Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.3, с. 32–53

УДК 519.83
ББК 22.18

ИГРЫ ТОРГОВ НЕСКОЛЬКИМИ АКТИВАМИ*

Виктор К. Доманский
Виктория Л. Крепс
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: doman@emi.nw.ru, vita_kreps@mail.ru

Рассматриваются модели многошаговых торгов между двумя различно информированными игроками, на которых торгуются рисковые ценные бумаги (акции) нескольких типов. Случайные ликвидные цены акций зависят от «состояния природы», которое перед началом торгов выбирается случайным ходом на весь их период согласно вероятностному распределению, известному обоим игрокам. Игрок 1 является инсайдером, он знает «состояние природы». Игрок 2 не имеет этой информации. Игрок 2 знает, что Игрок 1 является инсайдером. Допустимы любые целочисленные векторные ставки. Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой с неполной информацией у второго игрока. Мы показываем, что если дисперсии случайных цен акций конечны, то значения n-шаговых игр ограничены. Это позволяет рассматривать торги неограниченной продолжительности. Мы даем решения для соответствующих бесконечно-продолжающихся игр. Аналогично рассмотренному в [9] случаю двух активов, оптимальная стратегия инсайдера порождает случайное блуждание цен сделок, симметрия которого нарушается на финальных этапах игры.

* Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00462а

Ключевые слова: биржевые торги, повторяющиеся игры, асимметричная информация, оптимальные стратегии, случайное блуждание.

1. Введение

Возникновение регулярных случайных колебаний цен на финансовых рынках принято объяснять влиянием на процесс ценообразования многочисленных независимых слабых внешних воздействий, подверженных случайным изменениям во времени.

Однако, гипотеза об полностью экзогенном происхождении этих осцилляций не является удовлетворительной. С одной стороны, такие внешние воздействия, как например, политические события, использование фирмой новой технологии и т.п., носят шоковый характер. Они должны были бы привести к скачкам ценового процесса. С другой стороны, в большинстве случаев, даже шоковые воздействия, если информация о них не является общим достоянием, не приводят к значительным ценовым скачкам.

В работе Кайла [10] впервые была высказана гипотеза о возможном эндогенном происхождении регулярных случайных флуктуаций в ценовом процессе: колебания цен могут порождаться маскировочными действиями инсайдера. Биржевые агенты, имеющие дополнительную инсайдерскую информацию, при длительном взаимодействии неизбежно «выдают» эту информацию другим участникам рынка через свои действия. Инсайдер не заинтересован в немедленном обнаружении своей приватной информации, влекущем утрату стратегического преимущества. Это стремление инсайдера скрывать свою информацию понуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий. Именно эта рандомизация приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен и влечет появление в их эволюции броуновской компоненты.

В модели Кайла броуновское движение, по сути дела, вводится в модель извне. Значительно убедительнее идея эндогенного происхождения случайных колебаний цен продемонстрирована в работе Де Мейера и Салей [5] с помощью упрощенной модели многошаговых торгов однотипными акциями. Торги ведут между собой два игрока. Перед началом торгов случайный ход (формализация шокового события) определяет цену акции на весь период торгов. Выбранная цена сообщается Игроку 1 и не сообщается Игроку 2. Оба игрока знают вероятность высокой цены акции.

На каждом последовательном шаге торгов $t = 1, 2, ..., n$, игроки одновременно делают ставки – называют свои цены одной акции. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. При названных равных ценах ничего не происходит. Оба игрока стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс ликвидационная цена полученных акций).

В этой модели неинформированный Игрок 2 должен использовать историю наблюдаемых предыдущих действий инсайдера, Игрока 1, для того чтобы на каждом шаге переоценивать свою априорную информацию и делать выводы об истинном состоянии природы. Таким образом, Игрок 1 должен поддерживать баланс между использованием своей приватной информации и сокрытием ее от Игрока 2, что и понуждает его рандомизировать свои действия.

Де Мейер и Салей рассматривают модель с двумя возможными значениями случайной цены акции и произвольными ставками игроков. Они сводят описанную модель к антагонистической n-шаговой повторяющейся игре с неполной информацией у второго игрока. В отличие от модели Ауманна и Машлера [4], эта игра имеет континуум возможных действий игроков. Де Мейер и Салей показывают, что эти n-шаговые игры имеют значения, т.е. гарантированный выигрыш Игрока 1 равен гарантированному проигрышу Игрока 2. Они находят эти значения и оптимальные стратегии игроков. При n стремящемся к бесконечности, значения бесконечно растут со скоростью $\sqrt{n}$. Показано, что при применении игроками оптимальных стратегий в асимптотике цен появляется броуновская компонента.

Этот же результат получен в работе Де Мейера [6] для моделей с весьма общим торговым механизмом.

Представляется более реалистичным считать, что игроки могут назначать только дискретные ставки пропорциональные минимальной денежной единице.

Анализ модели торгов с тем же торговым механизмом, как и в модели авторов работы [5], но с дискретными возможными ставками игроков проведен в работах [7] и [1], в которых рассматриваются n-

шаговые игры $G_n^m(p)$ с двумя возможными значениями ликвидной цены (1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$) и с допустимыми ставками, кратными $1/m$.

В работах [7] и [1] показано, что в отличие от модели [5], последовательность значений $V_n^m(p)$ игр $G_n^m(p)$ ограничена сверху и при n, стремящемся к бесконечности, сходится. Предел этих значений $H^m(p)$ представляет собой непрерывную вогнутую кусочно-линейную функцию от p с m областями линейности $[k/m, (k+1)/m], k = 0, \dots, m-1$, со значениями в точках излома $H^m(k/m) = k(m-k)/2m$.

Ввиду ограниченности последовательности функций $V_n^m(p)$ имеет смысл рассматривать игры $G_\infty^m(p)$ с бесконечным числом шагов. Однако, в отличие от случая $n < \infty$, существование значения для недисконтированных игр $G_\infty^m(p)$ с неусредненным выигрышем требует доказательства. В работах [7] и [1] мы доказываем этот факт, в явном виде строя оптимальные стратегии. Мы показываем что, значение V_∞^m этой игры равно H^m, и оба игрока имеют оптимальные стратегии.

