Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.4, с. 85–96

УДК 519.711.7
ББК 22.1

ЦЕНА АНАРХИИ В ИГРЕ БАЛАНСА ЗАГРУЗКИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ТРЕМЯ МАШИНАМИ

Юлия В. Чиркова*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: julia@krc.karelia.ru

В работе исследуется игра баланса загрузки системы обслуживания с 3 машинами, где n игроков распределяют свои задачи различного объема между машинами, различающимися скоростями обслуживания. Каждый игрок стремится минимизировать время обслуживания своей задачи на выбранной им машине. Затратами системы является максимальное время работы среди всех машин. Для данной модели получена верхняя оценка цены анархии, которая является точной при достаточно высокой скорости обслуживания на одной из машин. Также найдены условия возрастания цены анархии при добавлении в систему двух машин третьей машины.

Ключевые слова: система обслуживания, баланс загрузки, равновесие по Нэшу, цена анархии.

---

* Работа выполняется в рамках проекта «Задачи оптимальной маршрутизации трафика, распределения и защиты информационных ресурсов» по программе фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

1. Модель системы 3 машин

Рассматривается система $S = S(3,(1,r,s))$ из 3 обслуживающих машин со скоростями $speed_1 = 1 \le speed_2 = r \le speed_3 = s$. Система используется множеством игроков $U = U(n,w)$, в котором n игроков, а каждый игрок j имеет задачу объема w_j, $j = 1,\ldots,n$. Общий объем задач равен $W = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j$. Время выполнения задачи объема w на свободной машине i со скоростью $speed_i$ равно $w/speed_i$.

Игра $\Gamma =< S(3,(1,r,s)), U(n,w), \lambda >$ рассматривается в чистых стратегиях, каждый игрок может выбирать любую машину. Стратегией игрока j является номер машины l_j, которую он выбрал для обслуживания своей задачи. Соответственно, $L = (l_1,\ldots,l_n)$ обозначается профиль стратегий игроков в игре Γ. Суммарный объем задач $\delta_i(L) = \sum\limits_{j=1,\ldots,n: l_j = i} w_j$, владельцы которых выбрали машину i, называется загрузкой машины i.

Все задачи поступают на обслуживание одновременно. Результат выполнения задачи машина, на которой она обслуживается, выдает по окончанию выполнения всей своей работы. То есть время обслуживания или задержку задачи на машине i определяет функция

$$\lambda_i(L) = \sum_{j=1,\ldots,n: l_j = i} w_j/speed_i = \frac{\delta_i(L)}{speed_i},$$

которая принимает одинаковое значение для всех задач, выполняющихся на данной машине.

Затратами системы на обслуживание является время

$$SC(L) = \max_{i=1,2,3} \lambda_i(L),$$

потраченное на выполнение всей работы, от момента поступления задач до завершения выполнения последней задачи последней машиной. Обозначим

$$OPT = OPT(S,U) = \min_{L \text{ -- профиль в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)$$

оптимальное значение затрат системы, где минимальное значение находится по всем допустимым профилям в игре $\Gamma(S,U,\lambda)$. Это значение может быть гарантированно достигнуто при централизованном управлении системой. В данной же модели каждый игрок действует эгоистично в собственных интересах, выбирая машину для выполнения своей задачи так, чтобы минимизировать ее задержку. В таком случае игроками достигается ситуация равновесия.

Профиль стратегий игроков L, в котором ни один из игроков не имеет возможности единолично переместить свою задачу с выбранной им машины на другую, уменьшив при этом ее задержку, называется равновесием по Нэшу. Для того, чтобы дать формальное определение равновесия, введем следующее обозначение. Для профиля стратегий L обозначим $L(j \to i) = (l_1, \ldots, l_{j-1}, i, l_{j+1}, \ldots, l_n)$ профиль, где игрок j переместил свою задачу с машины l_j на машину i, а остальные игроки при этом не изменили свои стратегии.

Определение 1.1. *Профиль стратегий L называется чистым равновесием по Нэшу тогда и только тогда, когда каждый игрок выбрал машину с минимальной задержкой, то есть для любого игрока j $\lambda_{l_j}(L) \leq \lambda_i(L(j \to i))$ для любой машины i.*

В данной работе рассматривается только чистое равновесие по Нэшу. В работах [5,7] показано, что оно всегда существует для игр рассматриваемого здесь типа.

Числовым критерием, показывающим, насколько ухудшаются временные характеристики производительности системы в случае отказа от централизованного управления, является цена анархии.

