Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.3, с. 76–92

УДК 519.837.3
ББК 22.18

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ ИГРЫ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Анна В. Тур*
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
– процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: a.tur@spbu.ru

В работе рассматриваются линейно-квадратичные стохастические дискретные игры со случайной продолжительностью. Найдено равновесие по Нэшу для данного класса игр. Получено кооперативное решение. Исследована динамическая устойчивость этого решения. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: линейно-квадратичная игра, стохастическая игра, игра со случайной продолжительностью, равновесие по Нэшу, кооперативная игра, процедура распределения дележа, динамическая устойчивость, пропорциональное решение.

1. Введение

Во многих областях человеческой деятельности, таких, как экономика, экология, производство, менеджмент, в процессе принятия

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета в рамках научного проекта 9.38.245.2014.

решения участвуют несколько сторон, цели которых зачастую оказываются разными и даже противоположными, при этом все такие процессы развиваются на некотором временном промежутке, поэтому актуальным направлением современной теории игр является исследование динамических и дифференциальных игр.

В настоящее время одной из основных задач теории динамических и дифференциальных игр является описание процессов наиболее приближенных к реальным. Одной из проблем, возникающих при описании реальных процессов принятия решения, является вопрос возникновения неопределенности. Действительно, в жизни зачастую будущее состояние невозможно предсказать точно. Поэтому, математические модели исследуемых задач должны учитывать возможность возникновения неопределенности в различных ее проявлениях. Так, актуальными является исследования конфликтно-управляемых систем с недетерминированными переходами из состояния в состояние. Игры, описывающие такие модели, называют стохастическими. Впервые стохастические игры рассмотрены Л. Шепли [19]. Т. Башар первым получил аналитическое решение стохастических квадратичных игр [11]. В настоящее время класс стохастических игр подробно освещен в литературе, актуальными являются работы, исследующие кооперативные стохастические игры [1, 10, 18, 20, 21].

Еще один вид неопределенности, который может возникнуть при описании реальных процессов, это случайная продолжительность развития процесса. В играх, описывающих такие задачи предполагается, что игра заканчивается в некоторый случайный момент времени. В настоящее время ведется активное исследование дифференциальных и многошаговых игр со случайной продолжительностью. Данной тематике посвящены, например, работы [7, 8, 9].

В данной работе предпринята попытка объединить два рассмотренных вида неопределенности применительно к линейно-квадратичным дискретным играм. Актуальность исследования задач с линейно-квадратичной структурой обусловлена несколькими причинами. Так, многие приложения дифференциальных игр используют именно такую структуру, также важной оказывается возможность получения аналитических результатов и использования эффективных численных методов решения. Исследованию задач такого типа посвящено много работ. Среди них [3, 4, 12, 16]. Решения некооперативных линейно-квадратичных игр двух или многих лиц в различных классах стратегий подробно рассмотрены авторами. При этом исследуются игры как с конечным временем окончания игры, так и с бесконечным. В некоторых работах рассмотрены также кооперативные игры, где в качестве принципа оптимальности берется Парето-оптимальное решение. Исследованы и линейно-квадратичные стохастические игры [11, 12].

Однако модели с возможной кооперацией игроков, где игроки объединяются с целью максимизировать суммарный выигрыш и разделить его согласно некоторому выбранному правилу, оказываются наиболее приближенными к жизненным конфликтным ситуациям. В связи с этим исследование кооперативных линейно-квадратичных динамических игр является актуальной задачей.

В данной работе исследуются линейно-квадратичные дискретные стохастические игры со случайной продолжительностью. Находится кооперативное решение игры в виде пропорционального решения, предложенного в работе [2]. И рассматривается такое важное свойство кооперативного решения, как динамическая устойчивость. Впервые понятие динамической устойчивости было введено Петросяном Л.А. в работах [5, 6].

