

УДК 519.8

ББК 22.18

# ДВУХУЗЛОВОЙ РЫНОК В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

АЛЕКСАНДР А. ВАСИН \*

ЕКАТЕРИНА А. ДАЙЛОВА

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 52

e-mail: vasin@cs.msu.su, e.daylova@gmail.com

В данной статье рассмотрен аукцион на двухузловом рынке с едиными узловыми ценами. Структурой каждого локального рынка является олигополия. Показано, как зависит тип равновесия Нэша от пропускной способности. Исследована задача об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара в условиях несовершенной конкуренции.

*Ключевые слова:* сетевой аукцион, олигополия Курно, общественное благосостояние, равновесие Нэша.

## 1. Введение

Сетевая структура играет значимую роль на многих рынках однородных товаров, например, на рынках электроэнергии. В [4], [5] рассмотрены конкурентные оптовые рынки газа и электроэнергии, а также получены методы для расчета конкурентного равновесия. В [2] нами предложена методика нахождения оптимальной пропускной способности системы в условиях совершенной конкуренции.

В настоящей статье мы исследуем двухузловый рынок в условиях несовершенной конкуренции. В работах [8], [9] авторами показано,

---

©2014 А.А. Васин, Е.А. Дайлова

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-91163 ГФЕН\_а). Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

что в определенных условиях аукцион с едиными узловыми ценами приводит к тому же исходу, что и конкуренция по Курно. Для конкуренции по Курно в [8] указаны три возможных типа равновесий Нэша, которые возникают в зависимости от структуры двухузлового рынка. Первый тип – равновесие типа  $A$ , когда рынки остаются изолированными. В равновесии типа  $B$  идет переток между рынками, причем ограничение пропускной способности не является активным. В равновесии типа  $C$  также происходит перемещение товара с одного рынка на другой, но ограничение пропускной способности активно.

В следующем разделе мы приводим формальную модель двухузлового аукциона функций предложений с едиными узловыми ценами. Третий раздел посвящен двухузловому аукциону в условиях несовершенной конкуренции. В нем уточняются результаты относительно структуры и свойств множества равновесий Нэша для модели двухузлового аукциона. Теорема 3.2 устанавливает условия, в которых при любом значении пропускной способности существует не более одного равновесия. Показано, что по мере увеличения пропускной способности сначала в равновесии ограничение пропускной способности активно, затем устанавливаются узловые цены, соотношение которых соответствует коэффициенту потерь, далее поток стабилизируется и ограничение пропускной способности неактивно.

Наконец, в четвертом разделе рассматривается задача об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара (далее СПТ) между узлами с точки зрения общественного благосостояния, то есть суммарного выигрыша участников рынка. Для каждого типа равновесия исследуется поведение функции общественного благосостояния. Эти результаты позволяют решить задачу поиска оптимальной пропускной способности двухузлового рынка.

## 2. Модель двухузлового рынка

Рассмотрим сетевой аукцион функций предложений с едиными узловыми ценами [1, с.45]. Пусть в каждом узле  $i$  присутствует множество производителей  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ . Издержки производителя  $a \in A_i$  в зависимости от объема производства задаются функцией полных затрат  $C^a(v)$ , которая монотонно возрастает по  $v$  и является выпуклой функцией;  $C^a(0) = 0$ ;  $C^{a'}(v) \rightarrow \infty$  при  $v \rightarrow \infty$  [3]. Функция

спроса  $D_i(p)$  описывает потребителей  $i$ -ого узла и обладает следующими свойствами:  $D_i(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ ,  $D_i(p)$  убывает по  $p$ . При перемещении товара с одного рынка на другой имеют место потери, характеризуемые коэффициентом потерь  $k$ . Пусть  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (1 - k)^{-1}$ . Пропускная способность  $Q$  показывает, какой максимальный объем товара может быть перемещен с одного рынка на другой.

Стратегией каждой фирмы-поставщика  $a$  является неубывающая функция предложения  $R^a(p)$ . Цены отсечения  $\bar{c}_i$  для изолированных рынков определяются из условий:  $\sum_{a \in A_i} R^a(\bar{c}_i) = D_i(\bar{c}_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

Если справедливо

$$\lambda^{-1} \leq \bar{c}_2/\bar{c}_1 \leq \lambda, \quad (2.1)$$

то рынки остаются изолированными и узловые цены совпадают с ценами изолированных рынков.

Если соотношение (2.1) нарушается, то для определенности будем считать, что  $\bar{c}_2/\bar{c}_1 > \lambda$ . Системный оператор выбирает объем  $q$  перемещаемого товара (далее поток) с первого рынка на второй, при этом узловые цены  $p_1(q)$  и  $p_2(q)$  определяются из условия баланса спроса и предложения с учетом объема перемещенного товара:  $D_1(p_1) + q = \sum_{a \in A_1} R^a(p_1)$ ,  $D_2(p_2) - (1 - k)q = \sum_{a \in A_2} R^a(p_2)$ . Системный оператор действует так же, как если бы на рынке присутствовало много посредников, перемещающих товар между рынками, пока это приносит выгоду. Для объема  $q$  перемещенного товара из первого узла во второй справедливо одно из условий:  $p_2(q) > \lambda p_1(q)$  и  $q = Q$ , либо  $\lambda p_1(q) = p_2(q)$ . Если  $\lambda^{-1} > \bar{c}_2/\bar{c}_1$ , то будет происходить перемещение товара из второго узла в первый и узловые цены будут определяться симметричным образом.

В следующем разделе проводится анализ равновесий Нэша модели двухузлового аукциона в зависимости от пропускной способности. В работе [9] показано, что если существует равновесие аукциона единой цены, устойчивое по отношению к адаптивной динамике, то исход должен соответствовать исходу по Курно. Поэтому далее мы рассмотрим модель Курно.

### 3. Модель двухузлового рынка в условиях несовершенной конкуренции

Сначала, следуя [1, с. 24–27], приведем формальное изложение классической модели Курно для точечного рынка с множеством производителей  $A$ . Каждый производитель  $a \in A$  характеризуется функцией затрат  $C^a(v)$  с неубывающими предельными издержками для  $v \in [0, V^a]$ , где  $V^a$  — его производственная мощность. Функция спроса  $D(p)$  известна всем агентам. Стратегией производителя  $a$  является объем его производства  $v^a \in [0, V^a]$ . Производители устанавливают свои объемы одновременно. Их совокупность является набором стратегий  $\vec{v} = (v^a, a \in A)$ . Рыночная цена  $p(\vec{v})$  уравнивает спрос и фактическое предложение:  $p(\vec{v}) = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^a)$ . Функция выигрыша производителя  $a$  определяет его прибыль  $\pi^a(\vec{v}) = v^a p(\vec{v}) - C^a(v^a)$ . Таким образом, взаимодействие в модели Курно соответствует игре в нормальной форме  $\Gamma_C = \langle A, [0, V^a], \pi^a(\vec{v}), \vec{v} \in \otimes_{a \in A} [0, V^a] \rangle$ . Вектор объемов производства  $(v^{a*}, a \in A)$  образует равновесие Курно, если он является равновесием Нэша в игре  $\Gamma_C$ . При этом  $p^* = D^{-1}(\sum_{a \in A} v^{a*})$  — цена в равновесии Курно.

Условием первого порядка для равновесия по Нэшу является

$$v^{a*} \in (p^* - C^{a'}(v^{a*})) |D'(p^*)|, \text{ для любого } a, \text{ такого что } C^{a'}(0) < p^*, \quad (3.1)$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p^*, \quad (3.2)$$

где в точках разрыва  $C^{a'}(v) = [C_-^{a'}(v), C_+^{a'}(v)]$ .

Набор  $(p^*, v^{a*}, a \in A)$  называется локальным равновесием Курно, если удовлетворяет условиям (3.1), (3.2). Функция предложения Курно  $S_C^a$  [5] производителя  $a$  при  $p > 0$  определяется как решение системы (3.1)-(3.2). Если функция спроса является вогнутой в области, где она положительна, то функция предложения Курно не убывает в этой области.

Практический интерес представляет случай, когда предельные издержки являются ступенчатой функцией:  $C^a(0) = 0$ ,  $C^{a'}(v) = c_i^a$  для  $v \in (V_{i-1}^a, V_i^a)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $V_0^a = 0$ ,  $V_m^a = V^a$ ,  $m$  — количество ступеней в функции предельных издержек. Тогда в случае линейной функции спроса  $D(p) = \max\{0, \bar{D} - dp\}$  функция предложения Курно принимает вид:

$$S_C^a(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } p < c_1^a; \\ (p - c_1^a)d, & \text{если } (p - c_1^a)d \leq V_1^a; \\ V_1^a, & \text{если } (p - c_2^a)d < V_1^a < (p - c_1^a)d; \\ (p - c_1^a)d, & \text{если } V_1^a \leq (p - c_2^a)d \leq V_2^a; \\ V_2^a, & \text{если } (p - c_3^a)d < V_2^a < (p - c_2^a)d; \\ \dots & \\ V^a, & \text{если } (p - c_n^a)d > V^a. \end{cases} \quad (3.3)$$

Цена Курно  $p^*$  определяется из уравнения  $\sum_{a \in A} S_C^a(p^*) = D(p^*)$ .

В [9] установлены следующие условия существования единственного равновесия Нэша для модели Курно. Пусть для некоторого  $M > 0$  функция спроса  $D(p)$  положительна и эластичность спроса  $e(p) \stackrel{\text{def}}{=} -pD'(p)/D(p)$  возрастает при  $p \in (\tilde{p}, M)$ , где  $\tilde{p}$  — цена Вальраса;  $D(p) = 0$  при  $p \geq M$ . Тогда существует единственное равновесие Курно. Напомним, что вектор  $(\tilde{v}^a, a \in A)$  объемов производства — равновесие Вальраса и  $\tilde{p}$  — цена Вальраса, если для любого  $a$   $\tilde{v}^a \in S^a(\tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Argmax}_{v^a} (v^a \tilde{p} - C^a(v^a))$ ,  $\sum_{a \in A} \tilde{v}^a = D(\tilde{p})$ .

