Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.2, с. 78–99

УДК 519.83
ББК 22.18

ГРАФ ПРЕДЫСТОРИИ ХОДА ИГРОКА В МНОГОШАГОВЫХ ИГРАХ С РАЗДЕЛЕННОЙ ДИНАМИКОЙ

Николай М. Слобожанин
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: nickmsl@mail.ru

В работе приводится анализ информационной структуры многошаговых игр с разделенной динамикой, с множеством игроков произвольной мощности, в которых информация игрока о процессе определяется его информационной вектор-функцией. Для анализа информационной разрешимости упорядоченного по игрокам набора информационных вектор-функций вводится определение графа предыстории хода игрока. Получены теоремы о необходимых и достаточных условиях информационной разрешимости на языке графов предысторий ходов для многошаговых игр как с конечным так и бесконечным множеством игроков. Отдельно исследовано влияние циклов графа предыстории хода на информационную разрешимость. Все основные теоремы и утверждения сопровождаются иллюстрирующими примерами.

Ключевые слова: многошаговые игры с множеством игроков произвольной мощности с разделенной динамикой, информационная вектор-функция, информационная разрешимость, граф предыстории хода игрока, граф истории игры.

1. Граф предыстории хода игрока. Информационная разрешимость в общем случае

Настоящая работа является развитием работ [1-6]. В ней, как и в [4], будем предполагать, что множество участников процесса A может быть произвольной мощности. Множества ходов различных игроков могут быть разными по мощности и могут быть бесконечными.

Напомним основные понятия, введенные в [4]. Обозначим через A – множество всех игроков, через T_α – количество всех ходов игрока α, $\alpha \in A$, через $\overline{T}_\alpha$ – множество всех целых чисел из отрезка $[0, T_\alpha]$, через $2^{\overline{T}_\alpha}$ – множество всех подмножеств множества $\overline{T}_\alpha$.

Всякое отображение

$$l : \overline{T}_\alpha \to \prod_{\beta \in A} 2^{\overline{T}_\beta}$$

будем называть информационной функцией игрока α.

Иногда такие отображения будем помечать индексами и писать:

$$l_\alpha : \overline{T}_\alpha \to \prod_{\beta \in A} 2^{\overline{T}_\beta}.$$

Тогда $l_\alpha(k)$ есть вектор, который в общем случае может быть произвольной (в том числе бесконечной) размерности. В соответствии с принятыми обозначениями можно записать: $l_\alpha(k) = (\ldots, l_\alpha(k)_\beta, \ldots)$, где β принимает все значения из A и $l_\alpha(k)_\beta$ есть подмножество (которое может быть и пустым) множества $\overline{T}_\beta$. Допускаем также и такое обозначение:

$$l_\alpha(k) = (l_\alpha(k)_\beta, \beta \in A).$$

О подмножестве $l_\alpha(k)_\beta$ будем говорить как о β-й компоненте вектора $l_\alpha(k)$. Содержательно, как и ранее, $l_\alpha(k)_\beta$ есть подмножество номеров ходов игрока β, которые необходимо и достаточно знать игроку α для совершения $(k+1)$-го хода. Обратим внимание на то, что среди компонент вектора $l_\alpha(k) = (\ldots, l_\alpha(k)_\beta, \ldots)$ присутствует и компонента $l_\alpha(k)_\alpha$. Изначально на подмножество номеров ходов $l_\alpha(k)_\alpha$ игрока α, которые ему необходимо и достаточно знать для совершения $(k+1)$-го хода, мы не накладываем никаких ограничений.

Рассмотрим множества $\overline{T}_\beta$, $\beta \in A$. Зафиксируем некоторый элемент α из A и целое число k из множества $\overline{T}_\alpha$. Определим алгоритм построения множеств упорядоченных пар вида (p, β), где $\beta \in A$, $p \in \overline{T}_\beta$, для указанного элемента k из фиксированного множества $\overline{T}_\alpha$, т. е. для упорядоченной пары (k, α).

Макрошаг 0. Строим множество $L_0 = \{(k, \alpha)\}$.

Макрошаг r. На r-м ($r \in N$) макрошаге строим множество L_r. При этом упорядоченную пару (p, β) включаем в множество L_r тогда и только тогда, когда

а) $(p+1, \beta)$ принадлежит множеству L_{r-1}

или

б) существует упорядоченная пара (q, γ) в множестве L_{r-1}, такая, что $q > 0$ и $p \in l_\gamma(q-1)_\beta$.

Алгоритм, описанный выше, будем называть алгоритмом l-предыстории k-го хода игрока α.

Обсудим это определение. Нетрудно заметить, что алгоритм l-предыстории состоит из счетного множества макрошагов.

Из предыдущего следует, что если множество L_r состоит лишь из элементов вида $(0, \beta)$, то выполняются равенства $\varnothing = L_{r+1} = \ldots = L_{r+n} = \ldots$.

Длиной алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α назовем $\sup\{r \in \overline{N} | L_r \neq \varnothing\}$.

Отметим, что если первая компонента в паре (k, α) равна нулю, то по определению длина алгоритма равна нулю. Если алгоритм l-предыстории k-го хода игрока α такой, что $L_r \neq \varnothing$ для любого натурального числа r, то его длина по определению равна $+\infty$. Для каких упорядоченных наборов информационных функций $l = (l_\beta, \beta \in A)$ такое случается, будет выяснено далее, а также будут приведены соответствующие примеры.

Множество L_r, определенное выше, будем называть r-м слоем алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α.

Слой L_r, соответствующий паре (k, α), иногда будем обозначать $L_r(k, \alpha)$.

Попробуем интерпретировать непустые слои $L_r(k, \alpha)$, которых в общем случае может быть счетное множество. О слое $L_1(k, \alpha)$ (правда, в иных терминах) мы уже говорили, как о множестве номеров ходов всех игроков, которые (ходы) необходимо и достаточно знать игроку α для совершения k-го хода в некоторый момент времени

$\bar{t}_r$, если он к этому моменту уже сделал $(k-1)$-й ход. Тогда о всех непустых слоях $L_r(k,\alpha)$ алгоритма k-го хода игрока α содержательно можно сказать так: для того, чтобы когда-либо состоялся k-й ход игрока α, необходимо и достаточно, чтобы состоялся каждый ход p игрока β для всякой пары (p,β), принадлежащей какому-нибудь слою $L_r(k,\alpha)$.

Будем называть упорядоченный набор информационных функций $l = (l_\alpha,\ \alpha \in A)$ информационно разрешимым, если алгоритм l-предыстории k-го хода игрока α имеет конечную длину для любого α из множества A при любом k из $\overline{T}_\alpha$.