2. Модель игры

Рассмотрим дискретную линейно-квадратичную неантагонистическую игру n лиц, состояние которой в каждый момент времени характеризуется вектором $x(k)$, изменяющимся во времени в соответствии с системой уравнений

$$\begin{gathered} x(k+1) = A(k)x(k) + \sum_{i=1}^{n} B_i(k)u_i(k) + w(k), \\ k_0 \le k \le L < \infty, \quad k_0 \in \mathcal{T}_+, \quad x(k_0) = x_0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x \in R^m$ – вектор-столбец, $u_i \in R^r$ – вектор-столбец управления игрока i, $i = 1, \ldots, n$, $A(k), B_i(k)$ – матрицы размерности $(m \times m)$ и $(m \times r)$ соответственно, $x(k_0) = x_0$ – начальное состояние, $\mathcal{T}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $w(k)$ – m-мерный вектор возмущений, $w(k_0), \ldots, w(k)$ – взаимонезависимые случайные вектора с нулевым математическими ожиданиями и матрицами дисперсий

$W(k)$. Игра начинается в момент k_0 из состояния x_0, однако, момент ее окончания не фиксирован заранее, а является реализацией некоторой случайной величины L. Случайная величина L принимает значения от k_0 до K с некоторыми вероятностями. Заданы вероятности q_k того, что игра закончится на шаге k, если она состоялась на $(k-1)$-м, $0 \le q_k \le 1$, $k = 0, \dots, K$, $q_K = 1$.

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество всех игроков. Выигрыш игрока $i \in N$ обозначим через $J_i(k_0, x_0, u)$, где $u = (u_1, \dots, u_n)$. Будем предполагать, что выигрыш игрока i имеет вид

$$J_i(k_0, x_0, u) = \mathop{E}_{w_k, L}\left\{ \sum_{k=k_0}^{L-1} \left(x^T(k) P_i(k) x(k) + u_i^T(k) R_i(k) u_i(k) \right) + \right.$$
$$\left. + \, x^T(L) P_i(L) x(L) \right\}, \qquad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

где $P_i(k)$ – симметричные матрицы размерности $(m \times m)$, $R_i(k)$ – симметричные матрицы размерности $(r \times r)$, $i = 1, \dots, n$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Предполагается, что игроки выбирают только стратегии вида $u_i(k, x) = M_i(k) x(k)$, $k_0 \le k \le L$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим построенную выше игру $\Gamma(k_0, x_0)$. Это обозначение показывает, что игра началась в момент времени $k = k_0$ из состояния $x(k_0) = x_0$.

Положим

$$T_i(k, x(k), u(k)) = x^T(k) P_i(k) x(k) + u_i^T(k) R_i(k) u_i(k),$$
$$i = 1, \dots, n, \quad k = k_0, \dots, K-1,$$
$$T_i(K, x(K)) = x^T(K) P_i(K) x(K).$$

Согласно [7] можно записать (2.2) в следующем виде:

$$J_i(k_0, x_0, u) = \mathop{E}_{w_k}\left\{ \left(\prod_{\substack{k<K \\ k \ge 0}} (1 - q_k) \right) \left(\sum_{m=k_0}^{K-1} T_i(m, x(m), u(m)) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \, T_i(K, x(K)) \right) \sum_{j=0}^{K-1} q_j \left(\prod_{\substack{k<j \\ k \ge 0}} (1 - q_k) \right) \left(\sum_{m=k_0}^{j} T_i(m, x(m), u(m)) \right) \right\},$$
$$i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{j=0}^{K} q_j \Bigg(\prod_{\substack{k<j \\ k\geq 0}} (1-q_k) \Bigg) = 1,$$

получаем выигрыши игроков:

$$J_i(k_0, x_0, u) = \mathop{E}_{w_k} \Bigg\{ \sum_{k=k_0}^{K-1} T_i(k, x(k), u(k)) \Bigg(1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j \Bigg(\prod_{\substack{s<j \\ s\geq 0}} (1-q_s) \Bigg) \Bigg) + \\ + T_i(K, x(K)) \Bigg(1 - \sum_{j=0}^{K-1} q_j \Bigg(\prod_{\substack{s<j \\ s\geq 0}} (1-q_s) \Bigg) \Bigg\}, \\ i = 1, \ldots, n. \quad (2.4)$$

3. Теорема о существовании равновесия по Нэшу

Найдем решение бескоалиционной игры $\Gamma(k_0, x_0)$. В качестве принципа оптимальности будем рассматривать равновесие по Нэшу [17].