Далее рассмотрим модель Курно для двухузлового рынка и приведем необходимые условия для равновесий разных типов, следуя [1, с. 46–47]. Как и прежде, стратегией производителя  $a$  является его объем производства  $v^a \in [0, V^a]$ . Пусть  $\vec{v}_i = (v^a, a \in A_i)$  — набор стратегий производителей на рынке  $i$ . Тогда цены на изолированных рынках  $p_i^0$  определяются следующим образом:  $p_i^0(\vec{v}_i) = D_i^{-1}(\sum_{a \in A_i} v^a)$ ,  $i = 1, 2$ . В равновесии типа  $A$  перемещения товара с одного рынка на другой не происходит и на рынках устанавливаются цены  $p_1^*$  и  $p_2^*$ , такие что  $\lambda^{-1} < p_2^*/p_1^* < \lambda$ . Условия первого порядка для равновесия этого типа такие же, как для изолированных рынков:

$$v^{a*} \in (p_i^* - C^{a'}(v^{a*}))|D_i'(p_i^*)|, \text{ для любого } a \in A_i \text{ такого,}$$

$$\text{что } C^{a'}(0) < p_i^*, i = 1, 2, \quad (3.4)$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_i^*. \quad (3.5)$$

Обозначим для  $i$ -го изолированного рынка  $S_{iC}^a(p)$  функцию предложения Курно производителя  $a \in A_i$ , определяемую как решение

системы (3.4)-(3.5), а  $S_{iC}(p) = \sum_{a \in A_i} S_{iC}^a(p)$  – суммарную функцию предложения Курно рынка  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Равновесные цены  $p_i^*$  определяются из баланса спроса и предложения:  $S_{iC}(p_i^*) = D_i(p_i^*)$ ,  $i = 1, 2$ .

В равновесии типа  $B_{1-2}$  происходит перемещение товара с первого рынка на второй, причем  $q \in (0, Q)$  и  $\lambda p_1^* = p_2^*$ . Спрос для производителей на первом рынке при малом изменении цены равен

$$D_1(p_1) + \lambda(D_2(\lambda p_1) - \sum_{a \in A_2} v^a).$$

Поэтому на первом рынке установится цена  $p_1^b$ , такая что

$$\sum_{a \in A_1} v^a = D_1(p_1^b) + \lambda(D_2(\lambda p_1^b) - \sum_{a \in A_2} v^a). \quad (3.6)$$

В равновесии для производителей  $a \in A_1$  выполнены следующие условия первого порядка

$$v^{a*} \in (p_1^{*b} - C^{a'}(v^{a*})) |D_1'(p_1^{*b}) + \lambda^2 D_2'(\lambda p_1^{*b})|, \text{ если } C^{a'}(0) < p_i^{*b}, \quad (3.7)$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_i^{*b}. \quad (3.8)$$

По аналогии с изолированным рынком условия (3.7)-(3.8) задают отображение  $S_{1C_{1-2}}^a(p)$ , определяющее для производителя  $a \in A_1$  оптимальный объем в зависимости от цены при объединенном рынке. Назовем это отображение функцией предложения Курно при объединенном рынке для производителя с первого рынка.

Для производителей на втором рынке спрос составляет

$$D_2(\lambda p_1) + 1/\lambda(D_1(p_1) - \sum_{a \in A_1} v^a).$$

Условия первого порядка записываются следующим образом:

$$v^{a*} \in (\lambda p_1^{*b} - C^{a'}(v^{a*})) |D_2'(\lambda p_1^{*b}) + D_1'(p_1^{*b})/\lambda^2|, \text{ если } C^{a'}(0) < p_i^{*b}, \quad (3.9)$$

$$v^{a*} = 0 \text{ при } C^{a'}(0) \geq p_i^{*b} \quad (3.10)$$

и аналогично задают отображение  $S_{2C_{1-2}}^a(p)$  – функцию предложения Курно при объединенном рынке для производителя со второго рынка. Обозначим  $S_{iC_{1-2}}(p) = \sum_{a \in A_i} S_{iC_{1-2}}^a(p)$ ,  $i = 1, 2$ . Равновесная

цена определяется из (3.6) с заменой  $v^a$ ,  $a \in A_i$ , на соответствующие функции предложения Курно при объединенном рынке.

Равновесие типа  $B_{2-1}$  определяется симметричным образом.

В равновесии типа  $C_{1-2}$  происходит перемещение товара из первого узла во второй, причем  $q = Q$  и  $\lambda p_1^* < p_2^*$ . На каждом рынке в равновесии предложение балансирует спрос:

$$\sum_{a \in A_1} v^{a*} = D_1(p_1^{*c}) + Q, \quad (3.11)$$

$$\sum_{a \in A_2} v^{a*} = D_2(p_2^{*c}) - \lambda^{-1}Q. \quad (3.12)$$

Условия первого порядка для равновесия этого типа совпадают с (3.4), (3.5), поэтому для нахождения  $p_i^{*c}$  необходимо в (3.11) и (3.12) заменить  $v^{a*}$  на  $S_{iC}^a(p_i^{*c})$ .

Равновесие типа  $C_{2-1}$  определяется симметричным образом.

В работе [7] определен еще один тип равновесия —  $D$ , при котором  $q = Q$  и  $\lambda p_1^* = p_2^*$ . Условие первого порядка для производителей на первом рынке:

$$(p_1^* - C_-^{a'}(v^{a*}))|D_1'(p_1^*) + \lambda^2 D_2'(\lambda p_1^*)| \geq v^{a*} \geq (p_1^* - C_+^{a'}(v^{a*}))|D_1'(p_1^*)|.$$

Условие первого порядка для производителей на втором рынке:

$$(\lambda p_1^* - C_-^{a'}(v^{a*}))|D_2'(\lambda p_1^*)| \geq v^{a*} \geq (\lambda p_1^* - C_+^{a'}(v^{a*}))|D_2'(\lambda p_1^*) + D_1'(p_1^*)/\lambda^2|.$$

Такое соотношение может выполняться, только если  $D_1'(p_1^*) = 0$  или если  $v^{a*}$  — точка скачка функции предельных затрат.

*Замечание 3.1.* Указанные выше условия первого порядка являются необходимыми, но не достаточными. В отличие от случая локального рынка даже вогнутость функций спроса на обоих рынках вместе с выполнением условий первого порядка не обеспечивает того, что игрок не может выиграть путем большого отклонения. Необходимые и достаточные условия равновесия получены в [1].

В [8] получены следующие результаты о несовместимости некоторых типов равновесий. Пусть  $p_i^{*0}$  — цены Курно для изолированных рынков, которые определяются из условий:  $S_{iC}(p_i^{*0}) = D_i(p_i^{*0})$ ,

$i = 1, 2$ . Тогда если  $\lambda^{-1} < p_2^{*0}/p_1^{*0} < \lambda$ , то для любого  $Q > 0$  существует равновесие типа  $A$ , в то время как равновесие типа  $C$  не существует. Если  $p_1^{*0} > \lambda p_2^{*0}$ , то для любого  $Q > 0$  равновесия типов  $A$  и  $C_{1-2}$  не существуют. Если  $\lambda p_1^{*0} < p_2^{*0}$ , то для любого  $Q > 0$  равновесия типов  $A$  и  $C_{2-1}$  не существуют.

Ниже мы уточняем эти результаты. Пусть  $\Delta_{ij}^1(\lambda, p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{1C_{i-j}}(p) - D_1(p)$  – разность функции предложения Курно первого рынка при перетоке из узла  $i$  в узел  $j$  в условиях объединенного рынка и функции спроса на первом рынке. Аналогично,  $\Delta_{ij}^2(\lambda, p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{2C_{i-j}}(p) - D_2(p)$ . Обозначим  $\Delta_{ij}^1(1, p) = \Delta_{ji}^1(1, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^1(p)$  и  $\Delta_{ij}^2(1, p) = \Delta_{ji}^2(1, p) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^2(p)$ . Пусть цены  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  определяются из условий:  $\Delta^i(\bar{p}_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Отметим, что если  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ , то при  $\lambda = 1$  существует единственное равновесие типа  $B$  с ценой  $p^{*b}$ , для которой  $\Delta^1(p^{*b}) = -\Delta^2(p^{*b})$  (см. рис.1).

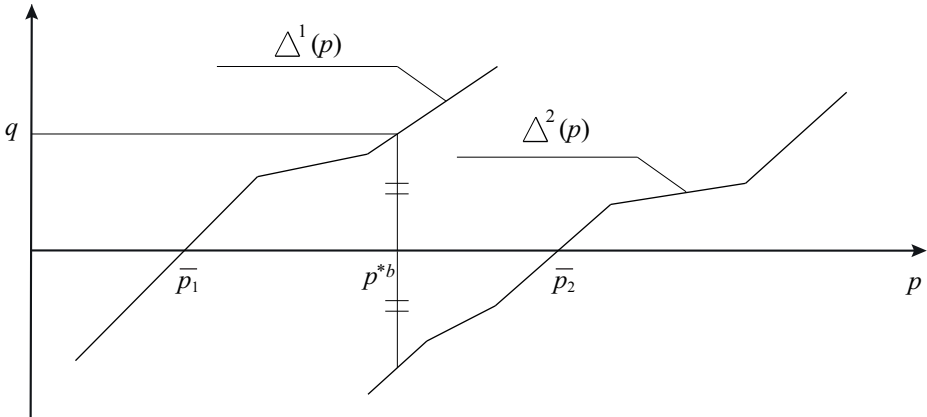


Рисунок 1. Равновесие типа  $B_{1-2}$  при  $\lambda = 1$

**Теорема 3.1.** Пусть  $D_i(p) > 0$  и  $D'_i(p)$  не возрастает при  $p \in (0, M_i)$ ;  $D_i(p) = 0$  при  $p \geq M_i$ ,  $i = 1, 2$ .