Определение 1.2. *Ценой анархии системы называется максимальное отношение значения затрат системы в наихудшем равновесии по Нэшу к оптимальному значению затрат:*

$$PoA(S) = \max_{U} \frac{\max\limits_{L \text{ -- равновесие по Нэшу в } \Gamma(S,U,\lambda)} SC(L)}{OPT(S,U)}.$$

2. Ранее полученные оценки цены анархии

В работах зарубежных исследователей получены следующие оценки для цены анархии:

- $PoA(S) = O(\frac{logN}{loglogN})$ для N одинаковых машин [6];

- $PoA(S) = \frac{\sqrt{4N-3}+1}{2}$ для $N = 2, 3$ одинаковых машин [3];
- для двух машин с различными скоростями 1 и s, $1 \le s$ [4]

$$PoA(S) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{s+2}, & \text{если } 1 \le s \le \sqrt{2}, \\ s, & \text{если } \sqrt{2} \le s \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{1}{s}, & \text{если } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \le s. \end{cases} \tag{2.1}$$

В общем случае для затрат системы справедливы следующие очевидные оценки [2].

- Равновесное значение затрат системы не может быть больше, чем в ситуации, когда все задачи направляются на самую быструю машину:
$$SC(L) \le \frac{W}{s}. \tag{2.2}$$
- Оптимальное значение затрат системы не может быть меньше, чем в ситуации, когда все задачи были бы разделяемыми и машины были бы нагружены ими пропорционально своим скоростям:
$$OPT \ge \frac{W}{s+r+1}. \tag{2.3}$$
- Оптимальное значение затрат системы не может быть меньше, чем время выполнения самой объемной задачи на самой быстрой машине:
$$OPT \ge \frac{\max\limits_{j=1,\dots,n} w_j}{s}.$$

Из первых двух пунктов непосредственно следует верхняя оценка для цены анархии:
$$PoA(S) \le \frac{s+r+1}{s}. \tag{2.4}$$

В работе [2] найдена верхняя оценка цены анархии для системы обслуживания, состоящей из трех машин.

Теорема 2.1. *Для системы S трех машин со скоростями $1 \le r \le$ $\le s$, цена анархии имеет верхнюю оценку*

$$PoA(S) \le \min\{\tfrac{s+r+1}{s}, \max\{ s, Est(1,r,s), Est(1,s,r), Est(r,1,s), Est(r,s,1), Est(s,1,r), Est(s,r,1)\}\}, \tag{2.5}$$

$$\text{где } Est(x,y,z) = \begin{cases} \frac{2(s+r+1)}{x+2y}, & \text{если } 2z \le x, \\ \frac{s+r+1}{y+z}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Также показано, что существуют области значений скоростей машин, для которых верхняя оценка (2.4) является точной оценкой цены анархии.

Теорема 2.2. *Для системы S трех машин со скоростями $1 \le r \le \le s$, такими, что $(s-r)(s+r+1) \le s(s^2 - r(s+r+1))$ и $s \le r^2 + r$, цена анархии равна $PoA(S) = \frac{s+r+1}{s}$.*

Область значений s и r, в которой цена анархии равна $PoA(S) = = \frac{s+r+1}{s}$, на рис. 1 ограничена кривыми $s = r^2+r$ слева и $(s-r)(s+r+ +1) = s(s^2-r(s+r+1))$ справа. В работе [2] также отмечено, что, как показывают численные эксперименты, при росте s, выводящем точку (r, s) за пределы данной области, оценка $PoA(S) \le \frac{s+r+1}{s}$ близка к точной, но не равна ей. В данной работе находится точное значение цены анархии для $s > r^2 + r$ и $2(rs + s - r) \le s(s^2 - r(s + r + 1))$, эта область на рис. 1 ограничена справа и снизу кривыми $s = r^2 + r$ и $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s + r + 1))$.

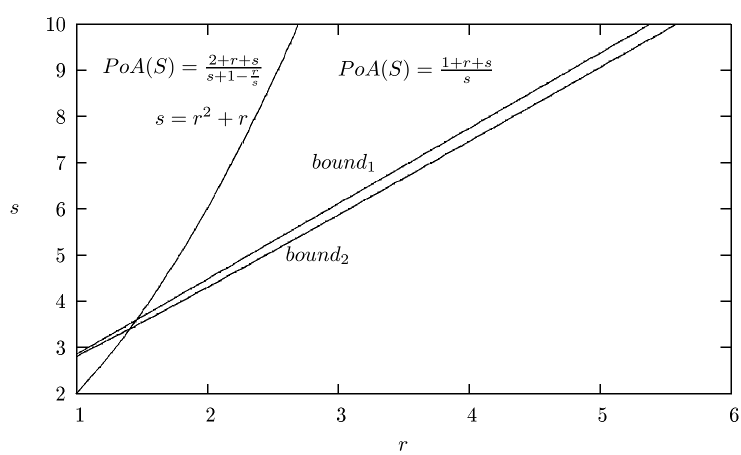

Рисунок 1. Области оценок $PoA(S)$. $bound_1$ – кривая $2(rs + s - r) = s(s^2 - r(s + r + 1))$, $bound_2$ – кривая $(s - r)(s + r + 1) = s(s^2 - r(s + r + 1))$.