Необходимые и достаточные условия существования равновесия по Нэшу в линейно-квадратичных дискретных стохастических играх приведены в [12]. Уточним условия теоремы для линейно-квадратичных дискретных стохастических игр со случайной продолжительностью.

Введем обозначения

$$f(k) = \Bigg(1 - \sum_{j=0}^{k-1} q_j \Bigg(\prod_{\substack{s<j \\ s\geq 0}} (1-q_s) \Bigg) \Bigg) \Bigg).$$

Заметим, что $f(k) > 0$ для всех $k = k_0, \ldots, K-1$, $f(K) \geq 0$.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы в игре $\Gamma(k_0, x_0)$ существовало единственное в классе допустимых равновесие по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. Система матричных уравнений

$$\begin{cases} (A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))^T\Theta_i(k+1)(A(k)+\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(k)M_i^{NE}(k))- \\ -\Theta_i(k)+f(k)P_i(k)+f(k)M_i^{NE}(k)^T R_i(k)M_i^{NE}(k)=0, \\ M_i^{NE}(k)=-(f(k)R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))^{-1}B_i^T(k)\times \\ \times\Theta_i(k+1)(A(k)+\sum\limits_{j\neq i} B_j(k)M_j^{NE}(k)), \quad k=k_0,\dots,K-1, \\ \Theta_i(K)=P_i(K)f(K), \quad i=1,\dots,n \end{cases}$$

имела единственное решение $\{M_i^{NE}(k),\Theta_i(k)\}$, *в виде вещественных матриц размерности* $r\times m$ *и* $m\times m$ *соответственно, где* $\Theta_i(k)$ *– симметричны для любого* $i\in N$.
2. $(f(k)R_i(k)+B_i^T(k)\Theta_i(k+1)B_i(k))$ *– отрицательно определенные матрицы,* $i=1,\dots,n$.

Тогда набор стратегий

$$\{u_i^{NE}=M_i^{NE}(k)x(k), \quad i=1,\dots,n\} \tag{3.1}$$

будет являться равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(k_0,x_0)$, *при этом выигрыш игрока* i *в равновесии равен*

$$J_i(k_0,x_0,u^{NE})=x_0^T\Theta_i(k_0)x_0+\sum_{k=k_0}^{K-1}E\{w_k^T\Theta_i(k+1)w_k\}, \quad i=1,\dots,n.$$

Доказательство. Доказательство напрямую следует из [12, Corollary 6.4, p.306] и вида (2.4) выигрышей игроков. □

4. Кооперативный случай дискретной игры

Перейдем теперь к рассмотрению кооперативного варианта игры (N,v). Для этого предположим, что игроки имеют возможность образовать максимальную коалицию N с целью обеспечения максимального суммарного выигрыша.

Введем обозначения

$$J^N(k_0,x_0,u(k))=\sum_{i=1}^{N}J_i(k_0,x_0,u(k)),$$

$$P(k)=\sum_{i\in N}P_i(k),\quad R(k)=\begin{pmatrix}R_1(k) & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & R_2(k) & \dots & \mathbb{O}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & R_n(k)\end{pmatrix},$$

$$B(k)=\begin{pmatrix}B_1(k) & B_2(k) & \dots & B_n(k)\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$J^N(k_0,x_0,u(k))=$$
$$=\mathop{E}_{w_k}\Bigg\{\sum_{k=k_0}^{K-1}\Big(x^T(k)P(k)x(k)+u^T(k)R(k)u(k)\Big)\Big(1-\sum_{j=0}^{k-1}q_j\Big(\prod_{\substack{s<j\\ s\geq 0}}(1-q_s)\Big)\Big)+$$
$$+x^T(K)P(K)x(K)\Big(1-\sum_{j=0}^{K-1}q_j\Big(\prod_{\substack{s<j\\ s\geq 0}}(1-q_s)\Big)\Big)\Bigg\}. \quad (4.1)$$

Пусть набор стратегий $u^N=(u_1^N,\dots,u_n^N)$, где $u_i^N(k)=M_i^N(k)x(k)$, $i=1,\dots,n$, доставляет максимум J^N, т.е.

$$u^N=\arg\max_{u_i,i=1,\dots,n}J^N(k_0,x_0,u(k)).$$

Следующая теорема дает нам необходимые и достаточные условия для существования такого набора.