а) Если для некоторого  $\tilde{Q}$  существует равновесие типа  $B_{1-2}$ , то равновесие типа  $D_{1-2}$  не существует для  $Q = \tilde{Q}$ .

б) Если  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2 < M_2 < M_1$ , то при значениях  $\lambda$ , достаточно близких к единице, равновесия типов  $B_{2-1}$  и  $D_{2-1}$  не существуют



для любого  $Q > 0$ , а равновесие типа  $B_{1-2}$  существует при  $Q > \bar{Q}$ ,

$$\bar{Q} = S_{1C_{1-2}}(p_1^{*b}) - D_1(p_1^{*b}), \quad (3.13)$$

где равновесная цена на первом рынке  $p_1^{*b}$  определяется из (3.6)–(3.10).

*Доказательство.* а) От противного, предположим, что равновесие типа  $D_{1-2}$  с узловыми ценами  $p_i^{*d}$  существует. По определению равновесия типа  $D_{1-2}$  справедливо  $S_{1C_{1-2}}(p_1^{*d}) \geq D_1(p_1^{*d}) + \tilde{Q}$  и  $D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}\tilde{Q} \geq S_{2C_{1-2}}(p_2^{*d})$ . Из первого неравенства имеем  $p_1^{*d} > p_1^{*b}$ , из второго  $p_2^{*d} < p_2^{*b}$ , что противоречит  $\lambda p_1^{*d} = p_2^{*d}$ .

б) Для существования равновесий типов  $B_{2-1}$  и  $D_{2-1}$  необходимо, чтобы для некоторого  $p_2^*$  были выполнены неравенства:

$$\Delta_{21}^1(\lambda, \lambda p_2^*) < 0, \quad \Delta_{21}^2(\lambda, p_2^*) > 0. \quad (3.14)$$

Сначала рассмотрим случай, когда  $\lambda = 1$  и покажем, что равновесия типов  $B_{2-1}$  и  $D_{2-1}$  не существуют. От противного, пусть (3.14) выполнены для некоторого  $p^*$  при  $\lambda = 1$ , то есть  $\Delta^1(p^*) < 0$  и  $\Delta^2(p^*) > 0$ . Так как по определению  $\Delta^i(\bar{p}_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , то в силу монотонности функций  $\Delta^i(p^*)$ ,  $i = 1, 2$  из первого неравенства следует, что  $p^* < \bar{p}_1$ , а из второго, что  $p^* > \bar{p}_2$ . Из этих соотношений получим  $\bar{p}_1 > \bar{p}_2$ , что противоречит условию  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ .

Если мы предположим, что неравенства (3.14) справедливы при значениях  $\lambda$ , достаточно близких к единице, то в силу непрерывной зависимости функций  $\Delta_{21}^i(\lambda, p)$ ,  $i = 1, 2$ , от  $\lambda$  эти соотношения будут справедливы и при  $\lambda = 1$ . Однако выше уже показано, что это невозможно. Следовательно, при значениях  $\lambda$ , достаточно близких к единице, равновесия типов  $B_{2-1}$  и  $D_{2-1}$  также не существуют.

Покажем, что при  $Q > \bar{Q}$  существует равновесие типа  $B_{1-2}$ . Пусть  $\bar{p}_i(\lambda)$  определяются из условий  $\Delta_{12}^i(\lambda, p) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда в силу свойств функций  $\Delta_{12}^i(\lambda, p)$ , при значениях  $\lambda$ , достаточно близких к единице, справедливо  $\lambda \bar{p}_1(\lambda) < \bar{p}_2(\lambda) < M_2$ .

Из (3.6)–(3.10) получим следующее соотношение для равновесной цены  $p_1^{*b}$ :

$$S_{1C_{1-2}}(p_1^{*b}) + \lambda S_{2C_{1-2}}(\lambda p_1^{*b}) \ni D_1(p_1^{*b}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*b}). \quad (3.15)$$

Так как при  $p_1^b = \bar{p}_1(\lambda)$  левая часть (3.15) меньше правой, а при  $p_1^b = \lambda^{-1}\bar{p}_2(\lambda)$  больше, то из теоремы о промежуточном значении замкнутого отображения и монотонности  $D_i(p)$ ,  $S_{iC_{1-2}}(p)$  при  $p < M_2$  следует, что существует единственное решение (3.15)  $p_1^{*b}$ :  $\bar{p}_1(\lambda) < p_1^{*b} < \lambda^{-1}\bar{p}_2(\lambda)$ . Тогда величина потока равна  $\bar{Q}$ , которое определяется согласно (3.13),  $\bar{Q} > 0$ , и при  $Q > \bar{Q}$  существует равновесие типа  $B_{1-2}$ .  $\square$

*Замечание 3.2.* Отметим, что в вырожденном случае, когда  $\bar{p}_1 = \bar{p}_2$ , возможно сосуществование равновесий с противоположным направлением потоков. Рассмотрим два симметричных рынка с  $D_i(p) = \bar{D} - dp$ ,  $i = 1, 2$ , ограничения на производство и передачу несущественны. На каждом из рынков присутствует  $n$  фирм с предельными издержками  $c$ . В этом случае  $S_{1C_{1-2}}(p) = S_{2C_{2-1}}(p) = nd(p-c)(1+\lambda^2)$ ,  $S_{2C_{1-2}}(p) = S_{1C_{2-1}}(p) = nd(p-c)(1+1/\lambda^2)$ . Используя эти функции, а также соотношения (3.6–3.10), получим следующее выражение для определения цены в равновесии  $B_{1-2}$ :

$$p_1^{*b} = \frac{(1+\lambda)\bar{D} + (\lambda^2 + \lambda + 1 + \lambda^{-1})ndc}{d(1+\lambda^2)(2n+1)}.$$

В частности, если  $\bar{D} = 40$ ,  $c = 1$ ,  $n = 4$ ,  $d = 1$ ,  $\lambda = 1,25$  то  $p_1^{*b} \approx 4,7$  и величина потока  $q = S_{1C_{1-2}}(p_1^{*b}) - D(p_1^{*b}) \approx 2,6$ . В силу симметрии в равновесии типа  $B_{2-1}$  равновесная цена и величина потока рассчитываются так же, как в равновесии типа  $B_{1-2}$ .

Далее установим, как зависит тип равновесия от пропускной способности  $Q$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $D_i(p) > 0$  и  $D'_i(p)$  не возрастает при  $p \in (0, M_i)$ ;  $D_i(p) = 0$  при  $p \geq M_i$ ,  $i = 1, 2$ , причем значения  $p_1^{*0}$ ,  $p_2^{*0}$ ,  $\bar{p}_1$ ,  $\bar{p}_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  удовлетворяют условиям  $p_1^{*0} < p_2^{*0} < M_2 < M_1$ ,  $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ . Тогда при значениях  $\lambda$ , достаточно близких к единице, для любого  $Q > 0$  существует не более одного равновесия, причем существует значение  $\underline{Q} \in (0, \bar{Q})$ , где  $\bar{Q}$  определяется согласно (3.13), такое что при  $Q \in (0, \underline{Q})$  существует равновесие типа  $C_{1-2}$ ; при  $Q \in (\underline{Q}, \bar{Q})$ , возможно лишь равновесие типа  $D_{1-2}$ ; если  $Q > \bar{Q}$ , существует равновесие типа  $B_{1-2}$ .

*Доказательство.* Найдем значение пропускной способности  $\underline{Q}$ , при котором выполнено (3.11)–(3.12), (3.4)–(3.5) и  $\lambda p_1^{*c} = p_2^{*c}$ . Используя (3.11)–(3.12), (3.4)–(3.5), получим условие

$$S_{1C}(p_1^{*c}) + \lambda S_{2C}(\lambda p_1^{*c}) \ni D_1(p_1^{*c}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*c}) \quad (3.16)$$

Покажем, что для (3.16) существует решение  $\widehat{p}_1^{*c}$ . Так как  $p_1^{*0} < M_2$ , то  $S_{1C}(M_2) > D_1(M_2)$ . Тогда с учетом того, что  $D_2(\lambda M_2) = 0$ , справедливо  $S_{1C}(M_2) + \lambda S_{2C}(\lambda M_2) > D_1(M_2) + \lambda D_2(\lambda M_2)$ . Левая часть (3.16) не убывает при  $p_1^{*c} \in (0, M_2 \lambda^{-1})$ , положительна при  $C^{a'}(0) < p_1^{*c} < M_1$ , обращается в ноль при  $p_1^{*c} = 0$ . Правая часть (3.16) убывает и неотрицательна. Следовательно, существует решение  $\widehat{p}_1^{*c} < M_2 \lambda^{-1}$ . Тогда  $\underline{Q} = S_{1C}(\widehat{p}_1^{*c}) - D_1(\widehat{p}_1^{*c})$ .

Покажем, что  $0 < \underline{Q} < \overline{Q}$ . Так как выполнено  $p_2^{*0} > \lambda p_1^{*0}$ , то в силу монотонности  $S_{2C}(\lambda p_1^{*0}) - D_2(\lambda p_1^{*0}) < S_{2C}(p_2^{*0}) - D_2(p_2^{*0}) = 0$ . Тогда, учитывая, что  $S_{1C}(p_1^{*0}) = D_1(p_1^{*0})$ , получим  $S_{1C}(p_1^{*0}) + \lambda S_{2C}(\lambda p_1^{*0}) < D_1(p_1^{*0}) + \lambda D_2(\lambda p_1^{*0})$ . Следовательно,  $\widehat{p}_1^{*c} > p_1^{*0}$  и  $\underline{Q} > 0$ .