Предыдущее определение можно пояснить так: если упорядоченный набор информационных функций $l = (l_\alpha,\ \alpha \in A)$ информационно разрешим, то каждый ход каждого игрока произойдет за конечное время.

Проиллюстрируем алгоритм l-предыстории k-го хода игрока α картинкой. При этом саму картинку мы рисовать не будем, а воспользуемся понятием графа, которое, как правило, сопровождается картинкой. В данном разделе под графом мы будем понимат упорядоченную пару $G = (L, M)$, где L – произвольное непустое множество, M – подмножество прямого произведения $L \times L$. Элементы множества L будем называть *вершинами*, элементы множества M – *дугами.*

Определение 1.1. *Графом предыстории (или просто предысторией) k-го хода игрока α будем называть граф*

$$G(k,\alpha) = (L(k,\alpha), \quad M(k,\alpha)),$$

где

1) множество вершин $L(k,\alpha) = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n(k,\alpha)$;

2) дуга (x,y) принадлежит множеству дуг $M(k,\alpha)$ тогда и только тогда, когда $x \in L(k,\alpha)$, $y \in L_1(x)$.

В данной работе мы не ставим цели фундаментального исследования графа $G(k,\alpha)$. Укажем лишь, что для всякой вершины $x \neq (k,\alpha)$ существует путь, соединяющий вершину (k,α) с вершиной x, и что в общем случае структура графа достаточно сложна. Содержательно граф $G(k,\alpha)$ детально показывает, что должно произойти, какие существуют связи между событиями (т. е. предысторию), чтобы совершился ход k игрока α.

Отметим, что в общем случае и множество вершин, и множество дуг графа $G(k, \alpha)$ могут быть произвольной мощности. Под *путем в графе* $G(k, \alpha)$ будем понимать всякую, не более чем счетную, последовательность дуг вида $s = ((x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, x_{k+1}), \ldots)$. Под *длиной пути* будем понимать количество дуг, составляющих путь s. При этом, если количество дуг бесконечно, то длина пути равна $+\infty$. *Циклом* будем называть такой путь, в котором начальная и конечная вершины совпадают. Будем говорить, что путь s проходит через вершину x (или вершина x участвует в образовании пути s), если x является началом или окончанием дуги, принадлежащей пути s. Путь s будем называть *максимальным путем в графе* $G(k, \alpha)$, если длина любого другого пути графа $G(k, \alpha)$ не больше длины пути s.

Теорема 1.1. *Длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α равна натуральному числу d тогда и только тогда, когда существует максимальный путь графа $G(k, \alpha)$ длиной d, начинающийся в вершине (k, α).*

Доказательство. Пусть путь

$$p = ((x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_r, x_{r+1}), \ldots),$$

где $x_0 = (k, \alpha) = L_0(k, \alpha) = L_0(x_0)$ и $x_{k+1} \in L_1(x_k)$ – по определению дуг графа $G(k, \alpha)$. Поэтому $x_1 \in L_1(k, \alpha)$, $x_2 \in L_2(k, \alpha)$, …, $x_{r+1} \in L_{r+1}(k, \alpha)$. Если $x_{r+1} \in L_{r+1}(k, \alpha)$, то слой $L_{r+1}(k, \alpha)$ не пуст. Поэтому длина всякого пути графа $G(k, \alpha)$, начинающегося в вершине (k, α), не больше, чем количество непустых слоев, реализуемых алгоритмом l-предыстории k-го хода игрока α (т. е. не более чем длина алгоритма).

Обратно: если слой $L_{r+1}(k, \alpha)$ не пуст, то для всякой вершины (p, β) из слоя $L_{r+1}(k, \alpha)$ существует вершина (q, γ) из слоя $L_r(k, \alpha)$, такая, что $(p, \beta) \in L_1(q, \gamma)$. Поэтому существует дуга $((q, \gamma), (p, \beta))$. Повторив рассуждения $(r + 1)$ раз, мы найдем путь, начинающийся в вершине $x_0 = (k, \alpha)$, заканчивающийся в вершине $x_{r+1} = (p, \beta)$, длина которого равна $r + 1$. Теорема доказана. $\square$

Из доказательства теоремы 1.1 и определения дуг в графе $G(k,\alpha)$ следует, что всякий путь длиной d, начинающийся в вершине (k,α), последовательно проходит через слои $L_0(k,\alpha)$, $L_1(k,\alpha)$, …, $L_d(k,\alpha)$ и только через них.

На основании теорем 4.1 из [4] и 1.1 можно дать *критерий информационной разрешимости* упорядоченного набора информационных функций на языке графов.

Теорема 1.2. *Для того чтобы упорядоченный набор информационных функций $l = (l_\alpha, \alpha \in A)$ был информационно разрешим, необходимо и достаточно, чтобы длины всех путей в графе $G(k,\alpha)$ были ограничены единой константой $d(k,\alpha) \in N$ для любого α из множества A, для любого k из множества $\overline{T_\alpha}$*

Доказательство. Доказательство теоремы 1.2 следует из теорем 4.1 из [4] и 1.1. □

2. Граф предыстории хода игрока в играх с конечным множеством игроков

Теорема 2.1. *Пусть A – конечное множество, $l = (l_\alpha, \alpha \in A)$ – упорядоченный набор точечно-ограниченных информационных функций, $\overline{\alpha} \in A$, $k \in \overline{T}_{\overline{\alpha}}$, длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока $\overline{\alpha}$ равна $+\infty$. Тогда в графе $G(k,\overline{\alpha})$ существуют пути длиной $+\infty$.*

Доказательство. Если множество путей с началом в вершине $(k,\overline{\alpha})$ графа $G(k,\overline{\alpha})$ конечно, то в силу доказательства теоремы 1.1 среди них найдется путь бесконечной длины.