Теорема 4.1. *Для того, чтобы в игре $\Gamma(k_0,x_0)$ существовал единственный в классе допустимых набор стратегий*

$$\{u_i^N=M_i^N(k)x,\quad i\in N\},$$

доставляющий максимум $J^N(k_0,x_0,u)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Система матричных уравнений

$$\begin{cases}(A(k)+B(k)M^N(k))^T\Theta_N(k+1)(A(k)+B(k)M^N(k))-\Theta_N(k)+\\ \;+f(k)P(k)+f(k)M^N(k)^TR(k)M^N(k)=0,\\ M^N(k)=-(f(k)R(k)+B^T(k)\Theta_N(k+1)B(k))^{-1}B^T(k)\times\\ \;\times\Theta_N(k+1)A(k),\quad k=1,\dots,K-1,\\ \Theta_N(K)=P(K)f(K)\end{cases}$$

имела решение $\{M_N(k), \Theta_N(k)\}$ *в виде вещественных матриц размерности* $rn \times m$ *и* $m \times m$ *соответственно, где* $\Theta_N(k)$ *– симметричны.*
2. $(f(k)R(k) + B^T(k)\Theta_N(k+1)B(k))$ *– отрицательно определенные матрицы,* $k = 1, \dots, K-1$.

Тогда набор стратегий $\{u_i^N = M_i^N(k)x, \quad i \in N\}$, *где* $M_i^N(k)$ *–* i*-й блок матрицы* $M_N(k) = \begin{pmatrix} M_1^N(k) \\ M_2^N(k) \\ \dots \\ M_n^N(k) \end{pmatrix}$, *доставляет максимум* $J^N(k_0, x_0, u)$.

$J^N(k_0, x_0, u^0) = x_0^T\Theta_N(k_0)x_0 + \sum\limits_{k=k_0}^{K-1} E\{w_k^T\Theta_N(k+1)w_k\}$.

Доказательство. Задача максимизации функционала $J^N(k_0, x_0, u(k))$, при условии, что движение развивается согласно системе

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k),$$

это задача оптимизации с одним управлением, тогда доказательство теоремы напрямую следует из [13] и вида функционала $J^N(k_0, x_0, u(k))$. □

На основе теоремы 4.1 построим решения дискретной кооперативной игры.

4.1. Пропорциональное решение

В ряде работ по кооперативным играм в качестве решения игры выбирается дележ, имеющий эголитарный характер, в том смысле, что для каждого игрока определяется некоторый начальный выигрыш, а остаток максимального суммарного выигрыша распределяется поровну между всеми игроками. Среди таких решений, например, ES-вектор (Equal Surplus value) [15], ENSC-вектор (Egalitarian Non-Separable Contribution value) [14], пропорциональное решение [2].

В качестве решения кооперативной игры будем рассматривать дележ, предложенный в работе [2].

Заметим также, что, как правило, нахождение подобных решений не предполагает вычисление значений характеристической функции для всех возможных коалиций. В нашем случае достаточно ограничится лишь вычислением $v(N, x_0)$ – выигрыша максимальной коалиции, что значительно облегчает решение задачи в вычислительном плане. Для нахождения $v(N, x_0)$ будем пользоваться теоремой 4.1.

