Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.3, с. 105–119

УДК 517.95
ББК 22.18

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

ТУРСУН К. ЮЛДАШЕВ
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М.Ф. Решетнева
660014, Красноярск, пр-кт им. газеты Красноярский рабочий, 31
e-mail: tursunbay@rambler.ru

В данной работе предлагается методика приближенного решения одной известной задачи оптимального управления для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка и управления, ограниченного по модулю константой, с критерием квадратичного типа. Для каждого набора заданных координат и управления задача Коши сводится к интегральному уравнению. Рассматривается случай, когда все переменные принимают натуральные значения. Интегральное уравнение заменяется дискретным аналогом. Доказывается существование и единственность решения этого уравнения. Используется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: оптимальное управление, квазилинейное уравнение, нелинейное интегральное уравнение, дискретный аналог, метод сжимающих отображений.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается квазилинейным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\big(t,x,y,u(t,x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\big(t,x,y,u(t,x,y)\big)\frac{\partial u}{\partial y}=$$
$$=\alpha(t)\sigma(t)+f\big(t,x,y,u(t,x,y)\big) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(t,x,y)_{|t=t_0}=\varphi(x,y), \tag{1.2}$$

где $A_i\big(t,x,y,u(t,x,y)\big) \in C(D\times R)$, $i=1,2$, $f\big(t,x,y,u(t,x,y)\big) \in$ $\in C(D\times R)$, $\varphi(x,y) \in C(R^2)$, $\alpha(t) \in C[t_0,T]$, $D \equiv [t_0,T]\times R^2$, $0<t_0<T<\infty$, $R\equiv(-\infty,\infty)$.

Управление $\sigma(t)$ интегрируемо с квадратом и удовлетворяет неравенству

$$|\sigma(t)|\leq M_0=const. \tag{1.3}$$

Качество управления характеризуется функционалом

$$J[\sigma]=\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,y)u^2(t,x,y)dydxdt+\gamma\int\limits_{t_0}^{T}\sigma^2(t)dt, \tag{1.4}$$

где $0<\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,y)dydx<\infty$, γ – целое число.

Задача 1. Найти такое управление $\sigma^\star(t)\in Q\equiv\big\{\sigma^\star:|\sigma^\star(t)|\leq M_0,$ $t\in[t_0,T]\big\}$*, интегрируемое с квадратом и соответствующее ему состояние* $u^\star(t,x,y)$ *начальной задачи (1.1), (1.2), чтобы функционал (1.4) принимал наименьшее возможное значение.*

Уравнения вида (1.1) при нулевом управлении встречаются при решении многих задач механики. Стандартные методы позволяют найти точные (частные) решения квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка для конкретных нелинейных функций, входящих в данное уравнение [3]. Для нахождения общих решений квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с общими нелинейными функциями эффективным является метод, который позволяет поставленную задачу заменить эквивалентным ей нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления [2, 5, 6]. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами используется широкий спектр разных методов [1, 4].

2. Сведение задачи Коши (1.1), (1.2) к нелинейному интегральному уравнению

Теорема 2.1. *Задача Коши (1.1), (1.2) эквивалентна следующему нелинейному интегральному уравнению*

$$u(t,x,y) = \Theta(t,x,y;u) \equiv$$

$$\equiv \varphi\left(x - \int\limits_{t_0}^{t} A_1\big(s,x,y,u(s,x,y)\big)ds,\ y - \int\limits_{t_0}^{t} A_2\big(s,x,y,u(s,x,y)\big)ds\right) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\Big[\alpha(s)\sigma(s) + f\big(s,x,y,u(s,x,y)\big)\Big]ds, \tag{2.1}$$

где x, y играют роль параметров, а функция $\sigma(t)$ удовлетворяет условию (1.3).