Оптимальная стратегия Игрока 1 обеспечивает ему максимальный средний выигрыш $1/2m$ за один шаг (наискорейшая оптимальная стратегия). Эта стратегия порождает симметричное случайное блуждание апостериорных вероятностей по точкам l/m, $l = 0, \dots, m$ с поглощением в крайних точках 0 и 1. Марковский момент поглощения апостериорных вероятностей представляет собой момент обнаружения Игроком 2 «истинного состояния природы» (цены акции) и, в сущности, момент окончания торгов. Таким образом, в отличие от торгов с произвольными допустимыми ставками, торги со допустимыми ставками, кратными $1/m$, завершаются почти наверное за конечное число шагов, причем ожидаемое число шагов до завершения торгов также конечно и равно $k(m-k)$ для $p = k/m$.

Множество всех оптимальных стратегий Игрока 1 в игре $G_\infty^m(p)$ состоит из описанной выше наискорейшей стратегии [1] и ее более медленных модификаций. В работе Сандомирской [3] показано, что наискорейшая оптимальная стратегия Игрока 1 в бесконечно повторяющейся игре $G_\infty^m(p)$ является его ε-оптимальной стратегией для n-шаговой игры, где при $n \to \infty$ ε убывает экспоненциально.

Результат работы [1] не может быть распространен на случай общего торгового механизма, введенного Де Мейером [6]. Как упоминается в [6], дискретный механизм не удовлетворяет аксиомам инвариантности относительно сдвига и масштаба. Отметим, что на практике решетка возможных ставок не является инвариантной одновременно относительно сдвига и масштаба.

В работе [2] мы рассмотрели модель, в которой случайная цена акции может принимать произвольное целочисленное значение согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на множестве целых чисел. Допустимы любые целочисленные ставки.

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n(\mathbf{p})$ со счетными множествами состояний и действий. Рассмотренные в [6] игры с двумя возможными значениями цены акции при изменении масштаба (выигрыш в игре $G_n^m(p)$ умножается на m) соответствуют двухточечным распределениям $\mathbf{p}$.

В [2] установлено , что, если случайная цена акции имеет конечное математическое ожидание, то значения n-шаговых игр существуют. Если конечна дисперсия случайной цены акции, то при $n \to \infty$, последовательность значений игр ограничена сверху и сходится. Ее предел H – кусочно-линейная непрерывная вогнутая функция со счетным числом областей линейности. Для распределений с целым средним функция H равна половине дисперсии случайной цены акции.

Ограниченность значений $V_n(\mathbf{p})$ позволяет корректно определить игры $G_\infty(\mathbf{p})$ с бесконечным числом шагов, описывающие торги неограниченной продолжительности. Мы показали, что значение игры $G_\infty(\mathbf{p})$ существует и равно $H(\mathbf{p})$. В явном виде получены оптимальные стратегии обоих игроков.

В [2] для построения оптимальной стратегии Игрока 1 мы использовали симметричные представления одномерных вероятностных распределений с заданным средним в виде выпуклых комбинаций крайних точек соответствующих множеств, т.е. распределений с тем же средним и с носителем, содержащим не более двух точек.

Оптимальная стратегия инсайдера порождает симметричное случайное блуждание апостериорных математических ожиданий цены акции по множеству целых чисел с поглощением, которое происходит в тот момент, когда апостериорное математическое ожидание цены акции становится равным истинной ликвидной цене акции. Для распределений с целочисленным средним ожидаемая продолжительность этого случайного блуждания равна дисперсии ликвидной цены акции. Случайная последовательность цен совершенных сделок воспроизводит это случайное блуждание. Значение бесконечно повторяющейся игры равно ожидаемой продолжительности случайного блуждания, умноженной на постоянный средний одношаговый выигрыш инсайдера, равный $1/2$.

В работе [9] рассматривались модели многошаговых торгов на которых торгуются рисковые ценные бумаги (акции) двух типов. Если математические ожидания цен обоих типов акций конечны, то значения $V_n(\mathbf{p})$ n-шаговых игр $G_n(\mathbf{p})$ существуют. Значение такой игры не превосходит суммы значений игр, моделирующих торги акциями одного типа.

Это означает, что одновременные торги рисковыми активами двух типов не более выгодны для инсайдера, чем раздельные торги акциями одного типа. Это объясняется тем, что одновременные торги влекут обнаружение большей инсайдерской информации, ввиду того, что ставки для акций каждого типа несут также информацию об акциях другого типа.

Если дисперсии случайных цен обоих типов акций конечны, то значения n-шаговых игр не превышают функции $H(\mathbf{p})$ – минимальной кусочно-линейной функции, равной половине суммы дисперсий для распределений с целочисленными математическими ожиданиями цен обоих активов.

Это позволило рассматривать модели торгов неограниченной продолжительности, которые сводятся к бесконечно продолжающимся играм $G_\infty(\mathbf{p})$. Мы получили решения для игр $G_\infty(\mathbf{p})$ с произвольными распределениями $\mathbf{p}$ на двумерной целочисленной решетке с конечным вектором дисперсий. Значение $V_\infty(\mathbf{p})$ совпадает с $H(\mathbf{p})$, т.е. равно сумме значений соответствующих игр, моделирующих торги однотипными акциями. Таким образом, возможная выгода Игрока 2 при одновременном проведении n-шаговых торгов двумя активами по сравнению с раздельными торгами по каждому активу исчезает в игре неограниченной продолжительности.

В настоящей работе мы рассматриваем модели многошаговых торгов, на которых торгуются рисковые ценные бумаги (акции) нескольких типов. Ликвидные цены акций $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – целочисленные случайные величины с совместным распределением $\mathbf{p}$ на m-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$. Аналогично рассмотренному в [9] случаю двух активов ($m = 2$) мы получаем, что, если случайные цены всех типов акций имеют конечные дисперсии $\mathbf{D_p}[z_r]$, $r = 1, \ldots, m$, то значения $V_n(\mathbf{p})$ n-шаговых игр ограничены сверху функцией $H(\mathbf{p})$ – минимальной кусочно-линейной функцией, равной $\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{m} \mathbf{D_p}[z_r]$ для распределений с целочисленными математическими ожиданиями цен всех активов. Этот факт позволяет перейти к играм неограниченной продолжительности $G_\infty(\mathbf{p})$. Мы получаем решения таких игр. Значение $V_\infty(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$. Мы конструируем оптимальные стратегии обоих игроков.