Определение 4.1. *Вектор* $\xi(k) = (\xi_1(k), \ldots, \xi_n(k))$ *называется пропорциональным решением, если*

$$\xi_i(k_0, x_0) = v^{NE}(i, x_0) + \frac{v(N, x_0) - \sum\limits_{i \in N} v^{NE}(i, x_0)}{n}, \quad i \in N, \tag{4.2}$$

где $v^{NE}(i, x_0)$ *– выигрыш игрока* i *в равновесии по Нэшу,* $v(N, x_0)$ *– кооперативный выигрыш.*

Согласно теоремам 3.1 и 4.1 в рассматриваемом классе игр пропорциональное решение может быть вычислено по формуле:

$$\xi_i(k_0) = x_0^T \left(\Theta_i(k_0) + \frac{1}{n}(\Theta_N(k_0) - \sum_{i \in N} \Theta_i(k_0)) \right) x_0 +$$
$$+ \sum_{k=k_0}^{K-1} E\{w_k^T \left(\Theta_i(k+1) + \frac{1}{n}(\Theta_N(k+1) - \sum_{i \in N} \Theta_i(k+1)) \right) w_k\}, \quad i \in N. \tag{4.3}$$

4.2. Динамическая устойчивость пропорционального решения

Пусть набор стратегий $u^N = (u_1^N, \ldots, u_n^N)$ доставляет максимум J^N. Траекторию $x^*(k)$, которая реализуется при замыкании системы (2.1) набором стратегий u^N, будем называть оптимальной.

Определение 4.2. *Вектор-функцию* $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$, $k_0 \leq \leq k \leq K-1$ *назовем процедурой распределения дележа (ПРД), если*

$$\xi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{K-1} \beta_i(k) + f(K)(x^*(K))^T P_i(K) x^*(K), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Интерпретация ПРД следующая: $\beta_i(k)$ – выплата игроку i на шаге k.

Обозначим через $M(x_0)$ – кооперативный принцип оптимальности в игре $\Gamma(k_0, x_0)$, $M(x^*(k))$ принцип оптимальности $M(x_0)$, реализуемый в подыгре $\Gamma(k, x^*(k))$.

Определение 4.3. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$ называется состоятельной во времени ПРД, если при любом l, таком что, $k_0 \le l \le K-1$ выполняется следующее равенство:*

$$\xi_i(k_0, x_0) = \sum_{k=k_0}^{l} \beta_i(k) + \xi_i(l+1, x^*(l+1)), i = 1, \ldots, n,$$

где $\xi_i(k_0, x_0) \in M(x_0)$, $\xi_i(l+1, x^*(l+1)) \in M(x^*(l+1))$.

Понятия процедуры распределения дележа и состоятельной во времени ПРД впервые введены в [5, 6]. В определении 4.3 значение $\xi_i(k_0, x_0)$ представляет собой сумму двух слагаемых. Первое является «накопленным выигрышем» игрока i к моменту времени $l+1$, если выплаты сделаны согласно ПРД $\beta(k)$, а второе является выигрышем игрока i в подыгре $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ при условии, что при решении подыгры $\Gamma(l+1, x^*(l+1))$ используется тот же принцип оптимальности, что и при решении игры $\Gamma(k_0, x_0)$.

Теорема 4.2. *Вектор-функция $\beta(k) = (\beta_1(k), \ldots, \beta_n(k))$, где*

$$\beta_i(k) = \xi_i(k, x^*(k)) - \xi_i(k+1, x^*(k+1)), \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

является состоятельной во времени ПРД.

Доказательство. Покажем сначала, что вектор $\beta_i(k)$, определенный в (4.4), является ПРД:

$$\sum_{k=k_0}^{K-1} \beta_i(k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (\xi_i(k, x^*(k)) - \xi_i(k+1, x^*(k+1))) = \xi_i(k_0, x_0) -$$
$$- \xi_i(K, x^*(K)) = \xi_i(k_0, x_0) - f(K)(x^*(K))^T P_i(K) x^*(K).$$

Покажем теперь, что $\beta_i(k)$ является состоятельной во времени ПРД:

$$\sum_{k=k_0}^{l}\beta_i(k)+\xi_i(l+1,x^*(l+1))=\sum_{k=k_0}^{l}(\xi_i(k,x^*(k))-\xi_i(k+1,x^*(k+1)))+$$
$$+\xi_i(l+1,x^*(l+1))=\xi_i(k_0,x_0)-\xi_i(l+1,x^*(l+1))+\xi_i(l+1,x^*(l+1))=$$
$$=\xi_i(k_0,x_0).$$