Из  $S_{iC_{1-2}}(p) > S_i(p)$ ,  $i = 1, 2$ , (3.15–3.16) следует, что  $\widehat{p}_1^{*c} \geq p_1^{*b}$ . Тогда с учетом того, что  $\lambda \widehat{p}_1^{*c} < M_2$ , получим  $\lambda p_1^{*b} < M_2$  и  $S_{2C}(\lambda p_1^{*b}) \leq S_{2C}(\lambda \widehat{p}_1^{*c}) \leq S_{2C_{1-2}}(\lambda \widehat{p}_1^{*c})$ . От противного, допустим, что  $\underline{Q} > \overline{Q}$ . Тогда  $S_{2C_{1-2}}(\lambda \widehat{p}_1^{*c}) \geq S_{2C}(\lambda p_1^{*b}) = D_2(\lambda p_1^{*b}) - \lambda^{-1} \overline{Q} > D_2(\lambda p_1^{*b}) - \lambda^{-1} \underline{Q} \geq D_2(\lambda \widehat{p}_1^{*c}) - \lambda^{-1} \underline{Q}$ , что противоречит определению  $\underline{Q}$ .

Покажем, что при  $Q < \overline{Q}$  не существует равновесия типа  $B_{1-2}$ . От противного, пусть  $q \in (0, Q)$ ,  $\lambda p_1^* = p_2^*$  и справедливо (3.6)–(3.10). Величина потока  $q$  определяется так же, как  $\overline{Q}$ . Противоречие с  $q \in (0, Q)$ . Таким образом, при  $Q < \overline{Q}$   $q = Q$ . При  $Q > \overline{Q}$  равновесие типа  $B_{1-2}$  существует в силу теоремы 3.1.

Далее рассмотрим функции  $p_1(Q)$  и  $p_2(Q)$ , которые определяются из условий:  $D_1(p_1) + Q = S_{1C}(p_1)$  и  $D_2(p_2) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2)$ , и докажем, что они монотонны. По теореме о неявно заданной функции справедливо

$$p_1'(Q) = \frac{1}{S'_{1C}(p_1) - D'_1(p_1)} \geq 0, \quad (3.17)$$

$$p_2'(Q) = \frac{\lambda^{-1}}{D'_2(p_2) - S'_{2C}(p_2)} \leq 0. \quad (3.18)$$

Следовательно,  $p_1(Q)$  не убывает, а  $p_2(Q)$  не возрастает. Докажем, что при  $Q > \underline{Q}$  не существует равновесия типа  $C_{1-2}$ . От противного,

допустим, что  $q = Q$  и  $\lambda p_1(Q) < p_2(Q)$ . Так как  $Q > \underline{Q}$ ,  $\lambda p_1(Q) = p_2(Q)$  и функции  $p_i(Q)$  монотонны, то это невозможно. При  $Q < \underline{Q}$  в силу монотонности функций  $p_i(Q)$  справедливо  $\lambda p_1(Q) < p_2(Q)$ , следовательно, равновесие типа  $C_{1-2}$  существует.

Итак, при  $Q \in (\underline{Q}, \bar{Q})$   $q = Q$  и  $\lambda p_1^* = p_2^*$ , что соответствует равновесию типа  $D$ .  $\square$

#### 4. Задача максимизации общественного благосостояния

Далее в предположениях теоремы 3.2 исследуем зависимость общественного благосостояния от пропускной способности системы перемещения товара (СПТ) при  $Q < \underline{Q}$ , то есть для равновесия типа  $C$ . Общественное благосостояние представляет собой суммарный выигрыш участников рынка и состоит из следующих компонент:

$$W(Q) = P_1(Q) + P_2(Q) + CS_1(Q) + CS_2(Q) + T(Q),$$

где  $P_i(Q)$  – прибыль производителей на рынке  $i$ ,  $CS_i(Q)$  – выигрыш потребителей на рынке  $i$ ,  $T(Q)$  – прибыль транспортной системы. Прибыль производителей на  $i$ -ом рынке составляет

$$P_i(Q) = \sum_{a \in A_i} \left( p_i(Q) S_{iC}^a(p_i(Q)) - C^a(S_{iC}^a(p_i(Q))) \right).$$

Функция спроса отражает полезность товара для потребителей, и выигрыш потребителей на  $i$ -ом рынке по определению рассчитывается как  $CS_i(Q) = \int_{p_i(Q)}^{\infty} D_i(p) dp$ . Транспортная система покупает объем  $Q$  по цене  $p_1(Q)$  и продает объем  $\lambda^{-1}Q$  по цене  $p_2(Q)$ , поэтому ее прибыль составляет  $T(Q) = Q(p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q))$ . Таким образом, функция общественного благосостояния принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} W(Q) &= Q(p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q)) + \int_{p_1(Q)}^{\infty} D_1(p) dp + \int_{p_2(Q)}^{\infty} D_2(p) dp + \\ &+ (p_1(Q) \sum_{a \in A_1} S_{1C}^a(p_1(Q)) - \sum_{a \in A_1} C^a(S_{1C}^a(p_1(Q)))) + \\ &+ (p_2(Q) \sum_{a \in A_2} S_{2C}^a(p_2(Q)) - \sum_{a \in A_2} C^a(S_{2C}^a(p_2(Q))))). \end{aligned}$$

**Лемма 4.1.** Пусть функция спроса дважды дифференцируема в области, где она положительна. Тогда при  $Q \in (0, Q)$  всюду, за исключением точек разрыва функций  $S_{iC}^{a'}(p_i(Q))$ ,  $a \in A_1 \cup A_2$ , справедливо

$$W'(Q) = p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + p_1'(Q) \cdot \sum_{a \in A_1} \frac{S_{1C}^a(p_1(Q))S_{1C}^{a'}(p_1(Q))}{|D_1'(p_1(Q))|} +$$

$$+ p_2'(Q) \cdot \sum_{a \in A_2} \frac{S_{2C}^a(p_2(Q))S_{2C}^{a'}(p_2(Q))}{|D_2'(p_2(Q))|}, \quad (4.1)$$

где  $p_1'(Q)$ ,  $p_2'(Q)$  определены согласно (3.16), (3.17) и

$$S_{iC}^{a'}(p) = \frac{|D_i'(p)| - (p - C^{a'}(S_{iC}^a(p)))D_i''(p)}{1 + C^{a''}(S_{iC}^a(p))|D_i'(p)|}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим производную функции прибыли производителей на  $i$ -ом рынке:

$$P_i'(Q) = \left( p_i(Q) \sum_{a \in A_i} S_{iC}^a(p_i(Q)) - \sum_{a \in A_i} C^a(S_{iC}^a(p_i(Q))) \right)' =$$

$$= p_i'(Q) \cdot \left( \sum_{a \in A_i} S_{iC}^a(p_i(Q)) + p_i(Q) \sum_{a \in A_i} S_{iC}^{a'}(p_i(Q)) - \right.$$

$$\left. - \sum_{a \in A_i} C^{a'}(S_{iC}^a(p_i(Q)))S_{iC}^{a'}(p_i(Q)) \right),$$

всюду, за исключением точек разрыва функции  $S_{iC}^{a'}(p_i(Q))$ .

Введем обозначение  $\overline{A}_i(p) = \{a \in A_i | S_{iC}^a(p) = (p - C^{a'}(S_{iC}^a(p)))|D_i'(p)|\}$ ,  $i = 1, 2$ . Так как  $S_{iC}^{a'}(p) = 0$  при  $a \notin \overline{A}_i(p)$ , то

$$P_i'(Q) = p_i'(Q) \cdot \left( \sum_{a \in A_i} S_{iC}^a(p_i(Q)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{a \in \overline{A}_i(p_i(Q))} (p_i(Q) - C^{a'}(S_{iC}^a(p_i(Q))))S_{iC}^{a'}(p_i(Q)) \right).$$

Для  $a \in \overline{A}_i(p)$  значение  $S_{iC}^a(p)$  определяется из соотношения

$$F(S_{iC}^a, p) \stackrel{\text{def}}{=} S_{iC}^a + (p - C^{a'}(S_{iC}^a))D_i'(p) = 0.$$

Тогда по теореме о неявно заданной функции

$$S_{iC}^{a'}(p) = -\frac{\partial F(S_{iC}, p)}{\partial p} / \frac{\partial F(S_{iC}, p)}{\partial S_{iC}} =$$

$$= \frac{|D_i'(p)| - (p - C^{a'}(S_{iC}^a(p)))D_i''(p)}{1 + C^{a''}(S_{iC}^a(p))|D_i'(p)|}. \quad (4.2)$$

Так как для  $a \in \overline{A_i}(p)$  выполнено

$$p_i(Q) - C^{a'}(S_{iC}^a(p)) = \frac{S_{iC}^a(p)}{|D'_i(p)|}$$

и  $S_{iC}^{a'}(p) = 0$  при  $a \notin \overline{A_i}(p)$ , то для производной функции прибыли производителей на  $i$ -ом рынке получим следующее выражение:

$$P'_i(Q) = p'_i(Q) \cdot \left( \sum_{a \in A_i} S_{iC}^a(p_i(Q)) + \sum_{a \in A_i} \frac{S_{iC}^a(p_i(Q)) S_{iC}^{a'}(p_i(Q))}{|D'_i(p_i(Q))|} \right), \quad (4.3)$$

где  $S_{iC}^{a'}(p)$  определено согласно (4.2).