Доказательство. Рассмотрим параметрическое задание характеристики

$$\frac{dx}{d\tau} = A_1\big(t,x,y,u(t,x,y)\big),\ \frac{dy}{d\tau} = A_2\big(t,x,y,u(t,x,y)\big). \tag{2.2}$$

Изменение переменной τ перемещает точку с координатами t, x, y по характеристике. Интегрируя уравнения (2.2) по τ, получаем

$$x \equiv p(\tau,t,x,y,\vartheta),\ y \equiv q(\tau,t,x,y,\vartheta),$$

где $p(\tau,t,x,y,\vartheta)$ и $q(\tau,t,x,y,\vartheta)$ определяются из следующей системы:

$$\begin{cases} p(\tau,t,x,y,\vartheta) = x - \int\limits_{\tau}^{t} A_1\big(s,p,q,\vartheta\big)ds, \\ q(\tau,t,x,y,\vartheta) = y - \int\limits_{\tau}^{t} A_2\big(s,p,q,\vartheta\big)ds, \end{cases}$$

$$\vartheta = \vartheta(\tau,t,x,y) = \vartheta\big(\tau,t,p(\tau,t,x,y,\vartheta),q(\tau,t,x,y,\vartheta)\big).$$

Отсюда очевидно, что $\vartheta(t,t,x,y) = u(t,x,y)$.

Положим

$$f(t,x,y,u)\Big|_{\substack{x=p(\tau,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,t,x,y,\vartheta)}} = f(\tau,t,p,q,\vartheta).$$

Тогда

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{du}{d\tau}\Big|_{\substack{x=p(\tau,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,t,x,y,\vartheta)}} = \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}\Big)\Big|_{\substack{x=p(\tau,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,t,x,y,\vartheta)}} =$$

$$= \Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}A_1(t,x,y,u) + \frac{\partial u}{\partial y}A_2(t,x,y,u)\Big)\Big|_{\substack{x=p(\tau,t,x,y,\vartheta)\\ y=q(\tau,t,x,y,\vartheta)}} u =$$

$$= \alpha(\tau,t)\sigma(\tau,t) + f(\tau,t,p,q,\vartheta),$$

т.е. получили обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = \alpha(\tau,t)\sigma(\tau,t) + f(\tau,t,p(\tau,t,x,y,\vartheta),q(\tau,t,x,y,\vartheta),\vartheta) \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$\vartheta(\tau,t,x,y)_{|t=\tau=t_0} = \varphi(x,y). \tag{2.4}$$

Интегрируя (2.3) по τ и используя начальное условие (2.4), получаем нелинейное интегральное уравнение

$$\vartheta(\tau,t,x,y) = \varphi\big(p(t_0,t,x,y,\vartheta),q(t_0,t,x,y,\vartheta)\big) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau}\Big[\alpha(\theta,t)\sigma(\theta,t) + f(\theta,t,p,q,\vartheta)\Big]d\theta. \tag{2.5}$$

При $\tau = t$ из (2.5) получаем (2.1). Функция

$$\varphi\big(p(t_0,t,x,y,u),q(t_0,t,x,y,u)\big) \tag{2.6}$$

является первым интегралом уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1\big(t,x,y,u\big)\frac{\partial u}{\partial x} + A_2\big(t,x,y,u\big)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.7}$$

и она постоянна вдоль решения этого уравнения (2.7). Производные решения уравнения (2.7) вдоль характеристики равны нулю и функция (2.6) удовлетворяет уравнению в частных производных (2.7). В самом деле, любая достаточно гладкая функция $\Phi(x,y)$, постоянная вдоль характеристики уравнения (2.7), удовлетворяет ему.

Очевидно, что интегральное уравнение (2.1) удовлетворяет начальному условию (1.2).