Для каждого актива оптимальная стратегия Игрока 2 независимо воспроизводит его оптимальную стратегию для игры торгов с одним рисковым активом (см.[2]).

При $m > 2$, как и в двумерном случае ($m = 2$), мы строим оптимальные стратегии Игрока 1 для произвольных распределений $\mathbf{p}$ с конечным вектором дисперсий на основе его оптимальных стратегий для игр $G_\infty(\mathbf{p})$ с не более, чем $m+1$ состояниями, т.е. носитель распределения $\mathbf{p}$ содержит не более, чем $m+1$ точку (так называемые «элементарные» игры).

Аналогично тому, как это делалось для случая $m = 2$ (см. [9]), мы получаем, что мартингал апостериорных вероятностей, порожденный оптимальной стратегией Игрока 1 для игры с $(m+1)$-точечным распределением представляет собой симметричное случайное блуждание по точкам целочисленной решетки, лежащим внутри симплекса, натянутого на нагруженные точки распределения. Симметрия нарушается в момент попадания на границу симплекса. Начиная с этого момента, игра превращается в одну из игр с распределениями, имеющими не более, чем m точек в носителе.

Дальнейшее распространение подхода, разработанного в работе [9] для $m = 2$, на игры с большим числом рисковых активов ($m > 2$) требует построения симметричного представления распределений на $\mathbb{R}^m$ с заданными средними в виде выпуклой комбинации распределений, с не более, чем $(m+1)$-точечными носителями и с теми же средними. В [9] для $m = 2$ используются представления, полученные в работе [8] для двумерных распределений ($m = 2$). Однако, при $m > 2$, ввиду комбинаторных сложностей, связанных с разнообразием спектров распределений в таких разложениях, прямое обобщение результата [9] не представляется возможным. Здесь мы используем несколько иной подход к разложению многомерных вероятностных распределений.

2. Повторяющиеся игры, моделирующие многошаговые торги несколькими активами

Мы рассматриваем повторяющиеся игры $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока (см. монографию [4]), моделирующие многошаговые торги акциями нескольких типов.

Два игрока с противоположными интересами располагают деньгами и акциями m типов. Случайная ликвидная цена каждого типа акций может принимать произвольные целочисленные значения.

Перед началом торгов на нулевом шаге случайный ход определяет «состояние природы» и тем самым ликвидные цены всех типов акций $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ на весь период торгов согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на m-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$, известному обоим игрокам. Игрок 1, инсайдер, осведомлен об исходе случайного хода, Игрок 2 не имеет этой информации. Игрок 2 знает об осведомленности Игрока 1.

На каждом последовательном шаге торгов $t = 1, 2, \dots, n$, оба игрока независимо и одновременно делают векторные ставки, означающие предлагаемые цены за одну акцию каждого типа, $(i_1(t), \dots, i_m(t)) \in \mathbb{Z}^m$ для Игрока 1 и $(j_1(t), \dots, j_m(t)) \in \mathbb{Z}^m$ для Игрока 2.

Перед переходом к следующему шагу ставки объявляются. Назвавший более высокую цену за акцию данного типа покупает за эту цену одну акцию этого типа у противника. Таким образом, если $i_r(t) > j_r(t)$, Игрок 1 получает одну акцию типа r от Игрока 2, который получает денежную сумму $i_r(t)$ от Игрока 1. Если $i_r(t) < j_r(t)$, Игрок 2 получает одну акцию типа r от Игрока 1, который получает сумму $j_r(t)$ от Игрока 2. Если $i_r(t) = j_r(t)$, то передачи акции типа r не происходит. Оба Игрока стремятся максимизировать цену своего итогового «портфеля» (деньги плюс «рисковые» бумаги по их ликвидной цене).

Эта n-шаговая модель сводится к антагонистической повторяющейся игре $G_n(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока, со счетным пространством состояний $S = \mathbb{Z}^m$ и со счетным пространством действий игроков, $I = \mathbb{Z}^m$ для Игрока 1 и $J = \mathbb{Z}^m$ для Игрока 2.

Одношаговые выигрыши $a(\mathbf{z}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ Игрока 1, соответствующие состоянию $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ и действиям игроков $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ задаются суммой $a(\mathbf{z}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \sum\limits_{r=1}^{m} a_r(z_r, i_r, j_r)$, где

$$a_r(z_r, i_r, j_r) = \begin{cases} j_r - z_r, & \text{для } i_r < j_r; \\ 0, & \text{для } i_r = j_r; \\ -i_r + z_r, & \text{для } i_r > j_r. \end{cases}$$

В конце игры Игрок 2 платит Игроку 1 сумму

$$\sum_{t=1}^{n} a(\mathbf{z}, \mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t)).$$

Описание игры известно обоим игрокам.

На шаге t обоим игрокам достаточно принимать в расчет лишь последовательность $(\mathbf{i}(1), \ldots, \mathbf{i}(t-1))$ предыдущих действий Игрока 1 (см. [4]). Формальное описание зависящей от выбора случая рандомизированной стратегии поведения σ информированного Игрока 1 и независящей от выбора случая рандомизированной стратегии поведения τ неинформированного Игрока 2, а также функции выигрышей $K_n(\mathbf{p}, \sigma, \tau)$ дается в монографии [4] и в работах авторов [1] и [2]. Там же приводится рекурсивная структура как стратегий игроков, так и функции выигрышей.

Отметим, что в отличие от модели Ауманна и Машлера [4], мы рассматриваем n-шаговые игры $G_n(\mathbf{p})$ с общим неусредненным выигрышем, что упрощает формулы, не оказывая влияния на структуру стратегий конечной повторяющейся игры.

Мы также рассматриваем бесконечные игры $G_\infty(\mathbf{p})$. Для некоторых пар стратегий (σ, τ), функция выигрышей $K_\infty(\mathbf{p}, \sigma, \tau)$ может оказаться неопределенной. Однако, если мы ограничим множество допустимых стратегий Игрока 1, оставив только стратегии с неотрицательными одношаговыми выигрышами при любом ответе Игрока 2, то функция выигрышей игры $G_\infty(p)$ становится полностью определенной (возможно, бесконечной). У Игрока 1 имеется много стратегий, обеспечивающих ему неотрицательный одношаговый выигрыш против любого действия Игрока 2. Отметим, что этим свойством должна обладать любая разумная стратегия Игрока 1.