Тогда для производной функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ по теореме о дифференцировании интеграла с переменным пределом всюду, за исключением точек разрыва функции  $S_{iC}^{a'}(p_i(Q))$ , справедливо

$$\begin{aligned} W'(Q) &= p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) - p'_2(Q) \cdot (D_2(p_2(Q)) - \lambda^{-1}Q) - \\ &\quad - p'_1(Q) \cdot (D_1(p_1(Q)) + Q) + \\ &\quad + p'_1(Q) \cdot (S_{1C}(p_1(Q)) + \sum_{a \in A_1} \frac{S_{1C}^a(p_1(Q)) S_{1C}^{a'}(p_1(Q))}{|D'_1(p_1(Q))|}) + \\ &\quad + p'_2(Q) \cdot (S_{2C}(p_2(Q)) + \sum_{a \in A_2} \frac{S_{2C}^a(p_2(Q)) S_{2C}^{a'}(p_2(Q))}{|D'_2(p_2(Q))|}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Учитывая, что  $D_1(p_1(Q)) + Q = S_{1C}(p_1(Q))$  и  $D_2(p_2(Q)) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2(Q))$ , из (4.4) получим представление (4.1).  $\square$

Определим, как с ростом пропускной способности СПТ меняются отдельные компоненты функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ. Так как  $p_1(Q)$  возрастает, а  $p_2(Q)$  убывает по  $Q$ , то с увеличением пропускной способности выигрыш потребителей на первом рынке сокращается, а на втором – растет. Если функция спроса вогнута в области, где она положительна, то функция предложения Курно не убывает в этой области и из (4.3) следует, что  $P'_1(Q) > 0$  и  $P'_2(Q) < 0$ . Таким образом, прибыль производителей на первом рынке возрастает по  $Q$ , а прибыль производителей на втором рынке убывает.

Рассмотрим отдельно случай, когда на втором рынке нет эффективных производителей, то есть когда  $D_2(p_2^{*0}) = 0$ . Тогда  $D_2(p_2(Q)) -$

$-\lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2(Q)) = 0$  и выражение для производной функции общественного благосостояния всюду, за исключением точек разрыва функции  $S_{1C}^{a'}(p_1(Q))$ , принимает вид

$$W'(Q) = p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + p_1'(Q) \cdot \sum_{a \in A_1} \frac{S_{1C}^a(p_1(Q))S_{1C}^{a'}(p_1(Q))}{|D_1'(p_1(Q))|}.$$

Так как  $p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) \geq 0$ ,  $p_1'(Q) > 0$ , следовательно, если функция спроса вогнута в области, где она положительна, то функция общественного благосостояния не убывает.

**Лемма 4.2.** Пусть  $D_i(p) = \max\{\widehat{D}_i - d_i p, 0\}$ ,  $i = 1, 2$ , а предельные издержки кусочно-постоянны:  $C^a(0) = 0$ ,  $C^{a'}(v) = c_k^a$  для  $v \in (V_{k-1}^a, V_k^a)$ ,  $k \in \overline{1, m_a}$ ,  $V_0^a = 0$ ,  $V_{m_a}^a = V^a$ ,  $m_a$  – количество ступеней в функции предельных издержек производителя  $a \in A_i$ . Тогда при  $Q \in (0, \underline{Q})$  всюду, за исключением точек разрыва функции  $S_{iC}^{a'}(p_i(Q))$ , справедливо

$$\begin{aligned} W'(Q) = & p_2(Q)\lambda^{-1} - p_1(Q) + \\ & + \frac{1}{d_1(|A_1(p_1(Q))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_1}(p_1(Q))} S_{1C}^a(p_1(Q)) - \\ & - \frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_2}(p_2(Q))} S_{2C}^a(p_2(Q)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

*Доказательство.* Из (3.3) следует, что для рассматриваемого случая  $S_{iC}^{a'}(p) = d_i$  при  $a \in \overline{A_i}(p)$ . Тогда из (4.1), (3.16) и (3.17) получим (4.5).  $\square$

Далее продолжим анализ свойств функции общественного благосостояния в предположениях леммы 4.2. Рассмотрим точки излома функций предложения Курно для  $i$ -ого рынка:  $V_l^a/d_i + c_l^a$ ,  $l = \overline{1, m_a}$  и  $V_j^a/d_j + c_{j+1}^a$ ,  $j = \overline{1, m_a-1}$ ,  $a \in A_i$ . Пусть  $T_1$  – множество, включающее  $p_1^{*0}$ ,  $\widehat{p}_1^{*c}$  и все точки изломов всех функций предложения Курно для 1-ого рынка, которые больше  $p_1^{*0}$  и меньше  $\widehat{p}_1^{*c}$ ; аналогично  $T_2$  – множество, включающее  $p_2^{*0}$ ,  $\lambda \widehat{p}_1^{*c}$  и все точки изломов всех функций предложения Курно для 2-ого рынка, которые больше  $\lambda \widehat{p}_1^{*c}$  и меньше  $p_2^{*0}$ . Обозначим  $s_i \stackrel{\text{def}}{=} |T_i|$ . Упорядочим элементы  $t_{f_i}^i$  множества  $T_i$ ,  $f_i = \overline{1, s_i}$  в порядке возрастания (см. рис. 2).

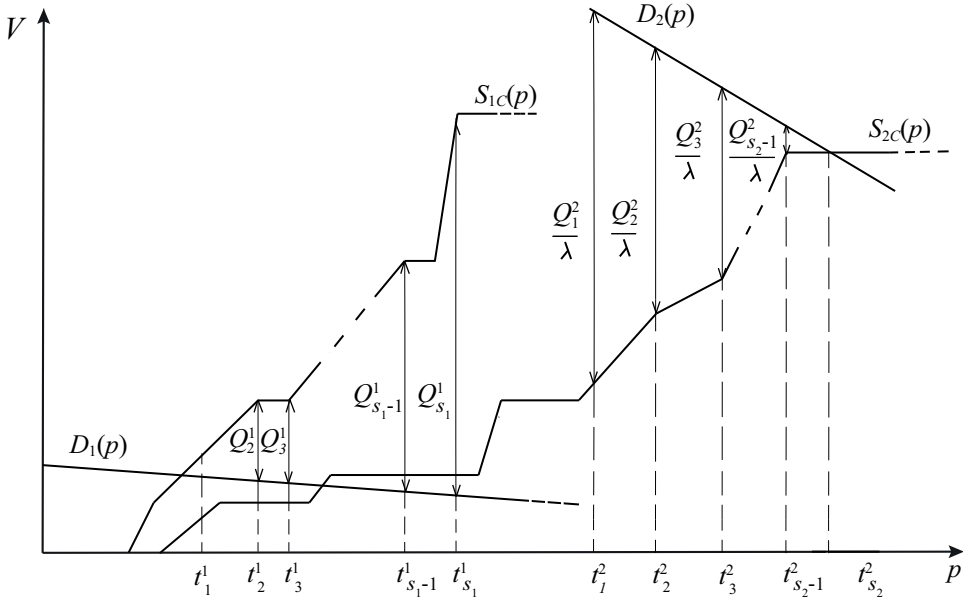


Рисунок 2. Элементы  $t_{f_i}^i$  множеств  $T_i$ ,  $i = 1, 2$ , и величины  $Q_{f_i}^i$

При  $p_i \in (t_{f_i}^i, t_{f_{i+1}}^i)$ ,  $f_i = \overline{1, s_i - 1}$  множество  $\overline{A_i}(p_i)$ ,  $i = 1, 2$  неизменно и для  $a \in \overline{A_i}$  существует такое  $r_a$ , что  $S_{iC}^a(p) = d_i(p - c_{r_a}^a)$ . Обозначим  $W^a \stackrel{\text{def}}{=} S_{iC}^a(p)$  для  $a \notin \overline{A_i}$ ;  $k_f^i \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{A_i}|$ ,  $g_{f_i}^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in \overline{A_i}} d_i c_{r_a}^a$ ,  $b_{f_i}^i \stackrel{\text{def}}{=} g_{f_i}^i - \sum_{a \in A \setminus \overline{A_i}} W^a$ ,  $Q_{f_i}^1 \stackrel{\text{def}}{=} S_{1C}(t_{f_i}^1) - D_1(t_{f_i}^1)$ ,  $Q_{f_i}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(D_2(t_{f_i}^2) - S_{2C}(t_{f_i}^2))$  (см. рис. 2). Рассмотрим множество  $SQ$ , состоящее из всех точек  $Q_{f_i}^i$ ,  $f_i = \overline{1, s_i - 1}$ ,  $i = 1, 2$ . Элементы этого множества  $Q_j$  упорядочим в порядке возрастания.

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда при  $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$

$$W'(Q) = \frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2 + g_r^2(k_{f_2}^2 + 1)}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)^2} \lambda^{-1} - \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1 + g_r^1(k_{f_1}^1 + 1)}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)^2},$$



где  $f_1 \in \overline{1, s_1 - 1}$  и  $f_2 \in \overline{1, s_2 - 1}$  такие, что  $Q_{f_1}^1 < Q < Q_{f_1+1}^1$  и  $Q_{f_2+1}^2 < Q < Q_{f_2}^2$ . Кроме того, функция  $W(Q)$  вогнута на каждом из промежутков  $Q_j < Q < Q_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$ .

*Доказательство.* С учетом введенных выше обозначений при  $p_i \in (t_{f_i}^i, t_{f_i+1}^i)$ ,  $f_i = \overline{1, s_i - 1}$  общая функция предложения Курно на рынке  $i$  имеет вид:  $S_{iC}(p_i) = k_{f_i}^i d_i p_i - b_{f_i}^i$  и  $\sum_{a \in \overline{A_i}} S_{iC}(p_i) = k_{f_i}^i d_i p_i - g_{f_i}^i$ .

Следовательно,

$$p_1(Q) = \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)}, \quad p_2(Q) = \frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)}. \quad (4.6)$$

Условие  $p_1(Q) \in (t_{f_1}^1, t_{f_1+1}^1)$  равносильно  $Q_{f_1}^1 < Q < Q_{f_1+1}^1$ , где  $Q_{f_i}^1 = S_{1C}(t_{f_i}^1) - D_1(t_{f_i}^1)$ . Аналогично условие  $p_2(Q) \in (t_{f_2}^2, t_{f_2+1}^2)$  равносильно  $Q_{f_2+1}^2 < Q < Q_{f_2}^2$ , где  $Q_{f_i}^2 = \lambda(D_2(t_{f_i}^2) - S_{2C}(t_{f_i}^2))$ .