3. Оценка $\frac{s+r+1}{s+1-\frac{r}{s}}$ для цены анархии

Построим систему неравенств, выполнение которых необходимо в равновесии по Нэшу. Пусть L – произвольное равновесие по Нэшу. Обозначим a – суммарный объем задач на машине со скоростью r, $b+c$ – объем задач на машине со скоростью s, где c – объем наименьшей из задач на данной машине. Тогда $W-a-b-c$ – объем задач на самой медленной машине со скоростью 1. В равновесии попытка перевести любую задачу j с машины l_j на другую машину увеличивает ее время обслуживания. Это же, очевидно, справедливо и при переводе нескольких задач с одной машины на другую. Тогда в равновесии по Нэшу должна выполняться следующая система неравенств:

$$\begin{cases} \frac{a}{r} \le \frac{b+c+a}{s}, \\ \frac{a}{r} \le W-b-c, \\ \frac{b+c}{s} \le \frac{a+c}{r}, \\ \frac{b+c}{s} \le W-a-b, \\ W-a-b-c \le \frac{W-b-c}{r}, \\ W-a-b-c \le \frac{W-a}{s}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *В любом равновесии по Нэшу L затраты системы $SC(L) \le \frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$, где c – объем наименьшей из задач на машине со скоростью s.*

Доказательство. Необходимо показать, что задержка на любой из машин не превышает $\frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}$.

Рассмотрим $\frac{a}{r}$ – задержку на машине со скоростью r. Из первого неравенства системы (3.1) получаем $\frac{a}{r} \le \frac{b+c}{s-r}$ и $b \ge \frac{s-r}{r}a - c$, из четвертого $b+c \le s(W-a-b)$, откуда

$$\frac{a}{r}(s-r+rs) \le s(W-b) \le s(W - \frac{s-r}{r}a + c),$$

$$\text{тогда } \frac{a}{r}(s^2+s-r) \le (W+c)s.$$

Рассмотрим $\frac{b+c}{s}$ – задержку на машине со скоростью s. Из третьего неравенства системы (3.1) получаем $\frac{a}{r} \ge \frac{b+c}{s} - \frac{c}{r}$, тогда, используя второе, получаем

$$b+c \le W - \frac{a}{r} \le W - \frac{b+c}{s} + \frac{c}{r},$$

$$\text{откуда } \frac{b+c}{s} \leq \frac{W+\frac{c}{r}}{s+1} < \frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим $W-a-b-c$ – задержку на машине со скоростью 1. Из последнего неравенства системы (3.1), используя $a = W-b-c-(W-a-b-c)$, получаем

$$\begin{array}{ll} (*) & b+c \geq (s-1)(W-a-b-c), \\ (**) & b \geq (s-1)(W-a-b-c)-c. \end{array}$$

Из третьего:

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{W-b-c-(W-a-b-c)+c}{r} = \frac{W-b-(W-a-b-c)}{r}.$$

К левой части применим выражение (*), а к правой (**), получим

$$\frac{s-1}{s}(W-a-b-c) \leq \frac{W+c-s(W-a-b-c)}{r},$$

$$\text{откуда } W-a-b-c \leq \frac{W+c}{s+r-\frac{r}{s}} \leq \frac{W+c}{s+1-\frac{r}{s}}. \tag{3.3}$$

□

Лемма 3.2. *В равновесии по Нэшу L, таком, что на машине со скоростью s общий объем задач не больше $s*OPT$, затраты системы $SC(L) \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.*

Доказательство. При $s \leq r^2+r$ из оценок (2.2) и (2.3) имеем

$$SC(L) \leq \frac{W}{s} \leq OPT\frac{s+r+1}{s} \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Пусть $s > r^2+r$. Рассмотрим $\frac{a}{r}$ – задержку на машине со скоростью r. Из первого неравенства системы (3.1) получаем

$$\frac{a}{r} \leq \frac{b+c}{s-r} \leq OPT\frac{s}{s-r} < OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

На машине со скоростью s

$$\frac{b+c}{s} \leq OPT < OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Из последнего неравенства системы (3.1), используя $a = W - b - c - (W - a - b - c)$, получаем на самой медленной машине

$$W - a - b - c \leq \frac{b+c}{s-1} \leq OPT\frac{s}{s-1} \leq OPT\frac{s}{s-r} < OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

$\square$

Лемма 3.3. *В равновесии по Нэшу L, таком, что на машине со скоростью s наименьшая из задач имеет объем $c > r * OPT$, затраты системы $SC(L) \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.*

Доказательство. Если на машине со скоростью s каждая из задач имеет объем больше $r * OPT$, то в оптимальном профиле все эти задачи также находятся на этой же машине. А это означает, что их общий объем не более $s * OPT$, то есть выполнено условие леммы 3.2.