Рассмотрим случай, когда множество путей графа $G(k,\overline{\alpha})$ с началом в вершине $(k,\overline{\alpha})$ бесконечно. Поскольку $|A| < +\infty$ (здесь $|A|$ – мощность множества A) и функции l_α, $\alpha \in A$, точечно-ограничены, множество вершин $L_1(k,\overline{\alpha})$ – конечно. Поэтому, по крайней мере, через одну из этих вершин проходит бесконечное множество путей графа $G(k,\overline{\alpha})$ с началом в вершине $(k,\overline{\alpha})$. Обозначим эту вершину (k_1,α_1). Поскольку через вершину (k_1,α_1) проходит бесконечное число путей с общим началом $((k,\overline{\alpha})),(k_1,\alpha_1))$, то множество вершин $L_1(k_1,\alpha_1) \neq \varnothing$. Рассуждениями, аналогичными предыдущим, можно найти вершину (k_2, α_2) из множества $L_1(k_1, \alpha_1)$, через которую также проходит бесконечное множество путей с общим началом $((k, \overline{\alpha}), (k_1, \alpha_1)), ((k_1, \alpha_1),\ (k_2, \alpha_2))$. Наше доказательство можно продолжить по индукции. В итоге мы получим путь $((k, \overline{\alpha}), (k_1, \alpha_1))$, $((k_1 \alpha_1), (k_2, \alpha_2))$, $((k_2, \alpha_2), (k_3, \alpha_3)), \ldots$, $((k_r, \alpha_r), (k_{r+1}, \alpha_{r+1}))$, $\ldots$ длиной $+\infty$. Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1, когда множество путей бесконечно, можно было провести и следующим образом. Рассмотрим множество конечных или счетных последовательностей вершин вида $(k, \overline{\alpha})$, $(k_1, \alpha_1), \ldots, (k_r, \alpha_r), (k_{r+1}, \alpha_{r+1}), \ldots$, удовлетворяющих двум условиям:

1) через каждую вершину проходит бесконечно много путей,

2) $(k_{r+1}, \alpha_{r+1}) \in L_1(k_r, \alpha_r)$ $((k_1, \alpha_1) \in L_1(k, \overline{\alpha}))$.

Введем на таких последовательностях *бинарное отношение* ρ. Будем говорить, что последовательность s_1 находится в отношении ρ с последовательностью s_2, если s_1 является началом s_2. Нетрудно заметить, что множество последовательностей указанного вида не пусто, а отношение ρ является отношением частичного порядка. Далее, пусть $s_1 \rho s_2 \rho \ldots s_r \rho s_{r+1} \ldots$ есть цепь. Тогда последовательность s, для которой каждая указанная последовательность s_i является ее началом, есть верхняя граница указанной цепи. Поэтому по лемме Куратовского–Цорна среди рассматриваемых последовательностей существует максимальный элемент $\overline{s}$ в смысле бинарного отношения ρ.

Покажем, что $\overline{s}$ представляет собой счетную последовательность вершин. Для этого предположим противное. Пусть $\overline{s} = (k, \alpha), (k_1, \alpha_1)$, $\ldots, (k_r, \alpha_r)$. Но по определению последовательности $\overline{s}$ через вершину (k_α, α_r) проходит бесконечно много путей. Поэтому $L_1(k_r, \alpha_r) \neq$ $\neq \varnothing$. С другой стороны, $|L_1(k_r, \alpha_r)| < +\infty$. Тогда, подобно тому, как мы это делали при доказательстве теоремы 2.1, найдем вершину $(k_{r+1}, \alpha_{r+1}) \in L_1(k_r, \alpha_r)$, через которую также проходит бесконечно много путей. Тогда последовательность $\overline{s}, (k_{r+1}, \alpha_{r+1})$ строго больше последовательности $\overline{s}$ в смысле отношения ρ. Противоречие. Следовательно, $\overline{s}$ представляет собой счетную последовательность и образует искомый путь бесконечной длины. $\square$

При доказательстве теоремы 2.1 мы рассмотрели полную группу возможностей:

а) множество путей графа $G(k, \overline{\alpha})$ конечно;

б) множество путей графа $G(k, \overline{\alpha})$ бесконечно.

В обоих случаях доказательство корректно. Далее покажем, что при выполнении условий теоремы 2.1 случай а) просто невозможен. Может возникнуть вопрос: почему же удалось доказать теорему в этом случае? Ответ известен: из лжи следуют и ложь, и истина.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 справедлива и для случая, когда множество A – бесконечно. При этом вместо требования точечной ограниченности необходимо потребовать, чтобы для любой вершины (p, β) графа $G(k, \overline{\alpha})$ неравенство $\max(l_p(\beta)_\gamma) > 0$ выполнялось лишь для конечного подмножества элементов γ из множества A. Доказательство последнего аналогично доказательству теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α равна $+\infty$. Тогда для любого наперед заданного целого числа d множество путей графа графа $G(k, \alpha)$ длиной, не меньшей d, и с началом в вершине (k, α), бесконечно.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое целое число d и предположим противное: множество путей S графа $G(k, \alpha)$, длиной не меньше d, конечно. Тогда в соответствии с теоремой 1.1 и в силу условий настоящей теоремы среди путей из множества S есть пути бесконечной длины. Выделим один такой путь и обозначим его

$$s = (((k, \alpha), (k_1, \alpha_1)), ((k_1, \alpha_1), (k_2, \alpha_2)), \ldots, ((k_r, \alpha_r), (k_{r+1}, \alpha_{r+1})), \ldots).$$

В соответствии с определением дуг графа $G(k, \alpha)$ выполняется: $(k_{r+1}, \alpha_{r+1}) \in L_1(k_r, \alpha_r)$. В силу нашего предположения о том, что множество путей S графа $G(k, \alpha)$, длиной больше d, конечно, существует натуральное число $m(s)$, удовлетворяющее условию $|L_1(k_r, \alpha_r)| = 1$ при $r \geq m(s)$. В противном случае мы получили бы бесконечное множество путей, имеющих общее начало конечной длины с путем s, и в то же время отличных от него.

Проанализируем условие $|L_1(k_r, \alpha_r)| = 1$ при $r \geq m(s)$. Поскольку упорядоченная пара $(k_r - 1, \alpha_r)$ при $k_r > 0$ всегда принадлежит слою $L_1(k_r, \alpha_r)$, то при $r \geq m(s)$ должны выполняться условия $l_{\alpha_r}(k_r - 1)_\gamma =$

$= \varnothing$ при $\gamma \neq \alpha_r$ и $L_1(k_r, \alpha_r) = (k_r - 1, \alpha_r)$ или $L_1(k_r, \alpha_r) = \varnothing$. Но тогда дуги пути s, начиная с дуги с номером $m(s)$, имеют вид

$$((k_{m(s)}, \alpha_r), (k_{m(s)} - 1, \alpha_r)), ((k_{m(s)} - 1, \alpha_r), (k_{m(s)} - 2, \alpha_r)), \ldots$$
$$\ldots, ((k_{m(s)} - i, \alpha_r), (k_{m(s)} - i - 1, \alpha_r)), \ldots, ((1, \alpha_r), (0, \alpha_r)).$$

Другими словами, путь s имеет конечную длину. Противоречие. Значит, множество путей S графа $G(k, \alpha)$, длиной не меньше d, бесконечно. Теорема 2.2 доказана. $\square$

Обратим внимание на то, что теорема 2.2 носит общий характер. Мы не делали предположений о мощности множества игроков A и о неограниченности информационных функций l_α, $\alpha \in A$. Конечно ли множество A, бесконечно ли или даже состоит из одного элемента – теорема 2.2 остается в силе.