При  $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$  существуют такие  $f_1$  и  $f_2$ , что  $Q_{f_1}^1 < Q < Q_{f_1+1}^1$  и  $Q_{f_2+1}^2 < Q < Q_{f_2}^2$ , производная  $W'(Q)$  непрерывна и с учетом (4.5), (4.6) равна

$$\begin{aligned} W'(Q) &= \frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)} \lambda^{-1} - \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)} + \\ &+ \frac{1}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)} \left( k_{f_1}^1 d_1 \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)} - g_{f_1}^1 \right) - \\ &- \frac{\lambda^{-1}}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)} \left( k_{f_2}^2 d_2 \frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)} - g_{f_2}^2 \right) = \\ &= \frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2 + g_r^2(k_{f_2}^2 + 1)}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)^2} \lambda^{-1} - \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1 + g_r^1(k_{f_1}^1 + 1)}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Выражение для второй производной принимает вид

$$W''(Q) = -\frac{1}{d_2(k_{f_2}^2 + 1)^2 \lambda^2} - \frac{1}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)^2} < 0.$$

Таким образом, функция  $W(Q)$  вогнута на каждом из промежутков  $Q_j < Q < Q_{j+1}$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$ .  $\square$

Учтем при расчете общественного благосостояния затраты  $OC(Q)$ , связанные с созданием СПТ между рынками:

$$OC(Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q = 0; \\ c_f + c_v(Q), & \text{если } Q > 0, \end{cases}$$

где  $c_f > 0$  – фиксированные затраты, не зависящие от пропускной способности;  $c_v(Q)$  – переменные затраты, эта функция выпукла и монотонно возрастает по  $Q$ ,  $c_v(0) = 0$ .

Функция полного общественного благосостояния  $TW(Q)$  с учетом затрат имеет вид:  $TW(Q) = W(Q) - OC(Q)$ .

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия леммы 4.2. Тогда, если при  $Q \in (Q_j, Q_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$  существует решение  $Q^{Lj}$  уравнения

$$\frac{\widehat{D}_2 - \lambda^{-1}Q + b_{f_2}^2 + g_r^2(k_{f_2}^2 + 1)}{\lambda d_2(k_{f_2}^2 + 1)^2} - \frac{\widehat{D}_1 + Q + b_{f_1}^1 + g_r^1(k_{f_1}^1 + 1)}{d_1(k_{f_1}^1 + 1)^2} = c'_v(Q), \quad (4.7)$$

где  $f_1 \in \overline{1, s_1 - 1}$  и  $f_2 \in \overline{1, s_2 - 1}$  такие, что  $Q_{f_1}^1 < Q < Q_{f_1+1}^1$  и  $Q_{f_2+1}^2 < Q < Q_{f_2}^2$ , то  $Q^{Lj}$  является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния.

*Доказательство.* Для каждого промежутка  $(Q_j, Q_{j+1})$ ,  $j = \overline{1, |SQ|}$ , условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (4.7). Так как на каждом из таких промежутков функция  $TW(Q)$  вогнута, то если существует решение  $Q^{Lj}$  уравнения (4.7) такое, что выполнено  $Q^{Lj} \in (Q_j, Q_{j+1})$ , то  $Q^{Lj}$  является точкой локального максимума.  $\square$

Итак, мы выделили промежутки, в которых функция общественного благосостояния является гладкой и вогнутой. Покажем, что при переходе на участок с другим значением величины  $|\overline{A}_i(p_i(Q))|$  (где меняется число активных ограничений производственной мощности) по типу точки перехода нельзя определить, является она точкой максимума или нет. Выражение (4.1) для производной функции общественного благосостояния без учета затрат на создание СПТ можно записать в виде:

$$W'(Q) = -\frac{p_1 + \sum_{a \in A_1(p_1(Q))} C^{a'}(p_1(Q))}{|\overline{A}_1(p_1(Q))| + 1} + \frac{p_2 + \sum_{a \in A_2(p_2(Q))} C^{a'}(p_2(Q))}{|\overline{A}_2(p_2(Q))| + 1} \lambda^{-1}.$$

Исследуем поведение функции  $E(p)$  среднего значения цены и предельных затрат, соответствующих активным мощностям:  $E(Q) \stackrel{\text{def}}{=} (p_1 + \sum_{a \in A_1(p_1(Q))} C^{a'}(p_1(Q))) / (|\overline{A_1}(p_1(Q))| + 1)$ .

Пусть в точке  $p = p_{x1}$  становится активным ограничение, соответствующее мощности с низким значением предельных затрат  $c_{x1}$ , а в точке  $p = p_{y1}$  подключается мощность с низким значением  $c_{y1}$  (см. рис. 3). Тогда при значении  $Q$ , соответствующем  $p_{x1}$ ,  $E(Q)$  возрастает скачком, а при значении  $Q$ , соответствующем  $p_{y1}$ , скачком снижается. Если же в точке  $p = p_{x2}$  становится активным ограничение, соответствующее мощности со значением предельных затрат  $c_{x2}$ , близким к цене  $p$ , а в точке  $p = p_{y2}$  подключается мощность со значением предельных затрат  $c_{y2}$ , также близким к цене  $p$ , то при значении  $Q$ , соответствующем  $p_{x2}$ ,  $E(Q)$  снижается скачком, а при значении  $Q$ , соответствующем  $p_{y2}$ , скачком возрастает.

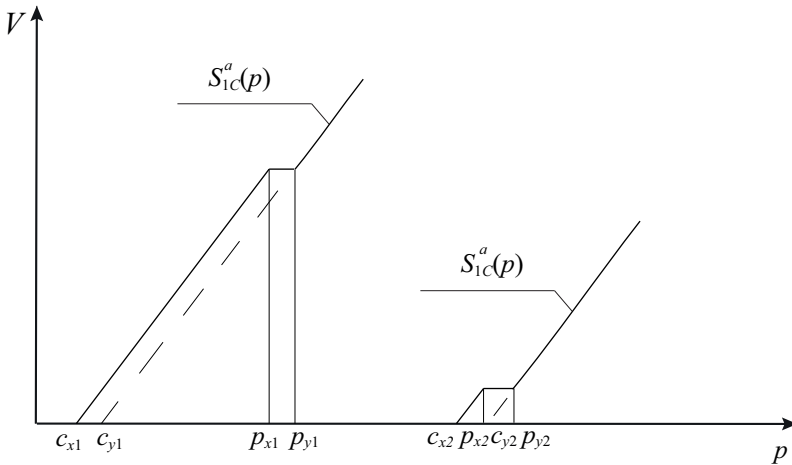


Рисунок 3. Точки, в которых меняется число активных ограничений производственной мощности

Далее в предположении, что функция спроса вогнута, исследуем поведение  $W'(Q)$  при переходе через точки, соответствующие скачкам производной функции спроса на первом рынке. Так как функция спроса вогнута, то функция предложения Курно не убывает. При переходе через точку скачка  $p_r$  происходит скачкообразный рост функ-

ции  $S_{1C}^a(p)$ . Обозначим  $Q_r^- \stackrel{\text{def}}{=} S_{1C}^-(p_r) - D(p_r)$ ,  $Q_r^+ \stackrel{\text{def}}{=} S_{1C}^+(p_r) - D(p_r)$ . Пусть при  $Q \in [Q_r^-, Q_r^+]$  нет мощностей, у которых ограничение производственной мощности становится активным. Согласно (4.5)

$$W'_-(Q_r^-) = p_2(Q_r^-)\lambda^{-1} - p_r + \frac{1}{d_1(|A_1(p_r)| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_1(p_r)}} S_{1C}^{a-}(p_r) - \\ - \frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q_r^-))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_2(p_2(Q_r^-))}} S_{2C}^a(p_2(Q_r^-)).$$

При  $Q \in [Q_r^-, Q_r^+]$  выполнено  $p_1(Q) = p_r$ , выигрыш потребителей на первом рынке неизменен. Для производной прибыли производителей на первом рынке справедливо:

$$P'_{1+}(Q_r^-) = \frac{\sum_{a \in \overline{A_1(p_r)}} (p_r - c_{ka}^a)}{|A_1(p_r)|}.$$

Следовательно,

$$W'_+(Q_r^-) = p_2(Q_r^-)\lambda^{-1} - p_r + \frac{\sum_{a \in \overline{A_1(p_r)}} (p_r - c_{ka}^a)}{|A_1(p_r)|} - \\ - \frac{\lambda^{-1}}{d_2(|A_2(p_2(Q_r^-))| + 1)} \cdot \sum_{a \in \overline{A_2(p_2(Q_r^-))}} S_{2C}^a(p_2(Q_r^-)).$$

Откуда следует, что выполнено  $W'_-(Q_r^-) < W'_+(Q_r^-)$  и  $Q = Q_r^-$  не может быть точкой максимума.

Для решения задачи об оптимальной пропускной способности СПТ между рынками построим множество  $L$  точек локального максимума функции  $TW(Q)$ . Если существует решение  $Q^{Lj}$  уравнения (4.7) такое, что выполнено  $Q^{Lj} \in (Q_j, Q_{j+1})$ , то включим  $Q^{Lj}$  в множество  $L$ , в противном случае включим граничную точку, в которой достигается локальный максимум. После того, как построено конечное множество  $L$ , для определения оптимальной пропускной способности СПТ при  $0 \leq Q < \underline{Q}$  необходимо найти  $\text{Argmax}\{TW(Q) | Q \in L \cup \{0\}\}$ .

Далее обратимся к исследованию функции полного общественного благосостояния при  $Q > \overline{Q}$ .