Теперь из интегрального уравнения (2.1) путем дифференцирования получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(t)\sigma(t) + f(t,x,y,u).$$

С другой стороны, имеет место соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Так как

$$\frac{dx}{dt} = A_1\big(t,x,y,u\big),\ \frac{dy}{dt} = A_2\big(t,x,y,u\big),$$

то из последних двух соотношений следует, что интегральное уравнение (2.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1.1). □

3. Нелинейный дискретный аналог интегрального уравнения и его однозначная разрешимость

Рассмотрим дискретный аналог задачи 1. Пусть управляемый процесс описывается квазилинейным разностным уравнением вида

$$\Delta_n u(n,m,k) + A_1\big(n,m,k,u(n,m,k)\big)\Delta_m u(n,m,k) +$$
$$+A_2\big(n,m,k,u(n,m,k)\big)\Delta_k u(n,m,k) =$$
$$= f\left(n,m,k,u(n,m,k)\right) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(n,m,k)_{|n=n_0} = \varphi(m,k), \tag{3.2}$$

где целочисленные функции $A_i\big(n,m,k,u\big)$, $f\big(n,m,k,u\big)$ определены для всех $n\geq n_0$, $i=1,2$, целочисленная функция $\varphi(m,k)$ определена для всех $m,k\in Z$, $\Delta_n u(n,m,k)=u(n+1,m,k)-u(n,m,k)$, $\Delta_m u(n,m,k)=u(n,m+1,k)-u(n,m,k)$, $\Delta_k u(n,m,k)=u(n,m,k+1)-$ $-u(n,m,k)$, $\alpha(n)$ – целочисленная функция, определенная при $n\geq n_0$, $0<n_0,n,N$ – натуральные числа, Z – множество целых чисел.

Управление $\sigma(n)$ суммируемо с квадратом и удовлетворяет неравенству

$$|\sigma(n)|\leq M_0=const. \tag{3.3}$$

Качество управления характеризуется функционалом

$$J[\sigma]=\sum_{n=n_0}^{N-1}\sum_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum_{k=-k_0}^{k_0-1}K(m,k)u^2(n,m,k)+\gamma\sum_{n=n_0}^{N-1}\sigma^2(n), \tag{3.4}$$

где $0<\sum\limits_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum\limits_{k=-k_0}^{k_0-1}K(m,k)<\infty$, γ – целое число, m_0,k_0 – достаточно большие натуральные числа.

Задача 2. Найти такое управление $\sigma^\star(n)\in Q\equiv\big\{\sigma^\star:|\sigma^\star(n)|\leq M_0,$ $n_0\leq n\leq N\big\}$*, суммируемое с квадратом и соответствующее ему состояние* $u^\star(n,m,k)$ *начальной задачи (3.1), (3.2), чтобы функционал (3.4) принимал наименьшее возможное значение.*

В данной работе вместо задачи 1 рассматривается задача 2 как ее дискретный аналог. Вместо интегрального уравнения (2.1) будем рассматривать следующее уравнение:

$$u(n,m,k)=\Theta(n,m,k;u)\equiv$$

$$\equiv\varphi\left(m-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_1\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big),k-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_2\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big)\right)+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu)+f\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big)\Big], \tag{3.5}$$

где m,k играют роль параметров.

Нетрудно убедиться, что начальная задача (3.1), (3.2) и уравнение (3.5) являются эквивалентными.

Мы используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целочисленных функций, ограниченных по норме с положительным числом M; $Lip\{L_{|u,v,\ldots}\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \ldots$ с положительным коэффициентом L. В качестве нормы на множестве D для произвольной целочисленной функции $h(n, m, k)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|h(n,m,k)\| = max\{|h(n,m,k)| : n \in D_N, m, k \in Z\},$$

где $D \equiv D_N \times Z^2$, $D_N \equiv \{n_0 \leq n \leq N\}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\varphi(m,k) \in Bnd(M_1) \cap Lip\left\{L_{11|m}; L_{12|k}\right\}$, $0 < L_{1i} = const$, $i = 1, 2$;
2. $f(n,m,k,u) \in Bnd(M_2) \cap Lip\left\{L_{20|u}\right\}$, $0 < L_{20} = const$;
3. $A_i(n,m,k,u) \in Lip\left\{L_{3i|u}\right\}$, $0 < L_{3i} = const$, $i = 1, 2$;
4. $\rho = \big(L_{11}L_{31} + L_{12}L_{32} + L_{20}\big)(N - n_0 - 1) < 1$.