В начале доказательства теоремы 2.2, исходя из противного, мы получили существование пути бесконечной длины. На самом деле, хотя при выполнении условий теоремы 2.2 множество всех путей и бесконечно, каждый путь может иметь конечную длину. Для этого достаточно рассмотреть приведенный далее пример 2.1, в котором покажем, что условие точечной ограниченности информационных функций в теореме 2.1 отбросить нельзя.

Пример 2.1. Обозначим множество натуральных чисел через N, $\overline{N} = N \cup \{0\}$. Исследуем счетно-шаговый процесс принятия решений двумя участниками, в котором информационные функции определены следующим образом:

$$l_1(1)_2 = \{1, 2, \ldots, r, \ldots, r \in N\},$$

$l_i(k)_j = \varnothing$ – в остальных случаях.

Рассмотрим алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1.

Шаг 0. $L_0(2, 1) = \{(2, 1)\}$.

Шаг 1. $L_1(2, 1) = \{(1, 1)\} \cup \{(r, 2), r \in N\}$.

Шаг 2. $L_2(2, 1) = \{(0, 1)\} \cup \{(r, 2), r \in \overline{N}\}$.

Шаг 3. $L_3 = L_{3+m} = \{(r, 2), r \in \overline{N}\}$, $m \in N$.

Все слои данного алгоритма, начиная с первого, состоят из счетного множества элементов. Поэтому длина алгоритма l-предыстории второго хода игрока 1 равна $+\infty$.

Исследуем пути графа $G(2,1)$. Поскольку по определению информационных функций слой $L_1(r,2) = \{(r-1,2)\}$, то всякий наш путь, начинающийся в вершине $(2,1)$, имеет вид $(((2,1),(1,1)),((1,1),(0,1)))$ либо $(((2,1),(r,2)),((r,2),(r-1,2)),\ ((r-1,2),(r-2,2)),\ \ldots,$ $((1,2),(0,2)))$, $r \in N$. Любой из этих путей имеет конечную длину. Осталось только заметить, что функция l_1 в точке 1 не ограничена: $l_1(1) = (l_1(1)_1, l_1(1)_2) = (\varnothing, \{1,2,\ldots,r,\ldots,r \in N\})$. Следовательно, условие точечной ограниченности в теореме 2.1 существенно.

Приведем пример, когда алгоритм l-предыстории k-го хода игрока α имеет бесконечную длину, и в бесконечном множестве путей графа $G(k,\alpha)$, начинающихся в вершине (k,α), только один путь имеет бесконечную длину.

Пример 2.2. Исследуем счетно-шаговый процесс принятия решений двух игроков, информационные функции которых определяются следующим образом: $l_1(1)_2 = \{2\}$, $l_2(1)_1 = \{2\}$ и $l_i(k)_j = \{k\}$ в остальных случаях.

Алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1 будет следующим:

Шаг 0. $L_0(2,1) = \{(2,1)\}$.

Шаг 1. $L_1(2,1) = \{(1,1)\} \cup \{(k,2), k \in l_1(1)_2\} = \{(1,1),(2,2)\}$.

Шаг 2. $L_2(2,1) = \{(0,1),(0,2),(1,2),(2,1)\}$.

Шаг 3. $L_3(2,1) = \{(0,2),(0,1),(1,1),(2,2)\}$.

Шаг 4. $L_4(2,1) = \{(0,1),(0,2),(1,2),(2,1)\}$.

Шаг 5. $L_5(2,1) = \{(0,2),(0,1),(1,1),(2,2)\}$.

Поскольку второй и четвертый слои совпали, то всякий нечетный следующий слой будет совпадать с третьим, всякий четный – со вторым.

Теперь исследуем пути. В слое $L_1(2,1)$ две вершины; $L_1(1,1) = \{(0,1),(0,2)\}$, поэтому пути, проходящие через вершину $(1,1)$ в следующем по номеру слое заканчиваются или в вершине $(0,1)$ или в вершине $(0,2)$. Исследуем пути, которые «пересекают» слой $L_1(2,1)$ в вершине $(2,2)$. Слой $L_1(2,2) = \{(1,2),(2,1)\}$. Поэтому путь с началом $((2,1),(2,2))$ «пересечет» слой $L_2(2,1)$ либо в вершине $(1,2)$, либо в вершине $(2,1)$. Слой $L_1(1,2) = \{((0,2),(0,1)\}$. Отсюда делаем вывод, что всякий путь, проходящий через вершину $(1,2)$, в следующем по номеру слое заканчивается. Проанализируем вершину $(2,1)$.

Слой $L_1(2,1) = \{(1,1),(2,2)\}$, и эту ситуацию мы уже рассмотрели в самом начале.

Исходя из предыдущих рассуждений, можно выписать путь, длина которого равна $+\infty$:

$$s = (((2,1),(2,2)),((2,2),(2,1)),((2,1),(2,2)),((2,2),(2,1)),\ldots).$$

Этот путь – единственный. Однако множество всех путей счетно. Действительно, через «каждую» вершину $(2,2)$ (слово «каждый» употреблено в том смысле, что вершина (2, 2) принадлежит каждому нечетному слою), помимо указанного, проходят пути, имеющие следующие конечные продолжения:

$$(((2,2),(1,2)),((1,2),(0,2))), \quad (((2,2),(1,2)),((1,2),(0,1))).$$

Через «каждую» вершину $(2,1)$ помимо указанного проходят пути, имеющие следующие конечные продолжения:

$$(((2,1),(1,1)),((1,1),(0,1))), \quad (((2,1),(1,1)),((1,1),(0,2))).$$

Обратим внимание на то, что путь s бесконечной длины представляет собой цикл: $(((2,1),(2,2)),((2,2),(2,1)))$. Другого в данном случае и быть не могло, поскольку множество вершин $L(2,1)$ графа $G(2,1)$ конечно и равно $\{(2,1),(1,1),(2,2),(0,1),(0,2),(1,2)\}$. Множество дуг графа $G(2,1)$ конечно и

$$M(2,1) = \{((2,1),(1,1)),((2,1),(2,2)),((1,1),(0,1)),((1,1),(0,2)),\\ ((2,2),(1,2)),((2,2),(2,1)),((1,2),(0,2)),((1,2),(0,1))\}.$$

Таким образом, в графе $G(2,1)$ имеется шесть вершин и восемь дуг.

