpha, x_N)-1}, \langle \varphi_\alpha(k) \rangle_{\alpha \in A^*, k=1, \dots, n(\alpha, x_N)=n(\alpha, y_N)}, \\ & \left. \langle \bar{v}_k^j \rangle_{j \in N, j \neq i, k=|x_j|+1, \dots, M_j}, \langle \bar{v}_k^i \rangle_{k=\bar{m}+1, \dots, M_i} \right\rangle. \end{aligned}$$

Пусть $|y_i| \geq |x_i|$. Положим

$$\varkappa_i(x_N) = \left\langle \langle \varphi_\alpha(n(\alpha, x_N)) \rangle_{\alpha \in A^0 \cup A^-}, \langle \bar{v}_k^i \rangle_{k=|x_i|+1, \dots, |y_i|} \right\rangle$$

и

$$\varkappa_i(y_N) = \left\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, y_N)) \right\rangle_{\alpha \in A^0 \cup A^+} \left[= \left\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, y_N)) \right\rangle_{\alpha \in y_i} \right].$$

Из условий $u_i(y_N) > u_i(x_N)$ и (3.1a) вытекает $\varkappa_i(y_N) \succ^{\bar{m}} \varkappa_i(x_N)$.

Если $|y_i| \leq |x_i|$, полагаем

$$\varkappa_i(x_N) = \left\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, x_N)) \right\rangle_{\alpha \in A^0 \cup A^-} \left[= \left\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, x_N)) \right\rangle_{\alpha \in x_i} \right]$$

и

$$\varkappa_i(y_N) = \left\langle \left\langle \varphi_\alpha(n(\alpha, y_N)) \right\rangle_{\alpha \in A^0 \cup A^+}, \langle \bar{v}_k^i \rangle_{k=|y_i|+1, \dots, |x_i|} \right\rangle.$$

Из условий $u_i(y_N) > u_i(x_N)$ и (3.1b) вытекает $\varkappa_i(y_N) \succ^{\bar{m}} \varkappa_i(x_N)$.

И в том, и в другом случае имеем $\varkappa(x_N) = \langle \varkappa_{-i}, \varkappa_i(x_N) \rangle$ и $\varkappa(y_N) = \langle \varkappa_{-i}, \varkappa_i(y_N) \rangle$, откуда $\varkappa(y_N) \succ^M \varkappa(x_N)$ в силу сепарабельности. Предложение доказано. \square

Простейший и самый важный пример универсального сепарабельного порядка дается аддитивным агрегированием:

$$v' \succeq^m v \iff \sum_{k=1}^m \nu(v'_k) \geq \sum_{k=1}^m \nu(v_k), \quad (3.2)$$

где $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ строго возрастает. Таким образом, игры Розенталя [12] подпадают под предложение 3.1 с этим универсальным порядком, $\nu(v) = v$ и $\bar{v}_m = 0$ для всех m . Более того, в этом случае в доказательстве строится как раз потенциал Розенталя (2.3).

На первый взгляд могло бы показаться, что применяя иные функции $\nu(\cdot)$ и $\bar{v}_m \neq 0$, можно получить более общие результаты, но это только кажется. Имеет смысл обсудить этот момент чуть подробнее. Пусть в какой-то обобщенной игре Розенталя Γ каждый игрок i применяет универсальное правило агрегирования U_i согласованное с аддитивным порядком (3.2); тогда из условий (3.1) вытекает, что функция выигрыша каждого игрока i (с точностью до монотонного преобразования) такова:

$$u_i(x_N) = \sum_{\alpha \in x_i} \nu(\varphi_\alpha(n(\alpha, x))) + \sum_{k=|x_i|+1}^{M_i} \nu(\bar{v}_k^i).$$

Чтобы показать, что игра Γ эквивалентна игре Розенталя, модифицируем локальные функции выигрыша, положив $\varphi_\alpha^*(k) = \nu(\varphi_\alpha(k))$, добавим к A новые объекты (i, m) , $i \in N$, $1 \leq m \leq M_i$ с $\varphi_{(i,m)}^*(1) = \nu(\bar{v}_m^i)$ и заменим каждую стратегию $x_i \in X_i$ на $x_i \cup \{(i, |x_i|+1), \dots, (i, M_i)\}$.

Ряд подобных «псевдо-обобщений» модели Розенталя обсуждался в [8, раздел 4].