Тогда задача (3.1), (3.2) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$, для которых выполняется условие (3.3), имеет единственное решение на множестве D.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений (см., напр. [7–9]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$u_0(n,m,k) = \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A_1\big(\nu,m,k,0\big), k - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A_2\big(\nu,m,k,0\big)\right) + \\ + \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma(\nu) + f\big(\nu,m,k,0\big)\Big], \tag{3.6}$$

$$u_{\mu+1}(n,m,k) = \Theta(n,m,k;u_\mu),\ \mu = 0,1,2,\ldots, \tag{3.7}$$

где m, k – целочисленные параметры.

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (3.6) получим следующую оценку

$$\big\|u_0(n,m,k)\big\| \leq M_1 + (\alpha_0 M_0 + M_2)(N - n_0 - 1), \tag{3.8}$$

где $\alpha_0 = \max\big\{|\alpha(n)| : n \in D_N\big\}$.

В силу условий теоремы, с учетом (3.8), из (3.6) и (3.7) для первого приближения получаем оценку

$$\left\|u_1(n,m,k)-u_0(n,m,k)\right\| \leq$$
$$\leq L_{11}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|A_1\big(\nu,m,k,u_0\big)-A_1\big(\nu,m,k,0\big)\right\|+$$
$$+L_{12}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|A_2\big(\nu,m,k,u_0\big)-A_2\big(\nu,m,k,0\big)\right\|+$$
$$+\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|f\big(\nu,m,k,u_0\big)-f\big(\nu,m,k,0\big)\right\| \leq \tag{3.9}$$
$$\leq \big(L_{11}L_{31}+L_{12}L_{32}+L_{20}\big)(N-n_0-1)\cdot\left\|u_0(n,m,k)\right\| \leq$$
$$\leq \big(M_1+(\alpha_0M_0+M_2)(N-n_0-1)\big)\rho < M_1+(\alpha_0M_0+M_2)(N-n_0-1).$$

Аналогично, в силу условий теоремы, для произвольного натурального числа μ из (3.7) по индукции получаем

$$\left\|u_{\mu+1}(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\right\| \leq$$
$$\leq L_{11}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|A_1\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-A_1\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\right\|+$$
$$+L_{12}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|A_2\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-A_2\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\right\|+$$
$$+\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\left\|f\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-f\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\right\| \leq$$
$$\leq \rho\cdot\left\|u_\mu(n,m,k)-u_{\mu-1}(n,m,k)\right\| <$$
$$< \left\|u_\mu(n,m,k)-u_{\mu-1}(n,m,k)\right\|. \tag{3.10}$$

Кроме того, для разности $u(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)$ справедлива оценка

$$\left\|u(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\right\| \leq$$
$$\leq \left\|u(n,m,k)-u_{\mu+1}(n,m,k)\right\|+\left\|u_{\mu+1}(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\right\| \leq$$

$$\leq L_{11}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|A_1\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big)-A_1\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)\Big\|+$$

$$+L_{11}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|A_1\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-A_1\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\Big\|+$$

$$+L_{12}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|A_2\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big)-A_2\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)\Big\|+$$

$$+L_{12}\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|A_2\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-A_2\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\Big\|+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|f\big(\nu,m,k,u(\nu,m,k)\big)-f\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)\Big\|+$$

$$+\sum_{\nu=n_0}^{N-1}\Big\|f\big(\nu,m,k,u_\mu(\nu,m,k)\big)-f\big(\nu,m,k,u_{\mu-1}(\nu,m,k)\big)\Big\|\leq$$

$$\leq\rho\cdot\Big\|u(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\Big\|+$$
$$+\rho^\mu\big(M_1+(\alpha_0M_0+M_2)(N-n_0-1)\big).$$