Для вероятностных распределений $\mathbf{p}$ с конечным носителем игры $G_n(\mathbf{p})$, будучи играми с конечными пространствами состояний и действий, имеют значения $Val_n(\mathbf{p})$. Функции Val_n непрерывны и вогнуты по $\mathbf{p}$. Оба игрока имеют оптимальные стратегии $\sigma_n^*(\mathbf{p})$ и $\tau_n^*(\mathbf{p})$.

Значение такой игры не превосходит суммы

$$\sum_{r=1}^{m} V_n(\mathbf{p}^r) \tag{2.1}$$

значений игр, моделирующих торги одним рисковым активом, где $\mathbf{p}^r$ – маргинальные распределения $\mathbf{p}$. Это следует из того факта, что Игрок 2, используя в игре $G_n(\mathbf{p})$ с m активами прямую комбинацию его оптимальных стратегий $\tau_n^*(\mathbf{p}^r)$ для игр $G_n(\mathbf{p}^r)$ с одним активом, может гарантировать себе потерю, не превосходящую суммы (2.1).

Рассмотрим множество $M^1(\mathbb{Z}^m)$ вероятностных распределений $\mathbf{p}$ на m-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ с конечными первыми моментами $m^1[\mathbf{p}^r]$, $1 \le r \le m$. Для $\mathbf{p} \in M^1(\mathbb{Z}^m)$, ликвидные цены всех типов акций имеют конечные математические ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}[z_r] = m^1[\mathbf{p}^r]$.

Выигрыш в игре $G_n(\mathbf{p})$ с $\mathbf{p} \in M^1$ может быть приближен выигрышами в играх $G_n(\mathbf{p}_k)$ с вероятностным распределением $\mathbf{p}_k$, имеющим конечный носитель. Утверждение следующей теоремы непосредственно следует из этого факта.

Теорема 2.1. *Если случайные цены активов всех типов имеют конечные математические ожидания, то значение $Val_n(\mathbf{p})$ n-шаговой игры $G_n(\mathbf{p})$ существует. Значения $Val_n(\mathbf{p})$ положительны и не убывают с возрастанием числа шагов.*

Дальнейшее изложение организовано следующим образом.
В разделе 3 мы показываем, что если ликвидные цены всех типов акций имеют конечные дисперсии, то в n-шаговой игре $G_n(\mathbf{p})$ у Игрока 2 есть стратегия, которая гарантирует ему потерю, не превышающую функцию $H(\mathbf{p})$. Здесь H – наименьшая непрерывная кусочно-

линейная вогнутая функция, которая для распределений с целочисленными ожиданиями всех цен активов равна полусумме дисперсий этих цен. Этот факт позволяет рассматривать игры бесконечной продолжительности. В такой игре стратегия Игрока 2, гарантирующая ему потерю, не превышающую функцию $H(\mathbf{p})$, является оптимальной.

В разделе 4 для распределений $\mathbf{p}$, носитель которых содержит не более, чем $m+1$ точку («элементарные» распределения), мы конструируем стратегию Игрока 1, обеспечивающую ему в игре $G_\infty(\mathbf{p})$ выигрыш $H(\mathbf{p})$. Из этого следует, что для «элементарных» игр значения $Val_\infty(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$, и построенная стратегия Игрока 1 оптимальна.

В разделе 5 мы строим симметричное представление вероятностных распределений на m-мерной целочисленной решетке с заданным средними в виде выпуклых комбинаций «элементарных» распределений с теми же средними.

В разделе 6 с помощью этого разложения, для распределения $\mathbf{p}$, имеющего конечные дисперсии, мы конструируем оптимальные стратегии $\sigma^*(\mathbf{p})$ Игрока 1 в бесконечной игре $G_\infty(\mathbf{p})$ в виде выпуклых комбинаций распределений его оптимальных стратегий для «элементарных» игр. Таким образом, мы получаем основной результат работы – решение игры $G_\infty(\mathbf{p})$ со значением $Val_\infty(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p})$.

3. Верхняя граница значений $Val_n(\mathbf{p})$

Здесь мы рассматриваем множество $M^2(\mathbb{Z}^m)$ вероятностных распределений $\mathbf{p}$ на m-мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^m$ с конечными вторыми моментами $m^2[\mathbf{p}^r]$, $1 \le r \le m$. Для $\mathbf{p} \in M^2(\mathbb{Z}^m)$, ликвидные цены всех типов акций имеют конечные дисперсии $\mathbf{D}_\mathbf{p}[z_r] = m^2[\mathbf{p}^r]$.

Основной результат этого раздела состоит в том, что при $\mathbf{p} \in$ $\in M^2(\mathbb{Z}^m)$, последовательность значений $Val_n(\mathbf{p})$ остается ограниченной при $n \to \infty$.

Пусть k_r – целая часть математического ожидания $\mathbf{E}_\mathbf{p}[z_r]$ ликвидной цены r-ого актива, $r = 1, \ldots, m$. Определим множество стратегий Игрока 2 $\tau^{(k_1,\ldots,k_m)}$, $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$, обеспечивающих верхние границы значений $V_n(\mathbf{p})$ при произвольном n. Для каждого актива r, $r = 1, \ldots, m$, стратегия $\tau^{(k_1,\ldots,k_m)}$ независимо воспроизводит оптимальную стратегию Игрока 2 τ^{k_r} для игры торгов бесконечной продолжительности с одним рисковым активом (см. [2]). Напомним рекурсивное описание последней:

а) На первом ходе стратегии τ^k *Игрок 2 делает ставку* $j(1)$, *равную* k *– целой части математического ожидания ликвидной цены актива.*

б) При $t > 1$ *действие Игрока 2* $j(t)$ *зависит лишь от последней наблюдаемой на шаге* $t = 1$ *пары действий* $i(t-1), j(t-1)$ *обоих игроков:*

$$j(t) = \begin{cases} j(t-1) - 1, & \text{если } i(t-1) < j(t-1) \ ; \\ j(t-1), & \text{если } i(t-1) = j(t-1); \\ j(t-1) + 1, & \text{если } i(t-1) > j(t-1). \end{cases}$$

Предложение 3.1. *Если цены активов имеют конечные дисперсии* $\mathbb{D}_{\mathbf{p}}[z_r] < \infty$, $r = 1, \ldots, m$, *то в игре* $G_n(\mathbf{p})$ *стратегии* $\tau^{(k_1,\ldots,k_m)}$ *гарантируют Игроку 1 выигрыш, не превышающий* $H(\mathbf{p})$, *где функция* H *определяется ее значениями*

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{m} \mathbb{D}_{\mathbf{p}}[z_r],$$

на минимальных линейных подпространствах изломов

$$\Theta(k_1, \ldots, k_m) = \{\mathbf{p} : \mathbb{E}_{\mathbf{p}}[z_r] = k_r, r = 1, \ldots, m\}.$$

Доказательство аналогично случаю $m = 2$ (см. [9]).