Теперь приведем пример процесса принятия решений одним участником, иллюстрирующий теорему 2.2.

Пример 2.3. Рассмотрим счетно-шаговый процесс принятия решений с одним участником, информационная функция в котором определяется следующим образом: $l_1(1)_1 = \{3\}$, $l_1(k)_1 = \{k\}$ – в остальных случаях.

Алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1 будет следующим:

Шаг 0. $L_0(2,1) = \{(2,1)\}$.

Шаг 1. $L_1(2,1) = \{(1,1),(3,1)\}$.
Шаг 2. $L_2(2,1) = \{(0,1),(2,1)\}$.
Шаг 3. $L_3(2,1) = \{(1,1),(3,1)\}$.

Третий и первый слои совпали, поэтому всякий четный слой будет равен второму, всякий нечетный – первому. Поэтому длина алгоритма l-предыстории второго хода игрока 1 равна $+\infty$.

По теореме 2.2 в графе $G(2,1)$ должно быть бесконечное множество путей. Покажем это.

Сначала отметим, что, как и в примере 2.2, в данном случае существует единственный путь, имеющий бесконечную длину:

$$(((2,1),(3,1)),((3,1),(2,1)),((2,1),(3,1)),((3,1),(2,1)),\ldots).$$

Естественно, это цикл: $(((2,1),(3,1)),((3,1),(2,1)))$. Далее через «каждую» вершину $(2,1)$ проходит путь, имеющий продолжение:

$$(((2,1),(1,1)),((1,1),(0,1))).$$

Слово «каждый» здесь употреблено в том смысле, что вершина $(2,1)$ принадлежит каждому четному слою $L_{2r}(2,1)$.

Таким образом, мы показали, что множество путей в графе $G(2,1)$ счетно.

Посчитаем количество вершин и дуг в графе $G(2,1)$:

$$L(2,1) = \{(2,1),(1,1),(3,1),(0,1)\},$$

$$M(2,1) = \{((2,1),(1,1)),((2,1),(3,1)),((3,1),(2.1)),((1,1),(0,1))\}.$$

Таким образом, в графе $G(2,1)$ имеется четыре вершины и четыре дуги.

О примерах 2.1–2.3 можно сказать, что приведенные в них упорядоченные наборы информационных функций не удовлетворяют условию информационной разрешимости. Последнее следует из того, что в каждом случае нашлась упорядоченная пара (k,α), для которой алгоритм l-предыстории имеет длину $+\infty$.

Приведенные примеры относятся к процессам принятия решений с конечным числом участников. Далее будет приведен пример (см. 3.1) со счетным множеством участников, подтверждающий теорему

2.2. В нем алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1 имеет бесконечную длину, множество путей графа $G(2,1)$ счетно, при этом каждый путь имеет конечную длину.

Сделаем еще одно важное замечание к теореме 2.2, которое следует из ее доказательства: если существует хотя бы один путь в графе $G(k,\alpha)$ бесконечной длины, то множество всех путей графа $G(k,\alpha)$ бесконечно.

Теорема, обратная теореме 2.2, в общем случае не справедлива. Для подтверждения этого рассмотрим следующий пример:

Пример 2.4. Пусть имеется счетно-шаговый процесс принятия решений счетным множеством участников, в котором информационные функции игроков определяются следующим образом: $l_i(k)_j = \{k\}$, где $i \in N$, $j \in N$, $k \in \overline{N}$.

Рассмотрим алгоритм l-предыстории r-го хода игрока i:

Шаг 0. $L_0(r,i) = \{(r,i)\}$.

Шаг 1. $L_1(r,i) = \{(r-1,j), j \in N\}$.

Шаг 2. $L_2(r,i) = \{(r-2,j), j \in N\}$.

$\vdots$

Шаг r. $L_r(r,i) = \{(0,j), j \in N\}$.

Нетрудно заметить, что длина данного алгоритма для любой упорядоченной пары (r,i) конечна и равна r. Другими словами, в данном случае упорядоченный набор информационных функций $l = (l_i, i \in \in N)$ удовлетворяет условию информационной разрешимости.

Посчитаем теперь количество путей графа $G(r,i)$ с началом в вершине (r,i). Всякий путь имеет вид $(((r,i),(r-1,j_1)),((r-1,j_1),(r-2,j_2)),\ldots,((1,j_{r-1}),(0,j_r)))$, где каждое число $j_1,j_2,\ldots,j_r$ «пробегает» все множество натуральных чисел N, т.е. множество всех путей графа $G(r,i)$ счетно.

Пример 2.4 показывает, что теорема, обратная теореме 2.2, в общем случае неверна. Но имеет место следующее утверждение:

Теорема 2.3. *Пусть множество A – конечно, $i \in A$ и множество путей графа $G(k,i)$ – бесконечно. Тогда длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока i равна $+\infty$.*

Доказательство. Возможна следующая полная группа условий:

а) $|L_r(k,i)| < +\infty$ для любого r из $\overline{N}$;
б) существует $\overline{\overline{r}}$ из $\overline{N}$, такое, что $|L_{\overline{\overline{r}}}(k,i)| = +\infty$.

Рассмотрим случай а). По определению дуг графа $G(k,i)$ мощность множества путей, «проходящих» только через первые p слоев и начинающихся в точке $(k,i) = x_0$, не больше, чем число $x = \prod_{j=0}^{p} |L_j(k,i)|$. Поэтому если бы число непустых слоев в случае а) было конечно, то и множество всех путей было бы конечно. Последнее противоречит условию теоремы. Значит, в данном случае число непустых слоев равно $+\infty$. Поэтому и длина алгоритма k-го хода игрока i равна $+\infty$.

Рассмотрим случай б). Среди всех слоев $L_r(k,i)$, состоящих из бесконечного множества элементов, рассмотрим слой с наименьшим номером. Пусть этим слоем будет слой $L_{\overline{r}}(k,i)$. Понятно, что $\overline{r} > 0$, и слой $L_{\overline{r-1}}(k,i)$ содержит конечное множество элементов. По определению слоя имеет место равенство $L_{\overline{r}}(k,i) = \bigcup_{(p,\beta)\in L_{\overline{r}-1}(k,i)} L_1(p,\beta)$. Поскольку $|L_{\overline{r}-1}(k,i)| < +\infty$, то существует вершина $(\overline{p},\overline{\beta})$ из слоя $L_{\overline{r}-1}(k,i)$, такая, что $|L_1(\overline{p},\overline{\beta})| = +\infty$.