□

Согласно теореме 4.2 в рассматриваемом классе игр динамически-устойчивая процедура распределения дележа для пропорционального решения имеет следующий вид:

$$\beta_i(k)=x^*(k)^T\left(\Theta_i(k)+\frac{1}{n}(\Theta_N(k)-\sum_{i\in N}\Theta_i(k))\right)x^*(k)+$$
$$+\sum_{l=k}^{K-1}E\{w_l^T\left(\Theta_i(l+1)+\frac{1}{n}(\Theta_N(l+1)-\sum_{i\in N}\Theta_i(l+1))\right)w_l\}-$$
$$-x^*(k+1)^T\left(\Theta_i(k+1)+\frac{1}{n}(\Theta_N(k+1)-\sum_{i\in N}\Theta_i(k+1))\right)x^*(k+1)-$$
$$-\sum_{l=k+1}^{K-1}E\{w_l^T\left(\Theta_i(l+1)+\frac{1}{n}(\Theta_N(l+1)-\sum_{i\in N}\Theta_i(l+1))\right)w_l\}.$$

Пусть

$$\Theta_i(k)+\frac{1}{n}(\Theta_N(k)-\sum_{i\in N}\Theta_i(k))=S_i(k),$$

тогда

$$\beta_i(k)=$$
$$=x^*(k)^T\left(S_i(k)-(A(k)+B(k)u^N(k))^TS_i(k+1)(A(k)+B(k)u^N(k))\right)x^*(k)+$$
$$+E\{w_k^TS_i(k+1)w_k\}.$$

5. Пример

Рассмотрим пример стохастической линейно-квадратичной игры двух лиц. Пусть динамика игры задается системой

$$\begin{aligned} x(k+1)=&x(k)+u_1(k)+u_2(k)+w(k),\\ k_0\le k\le L<\infty,\quad &k_0\in\mathcal{T}_+,\quad x(k_0)=x_0. \end{aligned}\tag{5.1}$$

Случайная величина L принимает значения от 0 до 3 с некоторыми вероятностями. Заданы вероятности q_k того, что игра закончится на шаге k, если она состоялась на $(k-1)$-м, $0 \le q_k \le 1$, $k = 0, \ldots, 3$, $q_3 = 1$. Будем предполагать, что выигрыши игроков имеют вид

$$J_1(k_0, x_0, u) = \underset{w_k, L}{E}\left\{\sum_{k=k_0}^{L-1}\left(0.1x^2(k) - u_1^2(k)\right)+0.001x^2(L)\right\},$$

$$J_2(k_0, x_0, u) = \underset{w_k, L}{E}\left\{\sum_{k=k_0}^{L-1}\left(0.1x^2(k) - 2u_2^2(k)\right)+0.001x^2(L)\right\}.$$

Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Согласно теореме 3.1 для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему

$$\begin{cases} (1 + M_1^{NE}(k) + M_2^{NE}(k))\Theta_1(k+1)(1 + M_1^{NE}(k) + M_2^{NE}(k)) - \\ - \Theta_1(k) + 0.1f(k) - f(k)(M_1^{NE}(k))^2 = 0, \\ (1 + M_1^{NE}(k) + M_2^{NE}(k))\Theta_2(k+1)(1 + M_1^{NE}(k) + M_2^{NE}(k)) - \\ - \Theta_2(k) + 0.1f(k) - 2f(k)(M_1^{NE}(k))^2 = 0, \\ M_1^{NE}(k) = -(-f(k) + \Theta_1(k+1))^{-1}\Theta_1(k+1)\times \\ \times (1 + M_2^{NE}(k)), \\ M_2^{NE}(k) = -(-2f(k) + \Theta_2(k+1))^{-1}\Theta_2(k+1)\times \\ \times (1 + M_1^{NE}(k)), \quad k = 0, \ldots, 2, \\ \Theta_i(3) = 0.001f(3), \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Тогда

$$M_1^{NE}(k) = -\frac{2\Theta_1(k+1)}{2\Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1) - 2f(k)},$$

$$M_2^{NE}(k) = -\frac{\Theta_2(k+1)}{2\Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1) - 2f(k)},$$

$$\Theta_1(k) = 0.1f(k) + \frac{4f(k)\Theta_1(k+1)(f(k) - \Theta_1(k+1))}{(2\Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1) - 2f(k))^2},$$

$$\Theta_2(k) = 0.1f(k) + \frac{f(k)\Theta_2(k+1)(4f(k) - \Theta_2(k+1))}{(2\Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1) - 2f(k))^2}.$$