Ввиду ограниченности значений $Val_n(\mathbf{p})$ n-шаговых игр можно рассматривать игры $G_\infty(p)$ с бесконечным числом шагов.

В нижеследующей теореме сформулирован основной результат работы.

Теорема 3.1. *Если цены всех активов имеют конечные дисперсии* $\mathbb{D}_{\mathbf{p}}[z_r] < \infty$, $r = 1, \ldots, m$, *то*

а) игра $G_\infty(\mathbf{p})$ *имеет значение*

$$Val_\infty(\mathbf{p}) = H(\mathbf{p});$$

б) стратегия Игрока 2 $\tau^{(k_1,\ldots,k_m)}$, *где* k_r *– целая часть математического ожидания цены* r*-ого актива,* $r = 1, \ldots, m$, *является его*

оптимальной стратегией;
в) существует стратегия $\sigma^*(\mathbf{p})$ Игрока 1, гарантирующая ему выигрыш $H(\mathbf{p})$.

4. Оптимальные стратегии инсайдера в элементарных играх.

В работе [2] показано, что в бесконечно продолжающейся игре торгов одним активом, скажем типа r, стратегия τ^{k_r} Игрока 2 является его оптимальной стратегией и обеспечивает ему проигрыш, равный для распределений с целочисленным ожиданием половине дисперсии случайной цены r-ого актива.

Так как стратегия Игрока 2 $\tau^*(\mathbf{p}) = \tau^{(k_1,\dots,k_m)}$ состоит в независимом применении стратегий τ^{k_r}, $r = 1,\dots,m$, получаем, что стратегия $\tau^*(\mathbf{p})$ для распределений с целочисленными ожиданиями обеспечивает Игроку 2 проигрыш, равный полусумме дисперсий цен всех активов.

Для доказательства теоремы 3.1 нужно для произвольного распределения $\mathbf{p}$ с конечными дисперсиями построить стратегию $\sigma^*(\mathbf{p})$ Игрока 1, гарантирующую ему выигрыш $H(\mathbf{p})$. Достаточно показать, что для распределений с целочисленными ожиданиями стратегия $\sigma^*(\mathbf{p})$ обеспечивает Игроку 1 выигрыш, равный полусумме дисперсий цен всех активов. Отсюда будет следовать, что стратегии $\sigma^*(\mathbf{p})$ и $\tau^*(\mathbf{p})$ – оптимальные стратегии Игрока 1 и Игрока 2.

При $m > 2$, как и в двумерном случае ($m = 2$), мы начинаем с построения оптимальных стратегий Игрока 1 для «элементарных» игр, то есть игр с $k+1$ состояниями $\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1}$, где $k \le m$. Эти точки из $\mathbb{R}^m$ лежат в некоторой k-мерной гиперплоскости $Hyp(\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1})$. Такая гиперплоскость определяется набором $m-k$ единичных векторов $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^{m-k}\}$, ортогональных гиперплоскости и также ортогональных между собой.

Точки $\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1}$ определяют в этой гиперплоскости симплекс $\triangle(\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1})$. Точки симплекса $\mathbf{w} \in \triangle(\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1})$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с вероятностными распределениями на $(\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{k+1})$, а именно, вектор $\mathbf{w}$ задает математические ожидания цен активов

$$\mathbf{w} = \sum_{u=1}^{k+1} \mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}^u,$$

где $\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w})$ – соответствующие вероятности на точках симплекса.

С другой стороны, для точки $\mathbf{w} \in \triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1})$ вероятностное распределение $\mathbb{P}(\cdot|\mathbf{w})$ задается соотношениями

$$\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w}) = \frac{\det[\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{u-1}, \mathbf{z}^{u+1}, \dots, \mathbf{z}^{k+1}, e^1, \dots, e^{m-k}]}{\sum\limits_{v=1}^{k+1} \det[\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{v-1}, \mathbf{z}^{v+1}, \dots, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^{m-k}]},$$

где $\det[\cdot]$ – определитель матрицы $[\cdot]$.

Для любой k-мерной гиперплоскости Hyp^k пространства $\mathbb{R}^m$ точки гиперплоскости Hyp^k, у которых по меньшей мере k координат принимают целочисленные значения, образуют дискретную решетку, которую в дальнейшем обозначаем Lat^k. Определим решетку $Lat(\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1}))$ на симплексе $\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1})$ следующим образом. Внутри симплекса это – решетка Lat^k. На каждом из симплексов размерности, меньшей k, составляющих границу симплекса $\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1})$ – это аналогичная решетка соответствующей размерности.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ – внутренняя точка на решетке $Lat(\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1}))$. При начальном векторе математических ожиданий $\mathbf{w}$ Игрок 1 имеет оптимальную стратегию $\sigma^*(\mathbf{w})$, порождающую случайное блуждание апостериорных вероятностей по точкам решетки $Lat(\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1}))$.*

Доказательство. По определению точка $\mathbf{w}$ имеет не менее k целочисленных координат. Не умаляя общности, считаем целочисленными ее первые k координат $w_1, \dots, w_k$.

При доказательстве утверждения мы используем следующую нетрудно проверяемую лемму.