Отсюда окончательно получаем, что

$$\Big\|u(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\Big\|\leq\frac{\rho^\mu\big(M_1+(\alpha_0M_0+M_2)(N-n_0-1)\big)}{1-\rho}. \quad (3.11)$$

Из оценок (3.8)–(3.10) следует, что оператор в правой части (3.5) является сжимающим. Следовательно, задача (3.1), (3.2) при фиксированных значениях управления $\sigma(n)$, для которых выполняется условие (3.3), имеет единственное решение на множестве D. Так как $\rho<1$, то из (3.11) следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\Big\|u(n,m,k)-u_\mu(n,m,k)\Big\|=0.$$

□

4. Оптимизация управления

В данном разделе мы предположим, что выполняются условия теоремы 3.1. С учетом последовательности функций (3.7) функционал (3.4) запишем в виде

$$J_\mu[\sigma]=\sum_{n=n_0}^{N-1}\sum_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum_{k=-k_0}^{k_0-1}K(m,k)u_\mu^2(n,m,k)+\gamma\sum_{n=n_0}^{N-1}\sigma^2(n). \tag{4.1}$$

В силу условий теоремы, из (3.11) и (4.1) получаем следующую оценку:

$$\big|J[\sigma]-J_\mu[\sigma]\big|\le 2\beta\frac{\rho^\mu\big(M_1+(\alpha_0M_0+M_2)(N-n_0-1)\big)(N-n_0-1)}{1-\rho},$$

где $\beta=\sum\limits_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum\limits_{k=-k_0}^{k_0-1}K(m,k)<\infty$.

Из этой оценки следует, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\big|J[\sigma]-J_\mu[\sigma]\big|=0. \tag{4.2}$$

Пусть $\sigma^\star(n)$ – оптимальное допустимое управление в задаче 2. Тогда для этого оптимального управления справедлива следующая оценка:

$$\big|\sigma^\star(n)-\sigma^\star_\mu(n)\big|\le\delta_\mu(n),\ \lim_{\mu\to\infty}\delta_\mu(n)=0. \tag{4.3}$$

Рассмотрим следующие соотношения:

$$u^\star(t,x,y)=$$

$$=\varphi\left(m-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_1\big(\nu,m,k,u^\star(\nu,m,k)\big),k-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_2\big(\nu,m,k,u^\star(\nu,m,k)\big)\right)+$$
$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma^\star(\nu)+f\big(\nu,m,k,u^\star(\nu,m,k)\big)\Big], \tag{4.4}$$

$$u_0^\star(n,m,k)=\varphi\left(m-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_1\big(\nu,m,k,0\big),k-\sum_{\nu=n_0}^{n-1}A_2\big(\nu,m,k,0\big)\right)+$$
$$+\sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma_0^\star(\nu)+f\big(\nu,m,k,0\big)\Big], \tag{4.5}$$

$$u^\star_{\mu+1}(n,m,k) =$$
$$= \varphi\left(m - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A_1\big(\nu,m,k,u^\star_\mu(\nu,m,k)\big), k - \sum_{\nu=n_0}^{n-1} A_2\big(\nu,m,k,u^\star_\mu(\nu,m,k)\big)\right) +$$
$$+ \sum_{\nu=n_0}^{n-1}\Big[\alpha(\nu)\sigma^\star_\mu(\nu) + f\big(\nu,m,k,u^\star_\mu(\nu,m,k)\big)\Big], \tag{4.6}$$

$$J_\mu[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1}\sum_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum_{k=-k_0}^{k_0-1} K(m,k)\big(u^\star_\mu(n,m,k)\big)^2 +$$
$$+\gamma\sum_{n=n_0}^{N-1}\big(\sigma^\star(n)\big)^2, \tag{4.7}$$

$$J_\mu[\sigma^\star_\mu] = \sum_{n=n_0}^{N-1}\sum_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum_{k=-k_0}^{k_0-1} K(m,k)\big(u^\star_\mu(n,m,k)\big)^2 +$$
$$+\gamma\sum_{n=n_0}^{N-1}\big(\sigma^\star_\mu(n)\big)^2. \tag{4.8}$$