Пусть $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/4$, $q_2 = 1/3$, $q_3 = 1$. Тогда $f(3) = \frac{1}{4}$, $f(2) = \frac{3}{8}$, $f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = 1$.

$$\Theta_1(3) = 0.00025, \quad \Theta_1(2) = 0.0378,$$

$$\Theta_1(1) = 0.0944, \quad \Theta_1(0) = 0.2164,$$

$$\Theta_2(3) = 0.00025, \quad \Theta_2(2) = 0.0378,$$

$$\Theta_2(1) = 0.0971, \quad \Theta_2(0) = 0.2255.$$

$$J_1(k_0, x_0, u^{NE}) = \\ 0.2164x_0^2 + 0.0944E\{w_0^2\} + 0.0378E\{w_1^2\} + 0.00025E\{w_2^2\}.$$

$$J_2(k_0, x_0, u^{NE}) = \\ 0.2255x_0^2 + 0.0971E\{w_0^2\} + 0.0378E\{w_1^2\} + 0.00025E\{w_2^2\}.$$

Найдем теперь решение кооперативной игры. Для этого необходимо решить следующую систему матричных уравнений

$$\begin{cases} (1 + M^N(k))^2\Theta_N(k+1) - \Theta_N(k) + \\ 0.2f(k) - f(k)(M_1^N(k))^2 - 2f(k)(M_2^N(k))^2 = 0, \\ M^N(k) = -\begin{pmatrix} \Theta_N(k+1) - f(k) & \Theta_N(k+1) \\ \Theta_N(k+1) & \Theta_N(k+1) - 2f(k) \end{pmatrix}^{-1} \Theta_N(k+1)A(k), \\ k = 1, \ldots, K-1, \\ \Theta_N(K) = 0.002f(K). \end{cases}$$

Получаем

$$M_1^N(k) = -\frac{2\Theta_N(k+1)}{3\Theta_N(k+1) - 2f(k)},$$

$$M_2^N(k) = -\frac{\Theta_N(k+1)}{3\Theta_N(k+1) - 2f(k)},$$

$$\Theta_N(k) = 0.2f(k) - \frac{2f(k)\Theta_N(k+1)}{(3\Theta_N(k+1) - 2f(k))}.$$

Тогда

$$\Theta_N(3) = 0.0005, \quad \Theta_N(2) = 0.0755,$$

$$\Theta_N(1) = 0.1976, \quad \Theta_N(0) = 0.4809,$$

$$J_N(k_0, x_0, u^{NE}) = \\ 0.4809x_0^2 + 0.1976E\{w_0^2\} + 0.0755E\{w_1^2\} + 0.0005E\{w_2^2\}.$$

Найдем пропорциональное решение:

$$\xi_1(k_0, x_0) = \\ 0.2359x_0^2 + 0.0974E\{w_0^2\} + 0.0378E\{w_1^2\} + 0.00025E\{w_2^2\}.$$

$$\xi_2(k_0, x_0) = \\ 0.2449x_0^2 + 0.1002E\{w_0^2\} + 0.0378E\{w_1^2\} + 0.00025E\{w_2^2\}.$$

Построим динамически-устойчивую процедуру распределения дележа для пропорционального решения:

$$\beta_1(0) = 0.0398(x^*(0))^2 + 0.0975E\{w_0^2\},$$

$$\beta_1(1) = 0.0345(x^*(1))^2 + 0.0378E\{w_1^2\},$$

$$\beta_1(2) = 0.0375(x^*(2))^2 + 0.00025E\{w_2^2\},$$

$$\beta_2(0) = 0.0426(x^*(0))^2 + 0.1002E\{w_0^2\},$$

$$\beta_2(1) = 0.037(x^*(1))^2 + 0.0378E\{w_1^2\},$$

$$\beta_2(2) = 0.0375(x^*(2))^2 + 0.00025E\{w_2^2\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранова Е. М., Петросян Л. А. *Кооперативные стохастические игры* // Тезисы докладов международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтопа-Якоби». Екатеринбург: Изд-во Уральского унив-та. 2005. С. 33-35.