Лемма 4.1. *Точке $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)$ соответствует набор точек $\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^l\}$, $l \le k+1$, решетки $Lat(\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{k+1}))$, обладающий следующими свойствами:*

1. Точка $\mathbf{w}$ является выпуклой комбинацией точек $\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^l\}$, $l \le k+1$:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{l} q_i \mathbf{w}^i,$$

где коэффициенты $q_i > 0$ *и* $\sum_{i=1}^{l} q_i = 1$.
2. Если координата w_j *вектора* $\mathbf{w}$ *целочислена (в частности, если* $j < k+1$*), то при всех* $1 \le i \le k+1$ *координата* w^i_j *вектора* $\mathbf{w}^i$ *принадлежит интервалу* $[w_j - 1, w_j + 1]$. *Если координата* w_j *вектора* $\mathbf{w}$ *не является целочисленной* $w_j = k_j + \alpha_j$, *где* k_j *– целая часть* w_j, *а* $\alpha_j > 0$, *то* w^i_j *принадлежит интервалу* $[k_j, k_j + 1]$.
3. Для целочисленной координаты w_j *вектора* $\mathbf{w}$ *положим* $\sigma^i_j = w_j$, *если* $w^i_j > w_j$, $\sigma^i_j = w_j - 1$, *если* $w^i_j < w_j$ *и* $\sigma^i_j = w_j$ *или* $\sigma^i_j = w_j - 1$, *если* $w^i_j = w_j$. *Для нецелочисленной координаты* $w_j = k_j + \alpha_j$ *положим* $\sigma^i_j = k_j$.

Вектора σ^i *можно определить так, что* $\sigma^i \neq \sigma^{i'}$, *если* $i \neq i'$.

При векторе $\mathbf{w}$ априорных математических ожиданий цен активов

$$\mathbf{w} = \sum_{u=1}^{k+1} \mathbb{P}(\mathbf{z}^u | \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z}^u,$$

где $\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w})$ – соответствующие вероятности на точках симплекса, на первом шаге Игрок 1 выбирает действия σ^i, $1 \le i \le l$ с полными вероятностями q_i таким образом, чтобы действию σ^i соответствовало апостериорное ожидание цен активов $(\cdot|\sigma^i) = \mathbf{w}^i$,

$$\mathbf{w}^i = \sum_{u=1}^{k+1} \mathbb{P}(\mathbf{z}^u | \mathbf{w}^i) \cdot \mathbf{z}^u,$$

где $\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|w^i)$ соответствующие вероятности на точках симплекса.

Таким образом, Игрок 1, находясь в состоянии $\mathbf{z}^u$, выбирает действие σ^i с вероятностью

$$\mathbb{P}(\sigma^i | \mathbf{z}^u) = \frac{\mathbb{P}(\sigma^i \cap \mathbf{z}^u)}{\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w})} = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w}^i) q_i}{\mathbb{P}(\mathbf{z}^u|\mathbf{w})}.$$

Аналогично тому, как это делалось для случая $m = 2$ (см. [9]), мы получаем, что мартингал апостериорных вероятностей, порожденный оптимальной стратегией Игрока 1 $\sigma^*(\mathbf{w})$ для игры с $(m+1)$-точечным распределением, представляет собой симметричное случайное блуждание по точкам целочисленной решетки, лежащим внутри симплекса, натянутого на нагруженные точки распределения. Симметрия нарушается в момент попадания на границу симплекса. Начиная с этого момента, игра превращается в одну из игр с распределениями, имеющими не более, чем m точек в носителе. □

5. Симметричное представление вероятностных распределений $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^m$

Далее мы строим симметричное представление вероятностных распределений $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^m$ с заданным средними в виде выпуклых комбинаций распределений с тем же средними и с носителями, содержащими не более $m+1$ точек («элементарные» распределения).

С помощью этого разложения, мы в разделе 6 для общего случая сконструируем оптимальные стратегии $\sigma^*(\mathbf{p})$ Игрока 1 в бесконечной игре $G_\infty(\mathbf{p})$ в виде выпуклых комбинаций распределений его оптимальных стратегий для «элементарных» игр.

Здесь мы используем несколько иной, чем разработанный для случая $m = 2$ в [8], подход к разложению многомерных вероятностных распределений.

Не умаляя общности, мы ограничиваемся рассмотрением распределений $\mathbf{p} \in \Theta^m(0)$, где $\Theta^m(0)$ – множество вероятностных распределений $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^m$ с нулевыми средними значениями (центрированные вероятностные распределения). Обозначим

$$\Delta^m(0) = \{(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{m+1}) : 0 \in \triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{m+1})\},$$

где $\triangle(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^k)$ – выпуклая оболочка набора точек $(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^k)$, принадлежащих $\mathbb{Z}^m$.

Центрированное распределение $\mathbf{p}^0_{\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{m+1}}$ с носителем $(\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^{m+1}) \in \Delta^m(0)$ задается формулой

$$\mathbf{p}^0_{\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^{m+1}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1} \det[\mathbf{z}^{i+1}, \dots, \mathbf{z}^{i+m}] \cdot \delta^{\mathbf{z}^i}}{\sum\limits_{j=1}^{m+1} \det[\mathbf{z}^{j+1}, \dots, \mathbf{z}^{j+m}]},$$

где $\delta^{\mathbf{x}}$ – вырожденное распределение с носителем в точке x, а $\det[\mathbf{z}^{i+1}, \dots, \mathbf{z}^{i+m}]$ – определитель квадратной матрицы координат. Все арифметические операции с индексами выполняются по модулю $m+1$.

Заметим, что, если $\det[\mathbf{z}^{i+1}, \ldots, \mathbf{z}^{i+m}] = 0$, то $0 \in \triangle \det[\mathbf{z}^{i+1}, \ldots, \mathbf{z}^{i+m}]$.

Будем говорить, что $\mathbf{p} \in \Theta^m(0)$ *не содержит (свободно от) k-точечных распределений*, если не существует набора $(\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^k)$ с таким $\mathbf{p}(\mathbf{z}^i) > 0$, что $0 \in \triangle(\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^k)$.