Другим примером универсального сепарабельного порядка служит лексиминный: сравнивая два набора локальных выигрышей, мы начинаем с худших в каждом наборе; в случае равенства переходим к следующим и т.д. Агрегирование по минимуму («слабейшее звено»),

$$U^{(m)}(v_1, \dots, v_m) = \min_{k=1, \dots, m} \nu(v_k),$$

согласовано с лексиминным порядком (строго говоря, в этом случае нужно модифицировать наше определение, допустив $\bar{v}_k = +\infty$), хотя и не сепарабельно само. Так же соотносятся агрегирование по максимуму («лучшая попытка») и лексимаксный порядок. Потенциал Розенталя, как он построен в доказательстве предложения 3.1, оказывается работоспособным в обоих этих случаях.

Можно, наконец, встать на окончательно ординальную позицию и считать нормальным заданием предпочтений игроков просто порядками, хотя бы и не допускающими числового представления. Тогда лексиминный и лексимаксный порядки сами окажутся подходящими правилами агрегирования.

4. Универсальные сепарабельные порядки на конечном множестве

Теорема 4.1. *Для любого конечного множества $V \subseteq \mathbb{R}$ и любого универсального сепарабельного порядка \succeq на V найдутся такие натуральное число $n < |V|$ и отображение $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, что*

$$\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \succeq^m \langle v_1, \dots, v_m \rangle \iff \sum_{k=1}^m \mu(v'_k) \geq_{\text{Lex}} \sum_{k=1}^m \mu(v_k) \quad (4.1)$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ и $v'_1, \dots, v'_m, v_1, \dots, v_m \in V$, где суммы в правой части понимаются по-координатно, а \geq_{Lex} обозначает обычный лексикографический порядок на \mathbb{R}^n : сначала учитывается первая координата, затем вторая и т. д.

Доказательство. Упорядоченные пары $v, v' \in V$ будем записывать как $[v, v']$ и называть интервалами. Интервал $[v, v']$ положителен,

если $v' \geq v$. Формальная сумма $\sum_{k=1}^m [v_k, v'_k]$ положительна, если

$$\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \succeq^m \langle v_1, \dots, v_m \rangle. \quad (4.2)$$

Пустую сумму считаем положительной по определению. Поскольку формальная сумма может включать несколько одинаковых интервалов, мы имеем также понятие положительной формальной линейной комбинации $\sum_{k=1}^m \theta_k [v_k, v'_k]$ с положительными и целочисленными коэффициентами θ_k . Полагая $-[v_k, v'_k] = [v'_k, v_k]$ по определению, распространим понятие положительности на комбинации с отрицательными и целочисленными θ_k .

Будем обозначать \mathbb{Q} поле рациональных чисел и \mathfrak{Q} векторное пространство (над \mathbb{Q}) всех формальных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^m r_k [v_k, v'_k]$ положительных интервалов из V с рациональными коэффициентами. Затем определим \mathfrak{Q}_+ как множество комбинаций $I \in \mathfrak{Q}$, которые положительны в только что определенном смысле (4.2) или становятся таковыми после умножения на $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.1. *Множество \mathfrak{Q}_+ является полупространством в \mathfrak{Q} , т.е.*

$$\forall I, I' \in \mathfrak{Q}_+ [(I + I') \in \mathfrak{Q}_+]; \quad (4.3a)$$

$$\forall I \in \mathfrak{Q}_+ \forall r \in \mathbb{Q} [r \geq 0 \Rightarrow rI \in \mathfrak{Q}_+]; \quad (4.3b)$$

$$\forall I \in \mathfrak{Q} [I \in \mathfrak{Q}_+ \text{ или } (-I) \in \mathfrak{Q}_+]. \quad (4.3c)$$

Доказательство. Начнем с (4.3a). Если nI и $n'I'$ положительные и целочисленные комбинации, то таковы же $n'nI$ и $n'nI'$. Пусть $n'nI = \sum_{k=1}^m [v_k, v'_k]$ и $n'nI' = \sum_{k=m+1}^{m'} [v_k, v'_k]$. Из (4.2) и сепарабельности \succeq^m , получаем

$$\begin{aligned} \langle v'_1, \dots, v'_m, v'_{m+1}, \dots, v'_{m'} \rangle &\succeq^{m'} \langle v_1, \dots, v_m, v'_{m+1}, \dots, v'_{m'} \rangle \succeq^{m'} \\ &\succeq^{m'} \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m'} \rangle, \end{aligned}$$