С учетом (4.3) из (4.4)–(4.6) имеем оценку

$$\big\|u^\star(n,m,k) - u^\star_\mu(n,m,k)\big\| \le$$
$$\le \frac{\rho^\mu\big[M_1 + \big(M_2 + \alpha_0\delta_\mu(n)\big)(N-n_0-1)\big]}{1-\rho}. \tag{4.9}$$

Далее, с учетом (3.3) и (4.9), из (4.7) и (4.8) получаем, что

$$\big|J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma^\star_\mu]\big| \le 2\Big\{\beta\frac{\rho^\mu\big[M_1 + \big(M_2 + \alpha_0\delta_\mu(n)\big)(N-n_0-1)\big)^2}{1-\rho} +$$
$$+\gamma M_0\delta_\mu(n)\Big\}(N-n_0-1).$$

Из последней оценки следует, что справедливо следующее предельное соотношение

$$\lim_{\mu\to\infty}\big|J_\mu[\sigma^\star] - J_\mu[\sigma^\star_\mu]\big| = 0. \tag{4.10}$$

С учетом оценки (4.3) и соотношения (4.10) для функционалов

$$J[\sigma^\star] = \sum_{n=n_0}^{N-1}\sum_{m=-m_0}^{m_0-1}\sum_{k=-k_0}^{k_0-1} K(m,k)\big(u^\star(n,m,k)\big)^2 + \gamma\sum_{n=n_0}^{N-1}\big(\sigma^\star(n)\big)^2$$

и (4.8) получаем, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\left|J[\sigma^\star]-J_\mu[\sigma^\star_\mu]\right|=\lim_{\mu\to\infty}\left|J[\sigma^\star]-J_\mu[\sigma^\star]\right|+$$

$$+\lim_{\mu\to\infty}\left|J_\mu[\sigma^\star]-J_\mu[\sigma^\star_\mu]\right|=0.$$

Отсюда следует, что последовательность управлений $\left\{\sigma^\star_\mu(n)\right\}_{\mu=1}^{\infty}$ является минимизирующей последовательностью для искомой задачи.

5. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу управления дорожным движением. Пусть управляемый процесс описывается следующим уравнением дорожного движения

$$u_t+\alpha\big(2u(t,x)-3u^2(t,x)\big)u_x=2\alpha p(t)-$$

$$-3\alpha\beta^3x^2-6\alpha^2\beta^2xt^2-3\alpha^3\beta t^4+2\alpha\beta u(t,x), \tag{5.1}$$

где $0<\alpha=const$, $\beta=const$, $t\in[0;1]$, $x\in\Re$.

Найдем такое управление $p(t)\in\big\{p:|p(t)|\le 1,\ t\in[0,1]\big\}$ и соответствующее ему состояние $u(t,x)$, которое является решением уравнения (5.1) при начальном условии

$$u(0,x)=\beta x, \tag{5.2}$$

при которых функционал

$$J[p]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^4}\Big(u(1,x)-\alpha-x\Big)^2dx+\gamma\int\limits_0^1p^2(t)dt,\ 0<\gamma=const \tag{5.3}$$

принимает наименьшее возможное значение.