Теорема 5.1. *Пусть распределение $\mathbf{p} \in \Theta^m(0)$ не содержит k-точечных распределений с $k < m + 1$. Тогда*

$$\mathbf{p} = \sum_{\Delta^m(0)} \frac{V(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^{m+1})\mathbf{p}(\mathbf{z}^1)\mathbf{p}(\mathbf{z}^2)\ldots\mathbf{p}(\mathbf{z}^{m+1})}{\sum\limits_{\Delta^m(0)} V(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \ldots, \mathbf{t}^{m+1})\mathbf{p}(\mathbf{t}^1)\mathbf{p}(\mathbf{t}^2)\ldots\mathbf{p}(\mathbf{t}^{m+1})} \mathbf{p}^0_{\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^{m+1}}, \tag{5.1}$$

где

$$V(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^{m+1}) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m+1} \det[\mathbf{z}^{j+1}, \ldots, \mathbf{z}^{j+m}]}{m!} \tag{5.2}$$

– m-мерный объем соответствующего симплекса.

Доказательство. Проясним структуру знаменателя в формуле (5.1).

Каждому $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^m$ мы сопоставляем множество неупорядоченных наборов $(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m)$:

$$\Delta^m(0, \mathbf{z}) = \{(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m), \mathbf{z}^i \neq (0) : (\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m, \mathbf{z}) \in \Delta^m(0)\}.$$

Мы индексируем точки $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m$ так, что

$$\det[\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m] > 0.$$

Положим

$$\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \sum_{\Delta^m(0, \mathbf{z})} \det[\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^m]\mathbf{p}(\mathbf{z}^1)\mathbf{p}(\mathbf{z}^2)\ldots\mathbf{p}(\mathbf{z}^m).$$

Учитывая равенство (5.2), получаем

$$\sum_{\Delta^m(0)} V(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^{m+1})\mathbf{p}(\mathbf{z}^1)\mathbf{p}(\mathbf{z}^2)\ldots\mathbf{p}(\mathbf{z}^{m+1}) = \frac{1}{m!} \sum_{\mathbf{z} \in \mathrm{Supp}\ \mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z})\mathbf{p}(\mathbf{z}).$$

□

Нижеследующий факт дает базу для построения симметричного представление центрированных распределений $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^m$.

Теорема 5.2. *Пусть распределение* $\mathbf{p} \in \Theta^m(0)$ *не содержит* k*-точечных распределений с* $k < m+1$*. Тогда величина* $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{z})$ *не зависит от* z*, т.е. это инвариант* $\Phi(\mathbf{p})$ *распределения* $\mathbf{p}$.

Замечание 5.1. Теорема 5.2 дает m-мерный аналог равенства

$$\sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \mathbf{p}(t) = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot \mathbf{p}(-t),$$

имеющего место для центрированных распределений $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^1$.

Следствие 5.1. *Для любого центрированного распределения* $\mathbf{p}$ *на* $\mathbb{Z}^m$*, не содержащего* k*-точечных распределений с* $k < m+1$*, величина* $\Phi(\mathbf{p})$ *имеет следующее инвариантное представление:*

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{\Delta^m(0)} \sum_{j=0}^{m} \det[\mathbf{z}^{j+1}, \ldots, \mathbf{z}^{j+m}]\mathbf{p}(\mathbf{z}^1) \ldots \mathbf{p}(\mathbf{z}^{m+1}) =$$

$$= m! \sum_{\Delta^m(0)} V(\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^{m+1})\mathbf{p}(\mathbf{z}^1) \ldots \mathbf{p}(\mathbf{z}^{m+1}).$$

Чтобы построить разложение общего центрированного вероятностного распределения $\mathbf{p}$ на $\mathbb{Z}^m$, мы разрабатываем процедуру, которая позволяет нам шаг за шагом избавиться от распределений с носителями, содержащими менее, чем $m+1$ точку.

Мы начинаем с исключения атома в точке 0. Остаточное распределение обозначаем $\mathbf{p}^1$. Существует не более, чем счетное число одномерных подпространств $\mathbb{R}^1_l$ с остаточной положительной мерой (мы нумеруем эти подпространства индексом l). Из каждого такого подпространства мы удаляем центрированное распределение $\mathbf{p}^1_l$ таким образом, чтобы оставшееся распределение было сосредоточено на полупрямой. Оставшееся после этого распределение, которое обозначаем $\mathbf{p}^2$, является центрированным распределением на $\mathbb{Z}^m$, не содержащим двух-точечных центрированных распределений.

Существует не более, чем счетное число двумерных подпространств $\mathbb{R}^1_l$ с положительной мерой $\mathbf{p}^2$, сосредоточенной на более, чем полупрямой.

Из каждого такого подпространства мы удаляем центрированное распределение $\mathbf{p}^2_l$ таким образом, чтобы оставшееся распределение было сосредоточено на полуплоскости. Оставшееся распределение $\mathbf{p}^3$ является центрированным распределением на $\mathbb{Z}^m$, не содержащим трех-точечных центрированных распределений. И так далее ...

Теорема 5.3. *Любое центрированное распределение* $\mathbf{p}$ *на* $\mathbb{Z}^m$ *может быть представлено как вероятностная смесь*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)\delta^0 + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^k \mathbf{p}_l^k + \alpha^m \mathbf{p}^m, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{p}_l^k$ $(0 < k < m)$ *– центрированные вероятностные распределения с целыми носителями на* k*-мерных подпространствах* $\mathbb{R}_l^k$ *пространства* $\mathbb{R}^m$*, не содержащие* r*-точечных распределений с* $r < k+1$*. Оставшееся распределение* $\mathbf{p}^m$ *является центрированным вероятностным распределением на* $\mathbb{Z}^m$*, не содержащим* k*-точечных распределений с* $k < m+1$*.*

Замечание 5.2. Любое распределение $\mathbf{p}_l^k$ представляется в виде выпуклой комбинации $(k+1)$-точечных распределений, а распределение $\mathbf{p}^m$ представляется в виде выпуклой комбинации $(m+1)$-точечных распределений.

6. Оптимальная стратегия Игрока 1 для произвольного распределения p

В этом разделе мы завершаем доказательство теоремы 3.1. А именно, на основе полученного в разделе 5 разложения распределения $\mathbf{p}$ мы строим оптимальную стратегию $\sigma^*(\mathbf{p})$ Игрока 1, которая обеспечивает ему в игре $G_\infty(\mathbf{p})$ выигрыш $\sum_{r=1}^{m} \mathbb{D}_p[z_r]/2$ и тем самым доказываем пункт c) теоремы 3.1.

Построение стратегии $\sigma^*(\mathbf{p})$ осуществляем с помощью следующего алгоритма. Как и в предыдущем пункте, не умаляя общности рассматриваем центрированные распределения $\mathbf{p}$.