Проанализируем последнее равенство. Поскольку

$$L_1(\overline{p},\overline{\beta}) = \{(\overline{p}-1,\overline{\beta})\} \cup \{(q,\gamma) | q \in l_{\overline{\beta}}(\overline{p}-1)_\gamma, \gamma \in A\}, \quad |A| < +\infty,$$

то существует $\overline{\gamma}$ из множества A, такое, что $|l_{\overline{\beta}}(\overline{p}-1)_{\overline{\gamma}}| = +\infty$. Последнее означает, что в слое $L_{\overline{r}}(k,i)$ присутствует счетное множество упорядоченных пар вида $(q,\overline{\gamma})$. А тогда по определению в слое $L_{\overline{r}+1}(k,i)$ присутствуют все пары $(q-1,\overline{\gamma})$, где $q \geq 1$. Таких пар опять счетное множество. Продолжая наши рассуждения по индукции, можно показать, что во всяком слое $L_{\overline{r}+m}(k,i)$, $m \in \overline{N}$, присутствует счетное множество пар вида $(y,\overline{\gamma})$. Последнее означает, что длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока i равна $+\infty$. Теорема 2.3 доказана. □

Сделаем замечания к теореме 2.3. В случае а) мы воспользовались неравенством: множество путей, «проходящих» через первые p слоев, не больше числа $x = \prod_{j=0}^{p} |L_j(k,i)|$. Покажем это.

Действительно, всякому пути $((x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{p-1},x_p))$ соответствует точка $(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{p-1},x_p)$ из произведения множеств

$\prod\limits_{j=0}^{p} L_j(k,i)$, причем это соответствие инъективно. Поэтому количество путей, «проходящих» через первые p слоев, не больше чем мощность множества $\prod\limits_{j=0}^{p} L_j(k,i)$. Последняя равна $\prod\limits_{j=0}^{p} |L_j(k,i)|$. Неравенство показано.

Когда мы говорим, что путь «проходит» через слой, то имеем в виду, что путь проходит через какую-нибудь вершину этого слоя. Через конкретную вершину путь может пройти любое конечное или даже счетное число раз (например, в цикле). Конкретный же слой путь если и пересекает, то только один раз. Действительно, пусть путь $s = (\ldots,(x,y),(y,z),\ldots)$ пересекает слой $L_r(k,\alpha)$ в вершине x. Тогда по определению дуг графа $G(k,\alpha)$ вершина $y \in L_1(x)$, а значит $y \in L_{r+1}(k,\alpha)$. Аналогично, вершина $z \in L_{r+2}(k,\alpha)$. Вершина x в пути s после вершины y может встретиться, но номер слоя, которому она будет принадлежать, будет строго больше r.

Проанализируем, когда реализуется случай а) при доказательстве теоремы 2.3. В этом случае $|L_r(k,i)| < +\infty$ для любого r из $\overline{N}$. Последнее означает, что вектор $(\max(l_\beta(p-1)_\gamma,\ \gamma \in A)$ ограничен для любой упорядоченной пары (p,β) из любого слоя $L_r(k,i)$. Откуда следует, что мы неявно попали в условия теоремы 2.1. Действительно, если посмотреть внимательно, в условиях теоремы 2.1 не надо требовать полной точечной ограниченности информационных функций. Достаточно было потребовать, чтобы вектор $(\max(l_\beta(p-1)_\gamma,\ \gamma \in A)$ был ограничен для каждой вершины (p,β) графа $G(k,\alpha)$. Таким образом, для реализации условия а) доказательства теоремы 2.3 мы обнаруживаем путь бесконечной длины.

В случае б) мы находим счетное число вершин вида $(q,\overline{\gamma})$. Из счетности следует, что первая компонента q может принимать сколько угодно большие значения. Всякая вершина $(q,\overline{\gamma})$ по определению дуг графа $G(k,i)$ порождает конечный путь $(((q,\overline{\gamma}),(q-1,\overline{\gamma})), ((q-1,\overline{\gamma}),(q-2,\overline{\gamma})),\ \ldots,((1,\overline{\gamma}),(0,\overline{\gamma})))$. Таким образом, в случае б) мы обнаруживаем счетное множество конечных путей разной длины, что и обеспечивает длину, равную $+\infty$ для алгоритма l-предыстории k-го хода игрока i. Подобную ситуацию мы наблюдали в примере 2.1.

Собирая теоремы 2.2 и 2.3 для процессов принятия решений с конечным числом участников, получаем следующую теорему:

Теорема 2.4. *Пусть $l = (l_\beta, \beta \in A)$ – упорядоченный набор информационных функций, множество A – конечно. Тогда для того, чтобы длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α была равна $+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы множество путей графа $G(k, \alpha)$ было бесконечно.*

Доказательство. Доказательство следует из доказательств теорем 2.2, 2.3.

Таким образом, исходя из теоремы 2.4, можно считать, что мы получили *еще один критерий информационной разрешимости* упорядоченного набора информационных функций для процессов принятия решений с конечным числом участников. □

Теорема 2.5. *Пусть $l = (l_\alpha, \alpha \in A)$ – упорядоченный набор информационных функций, A – конечное множество. Для того чтобы набор l был информационно разрешим, необходимо и достаточно, чтобы для любого α из множества A, для любого k из $\overline{T_\alpha}$ множество путей графа $G(k, \alpha)$ было конечно.*

Доказательство. Доказательство теоремы 2.5 следует из теоремы 2.4. □

Утверждение 2.1. *Множество путей графа $G(k, \alpha)$ конечно тогда и только тогда, когда конечно множество путей с началом в вершине (k, α).*

Доказательство. Доказательство утверждения 2.1 следует из того, что через каждую вершину графа $G(k, \alpha)$ проходит путь, начинающийся в вершине (k, α). □

В примерах, иллюстрирующих теоремы 2.1–2.3, присутствовало лишь конечное множество путей, длиной $+\infty$. Чтобы не сложилось иллюзии, что последнее выполняется всегда, когда множество игроков A конечно, приведем следующий пример:

Пример 2.5. Рассмотрим счетно-шаговый процесс принятия решений двумя участниками, в котором информационные функции устроены следующим образом:

$$l_i(k)_i = \{k\},\ l_1(1)_2 = \{1, 2, \ldots, r, \ldots, r \in N\},$$

$l_i(k)_j = \{k+1\}$ – в остальных случаях.

Алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1 будет следующим:

Шаг 0. $L_0(2,1) = \{(2,1)\}$.