т.е. $n'n(I + I')$ – положительная и целочисленная комбинация. (4.3b) доказывается еще проще. (4.3c) сразу следует из полноты \succeq^m . \square

Для любых $I', I \in \mathfrak{Q}$ положим

$$I' \geq I \Leftrightarrow (I' - I) \in \mathfrak{Q}_+.$$

Бинарное отношение \geq рефлексивно, транзитивно и полно; будем обозначать его асимметричную и симметричную компоненты, соответственно, \gg и \simeq . Лемма 4.1 показывает, что \geq согласовано со сложением в естественном смысле.

Поскольку каждое отношение \succeq^m симметрично, имеем

$$[v, v'] + [v', v''] \simeq [v, v''] \quad (4.4)$$

всякий раз, когда $v, v', v'' \in V$ и $v \leq v' \leq v''$.

Пусть $I', I \in \mathfrak{Q}$ и $I \gg 0$; будем говорить, что I не доминирует I' по Архимеду и обозначать этот факт $I' \ggg I$, если найдется такое целое число k , что $kI' \gg I$. Для случая $I \ll 0$, полагаем $I' \ggg I \Leftrightarrow \exists k [kI' \gg -I]$. Принимая $I \ggg 0$ для всех $I \in \mathfrak{Q}$ по определению, получаем рефлексивное, транзитивное и полное бинарное отношение; будем обозначать его асимметричную и симметричную компоненты, соответственно, \ggg и \approx . Если $I' \approx I$, будем говорить, что I' и I имеют одинаковый архимедов ранг. В результате \mathfrak{Q} разбивается на классы эквивалентности отношения \approx . Для любого $I \in \mathfrak{Q}$ получается, что I и $-I$ имеют одинаковый архимедов ранг по определению. Если $I' \ggg I$, то $I' \gg I \gg -I'$, если $I' \gg 0$, и $-I' \gg I \gg I'$ в противном случае.

При условиях $I_0 \ggg 0$ и $I_0 \ggg I \geq 0$, положим

$$I/I_0 = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid I \geq rI_0\} \in \mathbb{R}$$

(попытка применить это определение в случае $I \ggg I_0$ привела бы к $I/I_0 = +\infty$). Если $I \ll 0$, полагаем $I/I_0 = -[(-I)/I_0] = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid rI_0 \geq I\}$.

Лемма 4.2. Пусть $I, I', I_0 \in \mathfrak{Q}$, $I_0 \ggg 0$, $I_0 \ggg I'$, $I_0 \ggg I$ и $r \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$(I' + I)/I_0 = (I'/I_0) + (I/I_0);$$

$$(rI)/I_0 = r(I/I_0);$$

$$I_0 \ggg I \Leftrightarrow I/I_0 = 0.$$

Доказательство. Пусть $I' \gg 0$ и $I \gg 0$; тогда для любого $r \in \mathbb{Q}$, меньшего $(I'/I_0) + (I/I_0)$, найдутся такие $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, что $r_1 + r_2 = r$, $r_1 < I'/I_0$ и $r_2 < I/I_0$. По определению, $I' \gg r_1 I_0$ и $I \gg r_2 I_0$, откуда $(I' + I) \gg r I_0$; поскольку r было произвольным, имеем $(I' + I)/I_0 \geq (I'/I_0) + (I/I_0)$. Наоборот, для любого $r \in \mathbb{Q}$, большего $(I'/I_0) + (I/I_0)$, найдутся такие $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, что $r_1 + r_2 = r$, $r_1 > I'/I_0$ и $r_2 > I/I_0$. По определению, $I' \ll r_1 I_0$ и $I \ll r_2 I_0$, откуда $(I' + I) \ll r I_0$; поскольку r было произвольным, имеем $(I' + I)/I_0 \leq (I'/I_0) + (I/I_0)$.

Если обратиться к отрицательным интервалам, то достаточно рассмотреть вариант $I' \gg 0$, $I \gg 0$, а $I' - I \gg 0$; тогда для любого $r \in \mathbb{Q}$, меньшего $(I'/I_0) - (I/I_0)$, найдутся такие $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, что $r_1 - r_2 = r$, $r_1 < I'/I_0$ и $r_2 > I/I_0$. По определению, $I' \gg r_1 I_0$ и $I \ll r_2 I_0$, откуда $(I' - I) \gg r I_0$; поскольку r было произвольным, имеем $(I' - I)/I_0 \geq (I'/I_0) - (I/I_0)$. Обратное неравенство получается аналогичным образом.