Данную задачу управления заменим дискретным аналогом. Пусть управляемый процесс описывается следующим разностным уравнением:

$$\Delta u_n+\alpha\big(2u(n,m)-3u^2(n,m)\big)\Delta u_m=2\alpha p(n)-$$

$$-3\alpha\beta^3m^2-6\alpha^2\beta^2mn^2-3\alpha^3\beta n^4+2\alpha\beta u(n,m), \tag{5.4}$$

где $\alpha\in N$, $\beta\in Z$, $n_0\le n\le n_1$, $m\in Z$.

Найдем такое управление $p(n) \in \left\{p : |p(n)| \leq M, n_0 \leq n \leq n_1\right\}$ и соответствующее ему состояние $u(n,m)$, которое является решением уравнения (5.4) при начальном условии

$$u(n_0, m) = \beta m, \tag{5.5}$$

при которых функционал

$$\sum_{m=-m_0}^{m_0-1} m \prod_{s=-m_0}^{m_0-1} \big(- s^4 + 1\big)^{-1} \Big(u(n_1, m) - \alpha - m\Big)^2 + \gamma \sum_{n=n_0}^{n_1-1} p^2(n), \tag{5.6}$$

где m_0 – достаточно большое натуральное число, принимает наименьшее возможное значение.

Для разностной задачи (5.4) и (5.5) выполняются условия последней теоремы и здесь можно построить последовательность управлений $\Big\{p_\mu(n)\Big\}_{\mu=1}^{\infty}$, которая является минимизирующей для функционала (5.6). Следовательно, существует управление $p(t) = t$ и соответствующее ему решение искомой начальной задачи (5.1) и (5.2) $u(t,x) = \beta x + \alpha t^2$, такие, что функционал (5.3) принимает наименьшее возможное значение

$$J[p] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^4} \Big(u(1,x) - \alpha - x\Big)^2 dx + \gamma \int\limits_{0}^{1} p^2(t) dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^4} \Big(\beta x + \alpha - \alpha - x\Big)^2 dx + \gamma \int\limits_{0}^{1} t^2 dt = (\beta - 1)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx + \frac{\gamma}{3} = \frac{\gamma}{3}.$$

6. Заключение

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми квазилинейными уравнениями с частными производными, очень сложно. Поэтому на практике широко используются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе приведена методика приближенного решения одной задачи оптимального управления для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом используются итерации (4.6) и (4.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1965.

2. Евтушенко Ю. Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* М.: Наука, 1982.

3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.* М.: Физматлит, 2003.

4. Рапопорт Э. Я. *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами.* М.: Высшая школа, 2009.

5. Срочко В. А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* М.: Физматлит, 2000.

6. Федоренко Р. П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* М.: Наука, 1978.

7. Yuldashev T. K. *On a nonlinear system of functional difference equations with nonlinear complicated mixed maxima* // Advanced studies in contemporary mathematics. 2006. V. 13. N 1. P. 1–5.

8. Yuldashev T. K. *On a summery equation with weak nonlinear right-hand side* // Advanced studies in contemporary mathematics. 2007. V. 15. N 1. P. 95–98.

9. Yuldashev T. K. *On a solvability of nonlinear summary equation of the third kind* // Proc. of Jangjeon Math. Soc. 2013. V. 16. N 1. P. 151–155.

ON A CONSTRUCTION OF APPROXIMATIONS FOR THE OPTIMAL CONTROL IN QUASI-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Tursun K. Yuldashev, Siberian State Aerospace University, Department of Higher Mathematics, Cand.Sc., docent (tursunbay@rambler.ru).

Abstract: We propose an approximate method of studying the optimal control problem for a quasilinear partial differential equations of first order. We consider the control bounded by a constant and quadratic criterion type. For each set of given coordinates and controls the Cauchy problem is reduced to an integral equation. It is considered the case when all the variables are integer values. The integral equation is replaced by the discrete analog. The existence and uniqueness of solution of this equation is proven. We use the method of successive approximations combined with the method of compressing maps.

Keywords: optimal control, quasilinear equation, nonlinear integral equation, discrete analog, method of compressing mapping.