а) Если случайный ход выбирает 0 (вектор ожидаемых цен активов), то Игрок 1 останавливает игру.

б) Пусть случайный ход выбирает $\mathbf{z} \neq 0$. Тогда Игрок 1 реализует лотерею с вероятностями

$$\frac{\alpha_l^k \mathbf{p}_l^k(\mathbf{z})}{\mathbf{p}(\mathbf{z})}, \quad \frac{\alpha^m \mathbf{p}^m(\mathbf{z})}{\mathbf{p}(\mathbf{z})},$$

выбора между распределениями $\mathbf{p}_l^k$ и $\mathbf{p}^m$. Здесь $\mathbf{p}_l^k$ и $\mathbf{p}_l^k$ – элементарные распределения, входящие в разложение 5.3, а α_l^k и α^m – соответствующие коэффициенты.

в) Если выбрано распределение $\mathbf{p}_l^k$, то Игрок 1 выбирает k точек $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^k$ с помощью лотереи с вероятностями

$$\frac{\det[\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^k] \cdot \mathbf{p}_l^k(z_1) \dots \mathbf{p}_l^k(z_k)}{\Phi(\mathbf{p}_l^k)}$$

и играет оптимальную стратегию $\sigma^*(\cdot|z)$ для состояния $\mathbf{z}$ в $(k+1)$-точечной игре $G(\mathbf{p}^0_{\mathbf{z},\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^k})$.

г) Если выбрано распределение $\mathbf{p}^m$, то Игрок 1 выбирает m точек $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^m$ с помощью лотереи с вероятностями

$$\frac{\det[\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^m] \cdot \mathbf{p}^m(\mathbf{z}^1) \dots \mathbf{p}^m(\mathbf{z}^m)}{\Phi(\mathbf{p}^m)}$$

и играет оптимальную стратегию $\sigma^*(\cdot|\mathbf{z})$ состояния $\mathbf{z}$ в $(m+1)$-точечной игре $G(\mathbf{p}^0_{\mathbf{z},\mathbf{z}^1,\dots,\mathbf{z}^m})$.

Доказательство пункта в) теоремы 3.1 достаточно провести для $\mathbf{p} \in \Theta(k_1, \dots, k_m)$.

В разделе 4 мы показали, что в k-точечной игре с $\mathbf{p} \in \Theta(0)$ стратегия σ^* обеспечивает Игроку 1 выигрыш, равный полусумме компонент дисперсии $\sum\limits_{r=1}^{m} \mathbb{D}_p[z_r]/2$.

Так как сумма компонент дисперсии является линейной функцией на $\Theta(0) \cap M^2$, где M^2 – класс распределений с конечными вторыми моментами, то с помощью разложения, полученного в разделе 5, получаем, что для любого распределения $\mathbf{p} \in \Theta(0) \cap M^2$ описанная выше составная стратегия Игрока 1 обеспечивает ему в игре $G_\infty(\mathbf{p})$ выигрыш $\sum\limits_{r=1}^{m} \mathbb{D}_p[z_r]/2$. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

7. Заключение

Рассмотрены упрощенные модели многошаговых торгов рисковыми активами (акциями) нескольких типов между двумя различно информированными игроками. Для торгов неограниченной продолжительности при условии конечности дисперсий случайных цен акций получены решения для соответствующих этим моделям антагонистических бесконечно-повторяющихся игр с неполной информацией у второго игрока.

В явном виде построены оптимальные стратегии обоих игроков. Для каждого актива оптимальная стратегия неинформированного Игрока 2 независимо воспроизводит его оптимальную стратегию для игры торгов с одним рисковым активом. Оптимальная стратегия Игрока 1 (инсайдера) порождает случайное блуждание цен сделок, симметрия которого нарушается на финальных этапах игры.

Таким образом, с помощью упрощенной модели торгов несколькими активами продемонстрирована возможность стратегического происхождения случайных колебаний цен на фондовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов* // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14. № 3. С. 399–416.

2. Доманский В.К., Крепс В.Л. *Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках* // Журнал новой экономической ассоциации. 2011. Вып. 11. С. 39–62.

3. Сандомирская М.С. *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации на фондовом рынке* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. 2014. Вып.1. С. 120–127.

4. Aumann R., Maschler M. *Repeated Games with Incomplete Information.* The MIT Press: Cambridge, Massachusetts - London, England. 1995.

5. De Meyer B., Moussa Saley H. *On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance* // Int. Journal of Game Theory. 2002. V. 31. P. 285–319.

6. De Meyer B. *Price dynamics on a stock market with asymmetric information*// Games and Economic Behavior. 2010. V. 69(1). P. 42–71.

7. Domansky V. *Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets* // Int. J. Game Theory. 2007. V. 36(2). P.241–257.

8. Domansky V. *Symmetric representations of bivariate distributions* // Statistics and Probability Letters. 2013. V. 83. P.1054-–1061.

9. Domansky V., Kreps V. *Repeated games with asymmetric information modeling financial markets with two risky assets* // RAIRO-Oper. Res. 2013. V. 47. P. 251—272.

10. Kyle A.S. *Continuous auctions and insider trading* // Econometrica. 1985. V.53. P.1315–1335.

BIDDING GAMES WITH SEVERAL RISKY ASSETS

Victor K. Domansky, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc. (doman@emi.nw.ru).
Victoria L. Kreps, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc. (vita_kreps@mail.ru).

Abstract: We consider multistage bidding models where two types of risky assets (shares) are traded between two agents that have different information on the liquidation prices of traded assets. These random prices depend on «a state of nature», that is determined by the initial chance move according to a probability distribution that is known to both players. Player 1 (insider) is informed on the state of nature, but Player 2 is not. The bids may take any integer values. The n-stage model is reduced to a zero-sum repeated game with lack of information on one side of Player 2. We show that, if liquidation prices of shares have finite variances, then the sequence of values of n-step games is bounded. This makes it reasonable to consider the bidding of unlimited duration. We give the solutions for corresponding infinite games. Analogously to the case of two risky assets (see [9]) the optimal strategy of Player 1 generates a random walk of transaction prices. The symmetry of this random walk is broken at the final stages of the game.

Keywords: bidding, repeated games, asymmetric information, optimal strategies, random walks.