При проверке второго утверждения достаточно рассмотреть вариант $I \gg 0$ и $r > 0$; тогда $rI \geq rr'I_0 \iff I \geq r'I_0$.

При проверке последнего утверждения достаточно рассмотреть вариант $I \gg 0$. Если $nI \geq I_0$, то $I/I_0 \geq 1/n > 0$. В обратную сторону: если $I/I_0 > 0$, то $I \geq rI_0$ для всех $r \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $0 < r < I/I_0$, откуда $(1/r)I \geq I_0$, откуда $I \gg I_0$. \square

Лемма 4.3. *Для любого конечномерного векторного подпространства $L \subseteq \mathfrak{Q}$ найдутся такие натуральное число $n \leq \dim L$ и отображение $\lambda: L \rightarrow \mathbb{R}^n$, что λ линейно (над \mathbb{Q}) и выполняется условие*

$$\forall I', I \in L [I' \geq I \iff \lambda(I') \geq_{\text{Lex}} \lambda(I)]. \quad (4.5)$$

Доказательство. Пусть I_1, \dots, I_h образуют базис L ; не ограничивая общности, мы можем полагать, что $I_1 \gg I_k \gg 0$ для всех k . Положим $q(I) = I/I_1$ для любого $I \in L$. По лемме 4.2, отображение $q: L \rightarrow \mathbb{R}$ линейно. Если $\dim L = 1$, то $L = \{rI_1\}_{r \in \mathbb{Q}}$ и (4.3b) сразу дает нам (4.5) с $\lambda = q$.

В противном случае проведем индукцию по $\dim L$. Поскольку $q(I_1) = 1$, ядро отображения q , $K = \{I \in L \mid q(I) = 0\}$, является собственным подпространством L . По предположению индукции есть линейный оператор $\lambda': K \rightarrow \mathbb{R}^m$ с $m < \dim L$, представляющий \geq на K в смысле (4.5). Зафиксируем проекцию $p: L \rightarrow K$,

т.е. такой линейный оператор, что $p(I) = I$ для всех $I \in K$, и определим отображение $\lambda: L \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ равенством $\lambda(I) = \langle q(I), \lambda'(p(I)) \rangle$ для всех $I \in L$. Тот факт, что λ представляет \geq на L , проверяется прямолинейным образом: если $q(I') > q(I)$, то, очевидным образом, $I' \gg I$; если $q(I') = q(I)$, то $(I' - I) \in K$, откуда $\lambda(I') \geq_{\text{Lex}} \lambda(I) \iff \lambda'(I') \geq_{\text{Lex}} \lambda'(I) \iff I' \geq I$. \square

Пусть $V = \{v^0, v^1, \dots, v^{\bar{m}}\}$, где $v^k < v^{k+1}$ для всех k . Каждый интервал $[v^k, v^{k+1}]$ назовем *элементарным* и обозначим \mathcal{E} множество всех элементарных интервалов. Для каждого $v^k \in V$, положим $\varkappa(v^k) = \sum_{h=0}^{k-1} [v^h, v^{h+1}] \in \Omega$, так что $\varkappa(v^0) = 0$. Применяя лемму 4.3 с $L = \mathbb{Q}(\mathcal{E})$, получаем соответствующие $n \leq |\mathcal{E}| = |V| - 1$ и λ .

Пусть теперь даны $m \in \mathbb{N}$ и $v'_1, \dots, v'_m, v_1, \dots, v_m \in V$. По определению (4.2), $\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \succeq^m \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^m [v_k, v'_k] \geq 0$; по (4.4), $[v_k, v'_k] \simeq (\varkappa(v'_k) - \varkappa(v_k))$. Следовательно,

$$\langle v'_1, \dots, v'_m \rangle \succeq^m \langle v_1, \dots, v_m \rangle \iff \sum_{k=1}^m \varkappa(v'_k) \geq \sum_{k=1}^m \varkappa(v_k).$$

По лемме 4.3,

$$\sum_{k=1}^m \varkappa(v'_k) \geq \sum_{k=1}^m \varkappa(v_k) \iff \sum_{k=1}^m \lambda(\varkappa(v'_k)) \geq_{\text{Lex}} \sum_{k=1}^m \lambda(\varkappa(v_k)).$$

Определив $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $\mu = \lambda \circ \varkappa$, получаем равенство (4.1). Теорема 4.1 доказана. \square

Предложение 4.1. Пусть даны множество $V \subseteq \mathbb{R}$, натуральное число n и отображение $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда последовательность бинарных отношений \succeq^m , определенных условием (4.1), образует универсальный сепарабельный порядок на V тогда и только тогда, когда μ строго возрастает относительно лексикографического порядка \geq_{Lex} на \mathbb{R}^n .