**Теорема 4.3.** *Оптимальное значение пропускной способности  $Q^*$  удовлетворяет неравенству  $Q^* \leq \overline{Q}$ .*

*Доказательство.* По теореме 3.2 при  $Q > \bar{Q}$  равновесие будет соответствовать типу  $B_{1-2}$ . Следовательно,  $p_1^{*b}$ , которая определяется согласно (3.15), и  $p_2^{*b} = \lambda^{-1}p_1^{*b}$  не зависят от  $Q$ . Величина потока равна  $\bar{Q}$ . Таким образом при  $Q > \bar{Q}$  прибыль транспортной системы  $T(Q) = 0$ , а прибыль производителей и выигрыш потребителей неизменны. Тогда  $TW'(Q) = -OC'(Q) = c'_v(Q) < 0$ . Итак, при  $Q > \bar{Q}$  функция полного общественного благосостояния убывает и оптимальное значение пропускной способности  $Q^* \leq \bar{Q}$ .  $\square$

Перейдем к исследованию функции общественного благосостояния при  $Q \in [\underline{Q}, \bar{Q}]$ , то есть когда возможно существование лишь равновесия типа  $D_{1-2}$ . Сначала обсудим, когда равновесие этого типа существует. В равновесии типа  $D_{1-2}$  должна выполняться следующая система уравнений и неравенств:

$$S_{1C}(p_1^{*d}) \leq D_1(p_1^{*d}) + Q \leq S_{1C1-2}(p_1^{*d}), \quad (4.8)$$

$$S_{2C1-2}(p_2^{*d}) \leq D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q \leq S_{2C}(p_2^{*d}), \quad (4.9)$$

$$\sum_{a \in A_1} v^{a*} = D_1(p_1^{*d}) + Q, \quad (4.10)$$

$$\sum_{a \in A_2} v^{a*} = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q.$$

Так как  $S_{2C1-2}(p) \geq S_{2C}(p)$ , то из (4.9) следует, что для  $p_2^{*d}$  должно выполняться соотношение (см. рис. 4)

$$S_{2C1-2}(p_2^{*d}) = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q = S_{2C}(p_2^{*d}).$$

Для тех значений, при которых  $S_{2C1-2}(p_2^{*d}) > S_{2C}(p_2^{*d})$ , равновесие типа  $D_{1-2}$  не существует. Достаточным условием существования равновесия при любом значении  $Q$  в диапазоне  $\underline{Q} \leq Q \leq \bar{Q}$  является совпадение на втором рынке функции предложения Курно для объединенного рынка с функцией предложения Курно для изолированного рынка. В частности, это условие выполнено в следующих типичных случаях:

1) второй рынок функционирует в условиях совершенной конкуренции, функция предложения Курно для объединенного рынка и функция предложения Курно для изолированного рынка совпадают с функцией предложения Вальраса;

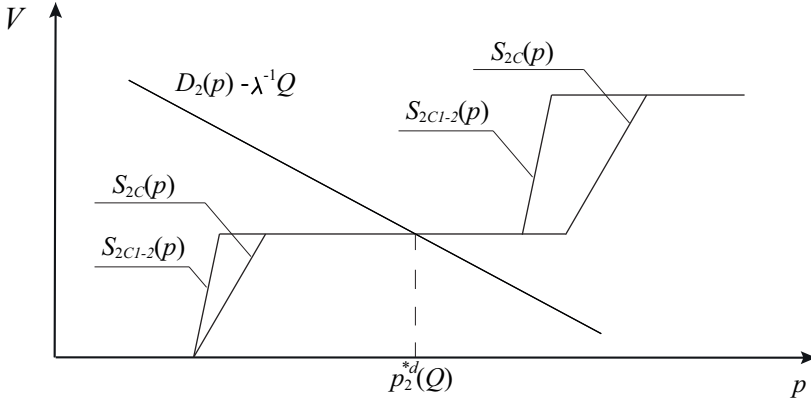


Рисунок 4. Спрос и предложение на рынке 2 в равновесии типа  $D_{1-2}$

2) в диапазоне  $\underline{Q} \leq Q \leq \bar{Q}$  на втором рынке нет эффективных производителей;

3) в диапазоне  $\underline{Q} \leq Q \leq \bar{Q}$  предприятия на втором рынке работают на максимуме производственных мощностей, предлагая фиксированное количество товара.

Далее исследуем функцию общественного благосостояния в условиях совершенной конкуренции на втором рынке. Пусть  $S_{2W}(p)$  – функция предложения Вальраса на втором рынке. Тогда  $p_2^{*d}(Q)$  определяется из соотношения

$$S_{2W}(p_2^{*d}) = D_2(p_2^{*d}) - \lambda^{-1}Q \quad (4.11)$$

и для ее производной справедливо

$$p_2^{*d'}(Q) = \frac{\lambda^{-1}}{D_2'(p_2^{*d}) - S_{2W}'(p_2^{*d})} \leq 0. \quad (4.12)$$

В равновесии типа  $D_{1-2}$  цена  $p_1^{*d}(Q) = \lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)$ , а суммарный объем предложения на первом рынке определяется согласно (4.10). Из условия первого порядка для равновесия типа  $D_{1-2}$  следует, что каждый производитель  $a \in A_1$  продает объем не ниже  $S_{1C}^a(p_1^{*d})$ , а итоговый объем его продаж  $v^{a*}$  зависит от правила рационирования, согласно которому распределяется остаточный спрос  $D_1(p_1^{*d}) + Q -$

–  $\sum_{a \in A_1} S_{1C}^a(p_1^{*d})$ . Далее предположим, что остаточный спрос распределяется так, чтобы минимизировать затраты на производство. Обратимся к исследованию случая, когда предельные затраты кусочно-постоянны.

При заданном  $Q$  рассмотрим задачу подключения наиболее эффективных мощностей, то есть нахождения  $\vec{v}^* = \{v^{a^*}(Q), a \in A_1\}$ , такого что

$$\sum_{a \in A_1} C^a(v^{a^*}(Q)) = \min_{\vec{v} \in V^0} \sum_{a \in A_1} C^a(v^a),$$

$$V^0 = \{\vec{v} = \{v^a, a \in A_1\} \mid \sum_{a \in A_1} v^a = D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q, \\ S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q)) \leq v^a \leq S_{1C_{1-2}}^a(p_1^{*d}(Q))\}.$$

Приведем алгоритм, позволяющий найти  $v^{a^*}$ ,  $a \in A_1$ . На первом шаге положим  $v^a(1) = S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q))$  для всех  $a \in A_1$ . Пусть выполнен шаг  $t$  и определены  $v^a(t)$ ,  $a \in A_1$ . На шаге  $t+1$  обозначим  $A^{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A_1 \mid v^a(t) < S_{C_{1-2}}^a(p_1^{*d}(Q))\}$ . Найдем производителя  $a_{t+1}$ , для которого

$$C_+^{a_{t+1}}(v^{a_{t+1}}(t)) = \min_{a \in A^{t+1}} C_+^a(v^a(t)) \stackrel{\text{def}}{=} c_{t+1}.$$

Объемы производителей  $a \neq a_{t+1}$  на шаге  $t+1$  останутся неизменными. Для производителя  $a = a_{t+1}$  положим

$$v^a(t+1) = \min\{V_{t+1}^a(c_{t+1}), S_{C_{1-2}}^a(p_1^{*d}(Q)), D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q - \sum_{a \neq a_{t+1}} v^a(t)\},$$

где  $V_{t+1}^a$  – объем производства, по достижении которого мощность с предельными издержками  $c_{t+1}$  исчерпана. Если минимум достигается на последнем аргументе, то весь спрос по цене  $p_1^{*d}(Q)$  удовлетворен и алгоритм заканчивает свою работу ( $v^{a^*} = v^a(t+1)$ ,  $a \in A_1$ ). В противном случае переходим к следующему шагу.

Из приведенного алгоритма следует, что при фиксированном  $Q$  множество  $A_1$  можно представить в таком виде  $A_1 = A_C \cup A_U \cup A_V \cup \{a_T\}$ , что

$$v^{a*}(Q) = \begin{cases} S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q)), & a \in A_C, \\ S_{1C1-2}^a(p_1^{*d}(Q)), & a \in A_U, \\ V_R^a, & a \in A_V, \\ D_1(p_1^{*d}(Q)) + Q - \sum_{a \neq a_T} v^{a*}(Q), & a = a_T, \end{cases} \quad (4.13)$$

где  $V_R^a$  – такая точка разрыва  $C^{a'}(v)$ ,  $a \in A_V$ , что выполнено соотношение  $S_{1C}^a(p_1^{*d}(Q)) < V_R^a < S_{1C1-2}^a(p_1^{*d}(Q))$ ;  $a_T$  – производитель, который был выбран на последнем шаге  $T$  алгоритма.

Разобьем интервал  $(Q, \bar{Q})$  на промежутки, на которых  $D_2'(p_2^{*d}(Q))$ ,  $S_{2W}'(p_2^{*d}(Q))$ ,  $D_1'(p_1^{*d}(Q))$ ,  $S_{1C}'(p_1^{*d}(Q))$ ,  $S_{1C1-2}'(p_1^{*d}(Q))$ ,  $C^{a'}(v^{a*}(Q))$  непрерывны. Дополним множество точек разбиения  $(Q, \bar{Q})$  точками, в которых  $v^{a_T*}(Q) = S_{1C1-2}^a(p_1^{*d}(Q))$  либо  $v^{a_T*}(Q) = V_R^{a_T}$ . Полученное множество обозначим  $Z = \{z_m\}$ ,  $m = \overline{1, |Z|}$ . На каждом из промежутков  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  разбиение множества  $A_1$  на  $A_C$ ,  $A_U$ ,  $A_V$  и  $\{a_T\}$  не меняется.

**Лемма 4.3.** *В условиях совершенной конкуренции на втором рынке выражение для производной функции общественного благосостояния при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$ ,  $m = \overline{1, |Z|} - 1$  принимает вид*

$$W'(Q) = \lambda^{-1} p_2^{*d}(Q) \cdot (D_1'(\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)) \lambda^{-1} p_2^{*d'}(Q) + 1) - \sum_{a \in A_1} (C^a(v^{a*}(Q)))', \quad (4.14)$$

где  $p_2^{*d'}(Q)$  определяется согласно (4.12), а  $v^{a*}(Q)$  – согласно (4.13)–(4.15).