Шаг 1. $L_1(2,1) = \{(1,1)\} \cup \{(p,2), p \in l_1(1)_2\} = \{(1,1)\} \cup \{(p,2), p \in N\}$.

Шаг 2. $L_2(2,1) = \{(0,1),(1,2)\} \cup \{(p-1,2),(p,1),\ p \in N\} = \{(u,1),(v,2), u \in \overline{N}, v \in \overline{N}\}$.

Шаг 3. $L_3(2,1) = \{(r,2),(p,1),\ r \in \overline{N},\ p \in \overline{N}\}$.

Из приведенных рассуждений следует, что все слои, начиная со слоя $L_2(2,1)$, совпадают и включают в себя счетное множество упорядоченных пар. Рассмотрим пару $(r,2)$, $r \geq 3$, скажем, в слое $L_2(2,1)$. Слой $L_1(r,2) = \{(r-1,2),(r,1)\}$, слой $L_1(r,1) = \{(r-1,1),(r,2)\}$. Поэтому всякий путь, проходящий через вершину $(r,2)$, имеет бесконечное циклическое продолжение:

$$(((r,2),(r,1)),((r,1),(r,2)),((r,2),(r,1)),((r,1),(r,2)),\ldots).$$

В слое $L_2(2,1)$ находится счетное множество вершин типа $(r,2)$, $r \geq 3$. Таким образом, мы указали счетное подмножество путей длиной $+\infty$ в графе $G(2,1)$.

С другой стороны, из предыдущих рассуждений следует, что через всякую вершину $(r,2)$ проходит конечный путь

$$(((r,2),(r-1,2)),((r-1,2),(r-2,2)),\ldots,((1,2),(0,2))),\ r \in N.$$

Поэтому в графе $G(2,1)$ находится счетное подмножество путей конечной длины.

3. О циклах графа предыстории хода игрока

Утверждение 3.1. *Если существуют циклы в графе $G(k,\alpha)$, то длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока α равна $+\infty$.*

Доказательство. Пусть $((x_0,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_r,x_{r+1}))$ – цикл, т.е. $x_0 = x_{r+1}$. Не умаляя общности доказательства, будем считать, что этот цикл – простой. Обозначим $x_0 = (p_0,\beta_0)$, $x_1 = (p_1,\beta_1),\ldots,x_{r+1} = (p_{r+1},\beta_{r+1})$. Тогда $(p_0,\beta_0) = (p_{r+1},\beta_{r+1})$. Пусть вершина $x_0 = (p_0,\beta_0)$ принадлежит слою $L_n(k,\alpha)$. Тогда вершина $x_0 = x_{r+1} = (p_{r+1},\beta_{r+1})$

принадлежит слою $L_{n+r+1}(k, \alpha)$. Откуда по индукции следует, что вершина x_0 принадлежит всякому слою $L_{n+m(r+1)}$, $m \in N$. Из последнего же следует, что слой $L_s(k, \alpha) \neq \varnothing$ для любого s из $\overline{N}$. Утверждение 3.1 доказано. □

Отметим, что в общем случае утверждение, обратное утверждению 3.1, неверно. Для этого проанализируем алгоритм l-предыстории второго хода игрока 1 из примера 2.1 из [4].

Пример 3.1. Нетрудно заметить, что алгоритм устроен так:

Шаг 0. $L_0(2,1) = \{(2,1)\}$.

Шаг 1. $L_1(2,1) = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,r), \ldots, r \in N\}$.

Шаг 2. $L_2(2,1) = \bigcup\limits_{(p,\beta) \in L_1(2,1)} L_1(p,\beta) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_1(1,i)$.

По определению информационных функций

$$L_1(1,i) = \{\ldots, (0, i-2), (1, i-1), (0,i), (0, i+1), \ldots, (0, i+s), \ldots, s \in N\}.$$

Таким образом, $L_2(2,1) \supseteq L_1(2,1) = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,r), \ldots, r \in N\}$. Используя математическую индукцию, можно показать, что $L_m(2,1) \supseteq \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,r), \ldots, r \in N\}$ для любого m из N. Откуда заключаем, что длина алгоритма l-предыстории второго хода игрока 1 равна $+\infty$. Покажем, тем не менее, что граф $G(2,1)$ не содержит циклов. Действительно, по определению дуг графа ни один путь не может начаться с вершины $(0,i)$. Исследуем пути, начинающиеся с вершины $(1,i)$. Дуга с началом в вершине $(1,i)$ может закончиться в одной из вершин:

$$\{\ldots, (0, i-2), (1, i-1), (0,i), (0, i+1), \ldots, (0, i+s), \ldots, s \in N\}.$$

По определению дуг всякий путь $((1,i), (0,r))$ не имеет продолжения, так как $L_1(0,r) = \varnothing$. Поэтому интерес представляет только дуга $((1,i), (1, i-1))$. По соображениям, аналогичным предыдущим, этот путь может быть продолжен только дугой $((1, i-1), (1, i-2))$ и т.д. В итоге мы получим путь

$$\overline{s} = (((1,i), (1, i-1)), ((1, i-1), (1, i-2)), \ldots$$
$$\ldots, ((1,3)), ((1,2)), ((1,2)), ((1,1))),$$

который еще можно продолжить. Все остальные пути, начинающиеся с вершины $(1, i)$, уже закончились.

Исследуем вершину $(1, 1)$. Из определения информационной функции l_1 следует, что $L_1(1, 1) = \{(0, 1), (0, 2), \ldots, (0, r), \ldots, r \in N\}$. Поэтому какой бы дугой $((1, 1), (0, r))$, из числа возможных, мы не продолжили путь $\overline{s}$, эта дуга будет последней. Тем самым мы показали, что всякий путь в графе $G(2, 1)$ имеет вид

$$(((2,1),(1,i)),((1,i),(1,i-1)),\ldots$$
$$\ldots,((1,i-s),(1,i-s-1)),((1,i-s-1),(0,r)))$$

либо

$$(((1,j),(1,j-1)),\ldots,((1,j-s),(1,j-s-1)),((1,j-s-1),(0,q))).$$

По строению путей видно, что циклы в них отсутствуют. Что и требовалось доказать.

В примере 3.1 мы исследовали процесс принятия решений со счетным множеством игроков. Но если рассмотреть процесс с конечным множеством игроков, то утверждение, обратное утверждению 3.1, станет справедливым.