Прямолинейное доказательство опускаем.

Теорема 4.1 и предложение 4.1 вместе дают характеристику универсальных сепарабельных порядков на конечном множестве.

В качестве примера рассмотрим, как выглядит представление (4.1) для универсального сепарабельного порядка, где, на первый взгляд, вообще нет места для сложения, а именно, для лексиминного порядка. Положим $n = |\mathcal{E}| = |V| - 1$, т.е. $V = \{v^0, v^1, \dots, v^n\}$, где $v^k < v^{k+1}$ при всех k . Для любых $v \in V$ и $k = 1, \dots, n$ положим $\mu_k(v) = 1$, если $v \geq v^k$ и $\mu_k(v) = 0$ в противном случае. Для любого набора v_1, \dots, v_m , немедленно получаем $\sum_{k=1}^m \mu_1(v_k) = m - |\{k \in \{1, \dots, m\} \mid v_k = v^0\}|$, $\sum_{k=1}^m \mu_2(v_k) = m - |\{k \in \{1, \dots, m\} \mid v_k \leq v^1\}|$ и т.д. Таким образом, лексикографическое сравнение этих сумм дает тот же самый результат, что и лексиминный порядок.

Замечание 4.1. Применяя конструкции из доказательства теоремы 4.1 к лексиминному порядку, мы немедленно видим, что все элементарные интервалы имеют различные архимедовы ранги: $[v^k, v^{k+1}] \gg \gg [v^h, v^{h+1}] \iff h > k$. Таким образом, представление (4.1) в этом случае требует $n = |V| - 1$, то есть ограничение $n < |V|$ в формулировке Теоремы 4.1 не может быть усилено.

5. Сепарабельность на бесконечном множестве

В предложении 4.1 конечность множества V не требовалась, однако доказательство теоремы 4.1 без него не проходит. Более того, невозможно поверить, что конечная лексикография способна представить любой сепарабельный порядок (например, лексиминный) хотя бы на $V = \mathbb{N}$.

Чтобы сохранить надежду на характеристизационный результат, требуется ввести лексикографический порядок с бесконечным множеством индексов. Для этого можно предложить, по крайней мере, два разных способа.

Пусть множество \mathcal{B} вполне упорядочено. Тогда лексикографический порядок \geq_{Lex} на $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$ определяется в сущности точно так же, как и на \mathbb{R}^n . Сравнивая два вектора из $\mathbb{R}^{\mathcal{B}}$, находим наименьшую координату $\beta \in \mathcal{B}$, где они различаются (\mathcal{B} вполне упорядочено!), и ставим диагноз соответственно.

Предложение 5.1. Пусть даны множество $V \subseteq \mathbb{R}$, вполне упорядоченное множество \mathcal{B} и отображение $\mu: V \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{B}}$. Тогда последова-

тельность бинарных отношений \succeq^m , определенных условием (4.1), образует универсальный сепарабельный порядок на V тогда и только тогда, когда μ строго возрастает.

Прямолинейное доказательство опускаем.

К сожалению, нет оснований предполагать, что любой универсальный сепарабельный порядок (опять-таки, хотя бы на $V = \mathbb{N}$) принадлежит классу, описанному в предложении 5.1. Более перспективным выглядит другой вариант лексикографии с бесконечным множеством индексов, хотя и здесь еще ничего не доказано.