2. Белицкая А. В., Петросян Л. А., *Сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу* // МТИП. 2012. Т. 4. Вып. 2. С. 3–13.

3. Жуковский В. А., Чиркий А. А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова думка. 1994.

4. Марковкин М. В. *Линейно-квадратичные кооперативные дифференциальные игры.* Диссертация кандидата физико-математических наук. СПбГУ. Санкт-Петербург. 2006.

5. Петросян Л. А. *Построение сильно динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 1992. N 4. С. 33–38.

6. Петросян Л. А., Данилов Н. Н. *Устойчивость решений в неантагонистических дифференциальных играх с трансферабельными выигрышами* // Вестн. Ленингр. ун-та. 1979. N 1. С. 46–54.

7. Петросян Л. А., Баранова Е. М., Шевкопляс Е. В. *Многошаговые кооперативные игры со случайной продолжительностью* // Труды института математики и механики Уро РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 116–130.

8. Петросян Л. А., Шевкопляс Е. В. *Кооперативные дифференциальные игры со случайной продолжительностью* // Вестник СПбГУ. 2000. Сер. 1. Вып. 4. С. 18–23.

9. Шевкопляс Е. В. *Устойчивая кооперация в дифференциальных играх со случайной продолжительностью* // МТИП. 2012. Т. 2. Вып. 3. С. 79–105.

10. Baranova E. M., Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Games in Stationary Strategies* // Game theory and Applications, Nova Science Publishers. 2006. V. 11. P. 7-17.

11. Basar T. *Existence of unique equilibrium solutions in nonzero-sum stochastic differential games* // Differential Games and Control Theory II, E. O. Roxin, P. T. Liu, and R. Sternberg, eds., Marcel Dekker, Inc. 1977. P. 201-228.

12. Basar T. and Olsder G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd edition.* Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1999.

13. Bertsekas D. P. *Dynamic Programming and Optimal Control, Vol I and II, 3rd edition.* Athena Scientific. 2007.

14. Brink R. van den and Funaki Y. *Axiomatizations of a Class of Equal Surplus Sharing Solutions for TU-Games.* Theory and Decision. 2009. V. 67. P. 303-340.

15. Driessen T. S. H. and Y. Funaki. *Coincidence of and collinearity between game theoretic solutions* // OR Spektrum. 1991. N 13. P. 15–30.

16. Engwerda J. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games.* Wiley. 2005.

17. Nash J., *Non-cooperative Games* // Ann. of Math. 1951. No. 54. P. 286–295.

18. Petrosjan L. A. *Cooperative stochastic games* // Proc. "10th Intern. Symposium on Dynamic Games and Appl."St. Petersburg. 2002.

19. Shapley L. S. *Stochastic games* // Proc. Nat. Acad. USA. 1953. V. 39. P. 1095-1100.

20. Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. *Subgame consistent cooperative solutions in stochastic differential games* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. V. 120. No. 3. P. 651-666.

21. Yeung D. W. K., Petrosyan L. A. *Cooperative Stochastic Differential Games.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. 2005.

LINEAR-QUADRATIC STOCHASTIC DISCRETE-TIME DYNAMIC GAMES WITH RANDOM DURATION

Anna V. Tur, St.Petersburg State University, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes (a.tur@spbu.ru).

Abstract: The paper considers linear-quadratic stochastic discrete-time dynamic games with random duration. The Nash equilibrium in such class of games is found. The cooperative solution is obtained. The time consistency of this solution is studied. The paper considers the example.

Keywords: linear-quadratic games, stochastic games, games with random duration, Nash equilibrium, cooperative games, time consistency, payoff distribution procedure, proportional solution.