Утверждение 3.2. *Пусть $l = (l_i,\, i \in A)$ – упорядоченный набор точечно-ограниченных информационных функций, причем A – конечное множество. Тогда, если длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока i равна $+\infty$, то в графе $G(k, i)$ содержатся циклы.*

Доказательство. Отметим сначала, что $k > 0$, поскольку длина алгоритма l-предыстории k-го хода игрока i равна $+\infty$. Из теоремы 2.1 следует, что в графе $G(k, i)$ существует бесконечный путь, начинающийся в вершине $(k, i) = (k_0, i_0) = x_0$. Обозначим его $s = ((x_0, x_1),$ $(x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_r, x_{r+1}),\ \ldots)$. Вершину же x_r обозначим (k_r, i_r). Возможна следующая полная группа условий:

а) путь s проходит через конечное число вершин, равное d;

б) путь s проходит через бесконечное (счетное) число вершин.

В случае а) утверждение 3.2 справедливо, поскольку максимально может быть организовано $(d-1)$ дуг, потенциально образующих путь, у которых окончание не совпадает ни с одним началом другой дуги.

Рассмотрим случай б). Не умаляя общности доказательства, будем считать, что среди чисел i_r, входящих в образование дуг пути s, присутствуют все числа из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Поскольку в образовании пути участвует бесконечное множество вершин, то, опять не умаляя общности доказательства, будем считать, что вершины типа $(j, 1)$, участвующие в образовании пути s, образуют счетное множество. Такое возможно потому, что всего разных типов вершин, через которые проходит путь s, не больше n (по числу игроков). Перенумеруем вершины типа $(j, 1)$ в порядке возрастания первых компонент: $(j_1, 1), (j_2, 1), \ldots, (j_m, 1)(j_{m+1}, 1), \ldots, j_m < j_{m+1}$. Обозначим какую-либо из вершин пути s типа $(j_1, 1)$ через x_r. До вершины x_r путь s мог пройти лишь через конечное число вершин. Поэтому путь s проходит через вершину $x_{r+h} = (j_h, 1)$ и $j_h > j_1$. Проанализируем вершину $(j_h, 1)$. По определению в слое $L_1(j_h, 1)$ присутствует вершина $(j_h - 1, 1)$, в слое $L_1(j_h - 1, 1)$ – вершина $(j_h - 2, 1), \ldots$, в слое $L_1(j_1 + 1, 1)$ – вершина $x_r = (j_1, 1)$. Тогда путь

$$((x_r, x_{r+1}), (x_{r+1}, x_{r+2}), \ldots, (x_{r+h-1}, x_{r+h}), ((j_h, 1), (j_h - 1, 1)),$$
$$((j_h - 1, 1), (j_h - 2, 1)), \ldots, ((j_1 + 1, 1), (j_1, 1)))$$

образует цикл, поскольку начальная вершина пути x_r совпадает с конечной вершиной $(j_1, 1)$. Утверждение 3.2 доказано. $\square$

Если рассмотреть теорему 2.1 и утверждения 3.1 и 3.2 вместе, то можно констатировать, что мы получили еще один *критерий информационной разрешимости* для процессов принятия решений с конечным числом игроков на языке графов.

Теорема 3.1. *Пусть множество A – конечно. Для того чтобы упорядоченный набор информационных функций $l = (l_\alpha, \alpha \in A)$ был информационно разрешим, необходимо и достаточно, чтобы в графе $G(k, \alpha)$ отсутствовали циклы и функция функция l_α была точечно ограничена для любого α из A, для любого k из множества $\overline{T}_\alpha$.*

Дадим интерпретацию теореме 3.1. Если процесс принятия решений развивается правильно, гармонично, то предыстория любого хода любого игрока должна быть конечной (мы так считаем). Допустим, что процесс развивается корректно, но тем не менее в графе

$G(k,\alpha)$ присутствует цикл s. И пусть цикл s проходит через вершины (p,β) и (q,γ), причем неважно, в какой последовательности. Поскольку s – цикл, то в алгоритме k-го хода игрока α будут слои с меньшими номерами, содержащие вершину (p,β), чем некоторые слои, содержащие вершину (q,γ), и наоборот. Из последнего следует: для того, чтобы игрок β совершил свой p-й ход, необходимо, чтобы игрок γ совершил свой q-й ход. И для игрока γ справедливо аналогичное утверждение. Таким образом, мы получили тупиковую, противоречивую ситуацию в смысле последовательности ходов игроков. Итак, если процесс развивается корректно, то в любом графе $G(k,\alpha)$ отсутствуют циклы. В заключение дадим обобщающее определение:

Определение 3.1. *Графом истории процесса принятия решений с множеством игроков A (или просто историей), соответствующим упорядоченному набору информационных функций $l = (l_\alpha, \alpha \in A)$, будем называть граф $G = (L, M)$, где*

1) множество вершин L есть множество упорядоченных пар вида (k,α), $\alpha \in A$, $k \in \overline{T}_\alpha$;

2) дуга (x,y) принадлежит множеству дуг M тогда и только тогда, когда $x \in L$, $y \in L_1(x)$.

Содержательно граф истории процесса описывает динамику поступления информации участникам процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Дифференциальные игры с неполной информацией* Иркутск: Издательство иркутского университета, 1984.

2. Слобожанин Н.М. *Информация и управление в динамических играх.* Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2002.

3. Слобожанин Н.М. *Информационная разрешимость в многошаговых играх с конечным множеством игроков* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т.3. Вып. 2. С. 81-101.

4. Слобожанин Н.М. *Информационная разрешимость в многошаговых играх с множеством игроков произвольной мощности* //

Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т.3. Вып. 4. С. 99-127.

5. Kuhn H. *Extensive games and the problem of information* // Annals of Mathematics Studies. 1953. V. 28. P. 193–216.

6. Scarf H., Shapley L. *Game with partial information* // Annals of Mathematics Studies. 1957. V. 3. N 39. P. 213–229.

PREHISTORY GRAPH OF THE MOVE OF A PLAYER IN MULTISTAGE GAMES WITH SEPARATED DYNAMICS

Nicolai M. Slobozhanin, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (nickmsl@mail.ru).

Abstract: Analysis of information structure of multistage games with separated dynamics, with a player set of arbitrary cardinality, in which information of the player about the process is determined by means of his vector-function, is given in the paper. The definition of a prehistory graph of the move of a player to analyze information solvability of an ordered according to the players set of information vector-functions is introduced. Necessary and sufficient conditions theorems of information solvability in the language of graphs of move prehistories for multistage games both with a finite and infinite set of players are obtained. The impact of the graph of move prehistory cycles on information solvability is separately investigated. All the basic theorems and statements are accompanied with examples illustrating them.

Keywords: multistage games with a set of players of arbitrary cardinality with separated dynamics, information vector-function, information solvability, prehistory graph of the move of a player, graph of game history.