Пусть имеется список функций $\mu_\beta: W \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на произвольном множестве W и параметризованных произвольным множеством \mathcal{B} ; будем называть этот список *псевдо-конечным*, если, при любом $w \in W$, $\mu_\beta(w) = 0$ для всех $\beta \in \mathcal{B}$ за исключением конечного их числа. Имея псевдо-конечный список, параметризованный линейно упорядоченным множеством \mathcal{B} , мы определяем лексикографический порядок на W естественным образом:

$$w' >_{\text{Lex}} w \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathcal{B} [\mu_\beta(w') > \mu_\beta(w) \text{ и } \forall \beta' < \beta [\mu_{\beta'}(w') \geq \mu_{\beta'}(w)]];$$

$$w' \geq_{\text{Lex}} w \Leftrightarrow [w' >_{\text{Lex}} w \text{ или } \forall \beta \in \mathcal{B} [\mu_\beta(w') = \mu_\beta(w)]].$$

Легко видеть, что бинарное отношение \geq_{Lex} рефлексивно, транзитивно и полно.

Предложение 5.2. Пусть даны множество $V \subseteq \mathbb{R}$, цепь \mathcal{B} и псевдо-конечный список функций $\mu_\beta: V \rightarrow \mathbb{R}$ ($\beta \in \mathcal{B}$); пусть $v' >_{\text{Lex}} v$ всякий раз, когда $v', v \in V$ и $v' > v$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ обозначим \succeq^m порядок \geq_{Lex} , определенный списком функций

$$\mu_\beta^m(v_1, \dots, v_m) = \sum_{k=1}^m \mu_\beta(v_k). \quad (5.1)$$

Тогда последовательность бинарных отношений \succeq^m образует универсальный сепарабельный порядок на V .

Прямолинейное доказательство опускаем.

Лексиминный порядок можно представить псевдо-конечной лексикографией, описанной в предложении 5.2, на любом подмножестве $V \subseteq \mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B} = V$ и, для каждого $v \in V$, $\mu_v(v) = -1$ и $\mu_w(v) = 0$

при всех $w \neq v$. Легко видеть, что этот список псевдо-конечен. Так же легко видеть, что функции μ_v^m , заданные равенством (5.1), подсчитывают, сколько раз каждое значение $v \in V$ входит в список v_1, \dots, v_m ; следовательно, лексикографическое сравнение этих сумм приводит к лексиминному порядку почти так же, как в конце раздела 4.

Так же, точнее, двойственным образом, можно представить в виде (5.1) лексимаксный порядок на любом подмножестве $V \subseteq \mathbb{R}$.

6. О симметрии

Требование симметрии каждой функции $U^{(m)}$ было включено в определение универсального правила агрегирования. В принципе, этого можно было бы не делать, полагая стратегии в обобщенной игре Розенталя не подмножествами, а кортежами. Без симметрии, однако, было бы невозможно провести доказательство предложения 3.1. Хуже того, было бы невозможно гарантировать просто существование равновесия по Нэшу.

Предложение 6.1. *Пусть функция $U^{(m)}: V^m \rightarrow \mathbb{R}$, где $V \subseteq \mathbb{R}$, обладает тем свойством, что в любой обобщенной игре Розенталя, где $|x_i| = t$ для каждой стратегии каждого игрока, $\varphi_\alpha(\mathbb{N}) \subseteq V$ для каждого $\alpha \in A$ и каждый игрок агрегирует локальные выигрыши с помощью функции $U^{(m)}$, обладает равновесием по Нэшу. Тогда $U^{(m)}$ симметрична.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда должны найтись такие два значения аргументов, перестановка которых изменяет значение функции $U^{(m)}$. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $u^+ = U^{(m)}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_m) > U^{(m)}(v_2, v_1, v_3, \dots, v_m) = u^-$ для каких-то $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$.

Рассмотрим теперь такую обобщенную игру Розенталя: $N = \{1, 2\}$; $A = \{a, b, c, d\} \cup \{e_k\}_{k=3, \dots, m}$; $X_1 = \{\langle a, b, e_3, \dots, e_m \rangle, \langle c, d, e_3, \dots, e_m \rangle\}$; $X_2 = \{\langle d, a, e_3, \dots, e_m \rangle, \langle b, c, e_3, \dots, e_m \rangle\}$; $\varphi_t(1) = v_1$ и $\varphi_t(2) = v_2$ для каждого $t \in \{a, b, c, d\}$, а $\varphi_{e_k}(2) = v_k$ для всех $k = 3, \dots, m$; каждый игрок $i \in N$ агрегирует локальные выигрыши с помощью функции $U^{(m)}$.