*Доказательство.* Учитывая, что  $\lambda p_1^{*d} = p_2^{*d}$  и прибыль транспортной компании равна нулю, а также, что второй рынок функционирует в условиях совершенной конкуренции,

$$W'(Q) = \left( \int_{\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)}^{\infty} D_1(p) dp + \lambda^{-1} p_2^{*d}(Q) (D_1(\lambda^{-1} p_2^{*d}(Q)) + Q) - \sum_{a \in A_1} (C^a(v^{a*}(Q))) + \int_{p_2^{*d}(Q)}^{\infty} D_2(p) dp + \int_0^{p_2^{*d}(Q)} S_{2W}(p) dp \right)' =$$



$$\begin{aligned}
 &= -\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) \cdot D_1(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) + \lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) \cdot (D_1(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) + Q) + \\
 &+ \lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) \cdot (D_1'(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) + 1) - \sum_{a \in A_1} (C^a(v^{a*}(Q)))' - \\
 &\quad - p_2^{*d'}(Q) \cdot D_2(p_2^{*d}(Q)) + p_2^{*d'}(Q) \cdot S_{2W}(p_2^{*d}(Q)).
 \end{aligned}$$

Так как  $D_2(p_2^{*d}) - S_{2W}(p_2^{*d}) = \lambda^{-1}Q$ , получим представление (4.16).  $\square$

Далее обратимся к исследованию поведения функции  $W'(Q)$ .

Рассмотрим случай, когда функции спроса в каждом узле линейны:  $D_i(p) = \bar{D}_i - d_i p$ ,  $i = 1, 2$ . Для  $Q \in (z_m, z_{m+1})$ ,  $m = \bar{1}, |Z| - 1$  введем обозначения:

$$c_{Cm}^a \stackrel{\text{def}}{=} C^{a'}(v^{a*}(Q)), \quad a \in A_C;$$

$$c_{Um}^a \stackrel{\text{def}}{=} C^{a'}(v^{a*}(Q)), \quad a \in A_U;$$

$$c_m^{aT} \stackrel{\text{def}}{=} C^{a'T'}(v^{aT*}(Q)).$$

Пусть  $\bar{A}_C(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A_C | S_{1C}^a(p) = (p - C^{a'}(S_{1C}^a(p)) | D_1'(p))\}$  и  $\bar{A}_U(p) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A_U | S_{1C1-2}^a(p) = (p - C^{a'}(S_{1C1-2}^a(p)) | D_1'(p) + \lambda^2 D_2'(\lambda p))\}$ . На каждом из промежутков  $Q \in (z_m, Q_{z+1})$ ,  $m = \bar{1}, |Z| - 1$  множества  $\bar{A}_C(p_1^{*d}(Q))$  и  $\bar{A}_U(p_1^{*d}(Q))$  неизменны. Обозначим их  $\bar{A}_{Cm}$  и  $\bar{A}_{Um}$  соответственно.

**Теорема 4.4.** Пусть второй рынок действует в условиях совершенной конкуренции, функции спроса в каждом узле линейны:  $D_i(p) = \bar{D}_i - d_i p$ ,  $i = 1, 2$ , а предельные затраты производителей кусочно-постоянны.

Тогда если при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$   $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$  представляет собой константу  $s_m$  и существует принадлежащее этому промежутку решение  $Q^{Lk}$  уравнения

$$\begin{aligned}
 &(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{ad} + \sum_{a \in \bar{A}_{Um}} (c_{Um}^a - c_m^{aT})) \left( \frac{d_1}{\lambda^2 d_2} + 1 \right) + \\
 &\quad + \sum_{a \in \bar{A}_{Cm}} (c_{Cm}^a - c_m^{aT}) \frac{d_1}{\lambda^2 d_2} = c'_v(Q), \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

где  $p_2^{*d}(Q) = (\bar{D}_2 - s_m - \lambda^{-1}Q)/d_2$ , то  $Q^{Lk}$  является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния. В

противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.

Если же при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  происходит скачок  $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$  и существует решение  $Q^{Lk}$  уравнения

$$\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{aT} = c'_v(Q), \quad (4.16)$$

принадлежащее этому промежутку, то  $Q^{Lk}$  является точкой локального максимума функции полного общественного благосостояния. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.

*Доказательство.* Так как при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  объемы  $v^{a*}$  постоянны для  $a \in A_V$ , то для этого промежутка выражение (4.16) принимает вид:

$$\begin{aligned} W'(Q) = & (D'_1(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) + 1) \cdot (\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{aT}) - \\ & - \sum_{A \in A_C} (c_{Cm}^a - c_m^{aT})S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) - \\ & - \sum_{A \in A_U} (c_{Um}^a - c_m^{aT})S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q))\lambda^{-1}p_2^{*d'}(Q) \quad (4.17) \end{aligned}$$

В сделанных предположениях о структуре второго рынка при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  либо  $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$  представляет собой константу, либо происходит скачок  $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ . Если при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  происходит скачок  $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$ , то  $p_2^{*d'}(Q) = 0$ . Тогда из (4.19) следует, что  $W'(Q) = \lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{aT}$  и при  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (4.18). Так как на рассматриваемом промежутке  $p_2^{*d}(Q)$  – константа, то функция  $TW(Q)$  вогнута при  $Q \in (Q_m, Q_{m+1})$  и если существует решение  $Q^{Lk}$  уравнения (4.18), удовлетворяющее условию  $Q^{Lk} \in (z_m, z_{m+1})$ , то  $Q^{Lk}$  является точкой локального максимума. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.

Если при значениях  $Q \in (z_m, z_{m+1})$   $S_{2W}(p_2^{*d}(Q))$  равна константе  $s_m$ , то из (4.11) получим  $p_2^{*d}(Q) = (\overline{D}_2 - s_m - \lambda^{-1}Q)/d_2$  и  $p_2^{*d'}(Q) = -\lambda^{-1}/d_2$ . Подставив эти выражения в (4.19), а также учитывая, что  $S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = d_1$  при  $a \in \overline{A_{Cm}}$ ,  $S_{1C}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = 0$  при  $a \in A_{Cm} \setminus$

$\overline{A_{Cm}}$ ;  $S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = d_1 + \lambda^2 d_2$  при  $a \in \overline{A_{Um}}$ ,  $S_{1C1-2}^{a'}(\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q)) = 0$  при  $a \in A_U \setminus \overline{A_{Um}}$ , получим следующее выражение для производной общего благосостояния:

$$W'(Q) = (\lambda^{-1}p_2^{*d}(Q) - c_m^{aT} + \sum_{a \in \overline{A_{Um}}} (c_{Um}^a - c_m^{aT})) \cdot \left( \frac{d_1}{\lambda^2 d_2} + 1 \right) + \sum_{a \in \overline{A_{Cm}}} (c_{Cm}^a - c_m^{aT}) \frac{d_1}{\lambda^2 d_2}.$$

Так как  $p_2^{*d}(Q)$  убывает по  $Q$ , то  $W(Q)$  и  $TW(Q)$  – вогнутые функции. При  $Q \in (z_m, z_{m+1})$  условие равенства нулю производной функции полного общественного благосостояния эквивалентно (4.17). Так как функция  $TW(Q)$  вогнута на таком промежутке, то если существует решение  $Q^{Lk}$  уравнения (4.17), удовлетворяющее условию  $Q^{Lk} \in (z_m, z_{m+1})$ , то  $Q^{Lk}$  является точкой локального максимума. В противном случае точкой локального максимума является граничная точка промежутка.  $\square$

Таким образом, для нахождения оптимальной пропускной способности СПТ необходимо провести перебор по точкам локального максимума.

## 5. Заключение

В работе рассмотрена модель двухузлового рынка и исследована задача поиска оптимальной пропускной способности СПТ с точки зрения общественного благосостояния. Характер равновесия при увеличении пропускной способности меняется следующим образом: сначала равновесие соответствует типу  $C$ , потом переходит в тип  $D$ , затем – в тип  $B$ . Показано, что в равновесии типа  $B$  общественное благосостояние убывает с ростом пропускной способности. В равновесиях типов  $C$  и  $D$  выделены промежутки, на каждом из которых функция общественного благосостояния вогнута. Определены условия для нахождения точек локального максимума, по которым следует провести перебор для решения задачи поиска оптимальной пропускной способности СПТ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васин А.А. *Некооперативные игры в природе и обществе*. М.: МАКС Пресс, 2005.
2. Васин А.А., Дайлова Е.А. *Об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара между двумя рынками* // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2014. № 3. (в печати).
3. Васин А.А., Морозов В.В. *Теория игр и модели математической экономики*. М.: МАКС Пресс, 2005.
4. Давидсон М.Р. и др. *Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России* // Известия Академии Наук. Теория и системы управления. 2004. № 3. С. 72–83.
5. Green R., Newbery D. *Competition in the British electricity spot market* // Journal of Political Economy. 1992. V. 100. N 5. P. 929–953.
6. Hogan W. *Competitive electricity market design: a wholesale primer* // Harvard University, WP. 1998.
7. Sosina Y., Weber G., Vasin A. *Evaluation of market power in local and two-node markets* // International Workshop Networking Games and Management 2012.
8. Vasin A., Vasina P. *Electricity markets analysis and design* // Working Paper 2006/053. Moscow, New Economic School. 2006.
9. Vasin A., Vasina P., Ruleva T. *On organization of markets of homogeneous goods* // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. V. 46. N 1. P. 93–106.

TWO-NODE MARKET UNDER IMPERFECT  
COMPETITION

**Alexander A. Vasin**, Moscow State University, Dr.Sc., professor  
(vasin@cs.msu.su),

**Ekaterina A. Daylova**, Moscow State University, Ph.D. student  
(e.daylova@gmail.com).

*Abstract:* We consider Cournot auction with uniform nodal prices for a two-node market. The structure of each local market is an oligopoly. We show how the type of Nash equilibrium depends on the transmission capacity. We investigate the problem of the optimal transmission capacity computation for the market.

*Keywords:* network auction, Cournot oligopoly, total welfare, Nash equilibrium.