Имеем такую 2×2 матрицу выигрышей:

$$\begin{array}{cc} & \text{dae} & \text{bce} \\ \text{abe} & (u^-, u^+) & (u^+, u^-) \\ \text{cde} & (u^+, u^-) & (u^-, u^+). \end{array}$$

В этой игре нет равновесия по Нэшу. □

Замечание 6.1. В доказательстве не требовались ни непрерывность, ни монотонность функции $U^{(m)}$. В этом отношении предложение 6.1 усиливает леммы В.1 и В.2 работы [8].

7. Заключение

Предложение 3.1 показывает, что конструкция Розенталя [12] основывается исключительно на сепарабельности аддитивного агрегирования и, следовательно, может работать для более широкого класса правил агрегирования.

Если посмотреть глубже, это обобщение до некоторой степени иллюзорно. В любой квазисепарабельной обобщенной игре Розенталя имеет значение лишь конечное множество V возможных значений локальных выигрышей, поскольку и число игроков, и число объектов конечны. По теореме 4.1, отношения \succeq^m допускают представление (4.1) на V , а лексикографический порядок на \mathbb{R}^n очевидно допускает скалярное аддитивное представление (3.2) на любом конечном подмножестве. Таким образом, можно сказать, что главный результат этой работы отрицательный – чтобы конструкция [12] могла применяться к обобщенной игре Розенталя, необходимо, чтобы предпочтения игроков допускали аддитивное представление.

Однако, если посмотреть еще глубже, при добавлении игроков или объектов в имеющуюся модель представление (3.2) может утратить силу. Следовательно, комбинация сложения и лексикографии, полученная в теореме 4.1, не допускает единого представления (3.2), пригодного для всех случаев, а значит, такие комбинации действительно задают более широкий класс предпочтений, для которых применима конструкция Розенталя.

Автор благодарит анонимного рецензента, чьи замечания способствовали улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogomolnaia A., Jackson M.O. *The stability of hedonic coalition structures* // Games and Economic Behavior. 2002. V. 38. P. 201–230.
2. Debreu G. *Topological methods in cardinal utility* // Mathematical Methods in Social Sciences. (Arrow K.J., Karlin S., Suppes P., eds.) Stanford: Stanford University Press, 1960. P. 16–26.
3. Gorman W.M. *The structure of utility functions* // Review of Economic Studies. 1968. V. 35. P. 367–390.
4. Harks T., Klimm M., Möhring R.H. *Characterizing the existence of potential functions in weighted congestion games* // Theory of Computing Systems. 2011. V. 49. P. 46–70.
5. Holzman R., Law-Yone N. *Strong equilibrium in congestion games* // Games and Economic Behavior. 1997. V. 21. P. 85–101.
6. Konishi H., Le Breton M., Weber S. *Pure strategy Nash equilibrium in a group formation game with positive externalities* // Games and Economic Behavior. 1997. V. 21. P. 161–182.
7. Kukushkin N.S. *Potential games: A purely ordinal approach* // Economics Letters. 1999. V. 64. P. 279–283.
8. Kukushkin N.S. *Congestion games revisited* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 36. P. 57–83.
9. McLennan A., Monteiro P.K., Tourky R. *Games with discontinuous payoffs: a strengthening of Reny's existence theorem* // Econometrica. 2011. V. 79. P. 1643–1664.
10. Milchtaich I. *Congestion games with player-specific payoff functions* // Games and Economic Behavior. 1996. V. 13. P. 111–124.
11. Monderer D., Shapley L.S. *Potential games* // Games and Economic Behavior. 1996. V. 14. P. 124–143.

12. Rosenthal R.W. *A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria* // International Journal of Game Theory. 1973. V.2. P.65–67.
13. Sandholm W.H. *Decompositions and potentials for normal form games* // Games and Economic Behavior. 2010. V.70. P.446–456.
14. Wakker P.P. *Additive Representations of Preferences*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

ROSENTHAL'S POTENTIAL AND A DISCRETE VERSION OF THE DEBREU–GORMAN THEOREM

Nikolai S. Kukushkin, Russian Academy of Sciences, Dorodnicyn Computing Center, Dr.Sc. (ququns@inbox.ru).

Abstract: The acyclicity of individual improvements in a generalized congestion game (where the sums of local utilities are replaced with arbitrary aggregation rules) can be established with a Rosenthal-style construction if aggregation rules of all players are "quasi-separable". Every universal separable ordering on a finite set can be represented as a combination of addition and lexicography.

Keywords: improvement dynamics, acyclicity, separable aggregation, congestion game.