$\square$

Лемма 3.4. *В равновесии по Нэшу L, таком, что на машине со скоростью s наименьшая из задач имеет объем $c > OPT$, но $c \leq r * OPT$, а общий объем задач на ней больше $s * OPT$, затраты системы $SC(L) \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.*

Доказательство. Для всех значений $c \leq r * OPT$, используя оценку (2.3), из (3.2) получаем

$$\frac{b+c}{s} \leq \frac{W+\frac{c}{r}}{s+1} \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$$

и из (3.3)

$$W - a - b - c \leq \frac{W+c}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT\frac{s+2r+2}{s+r-\frac{r}{s}} \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}.$$

Если $a \leq r * OPT$, то $\frac{a}{r} \leq OPT \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.

Рассмотрим $a > r * OPT$. Так как $b + c > s * OPT$, а каждая из задач на машине со скоростью s имеет объем больше OPT, но меньше $r * OPT$, то в оптимальном профиле все эти задачи распределяются только между машинами со скоростями s и r. Предположим, что объем каждой из задач, в равновесии расположенных на машине со скоростью r, также больше OPT. Тогда в оптимальном профиле эти задачи суммарным объемом a также распределяются только между машинами со скоростями s и r. Но тогда $OPT \geq \frac{a+b+c}{s+r}$, что противоречит $a > r * OPT$ и $b + c > s * OPT$. Это означает, что на машине со скоростью r в равновесном профиле L имеется хотя бы одна задача объемом не более OPT.

Тогда должно выполняться $\frac{a}{r} \leq \frac{b+c+OPT}{s}$, откуда $\frac{b+c}{s} \geq \frac{a}{r} - \frac{OPT}{s}$ и $b \geq \frac{as}{r} - OPT - c$. Отсюда, используя оценку (2.3) и четвертое неравенство системы (3.1), получаем

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} - \frac{OPT}{s} &\leq \frac{b+c}{s} \leq W - b - a \leq \\ &\leq W - \frac{as}{r} + OPT + c - a \leq \\ &\leq OPT(r+s+1) - \frac{as}{r} + OPT + r * OPT - a,\end{aligned}$$

$$\text{откуда } \frac{a}{r} \leq OPT\frac{s + 2r + 2 + \frac{1}{s}}{s + r + 1} \leq OPT\frac{s + r + 2}{s + 1 - \frac{r}{s}}.$$

□

Теорема 3.1. *Для системы S трех машин со скоростями $1 \leq r \leq s$ значение цены анархии $PoA(S) \leq \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный равновесный профиль L. Из лемм 3.2, 3.3 и 3.4 получаем, что $SC(L) \leq OPT\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$ для всех случаев, когда на машине со скоростью s все задачи имеют объем больше OPT. Для случая, когда на ней есть задача объемом $c \leq OPT$, этот же результат следует из леммы 3.1. □

Теорема 3.2. *Для системы S трех машин со скоростями $1 \leq r \leq s$, такими, что $s > r^2 + r$ и $s(s^2 - r(s + r + 1)) \geq 2(rs + s - r)$, значение цены анархии $PoA(S) = \frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.*

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что верхняя оценка цены анархии из теоремы 3.1 при соблюдении условий данной теоремы становится точной. Для этого достаточно показать, что для указанной системы машин существуют игры, для которых отношение равновесных затрат системы к оптимальным равно $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$. Рассмотрим игру, в которой пять игроков имеют задачи следующих объемов:

$$
\begin{aligned}
w_1 = &\ rs(s+r+2),\\
w_2 = &\ s^2+s-r,\\
w_3 = &\ s-r-r^2>0 \text{ при } s>r+r^2,\\
w_4 = &\ r(s^2+s-r)\geq w_2,\\
w_5 = &\ s^3+s^2+r^2-rs^2-sr^2-3sr-s+r\geq w_2,\\
&\ \text{при } s(s^2-r(s+r+1))\geq 2(rs+s-r).
\end{aligned}
$$

В равновесии по Нэшу на машину со скоростью r поступает задача объемом w_1 – это будет машина с наибольшей задержкой, равной $\lambda_r = s(s+r+2)$. На машину со скоростью s поступают задачи с объемами w_2, w_4 и w_5, обеспечивая там задержку $\lambda_s=(s-r)(s+r+2)<\lambda_r$. На самой медленной машине размещается задача объемом w_3, обеспечивая задержку $\lambda_1 = s-r-r^2 < s^2+(2s-r)-r-r^2=\lambda_s$. Это наименее загруженная машина.

Покажем, что это и есть равновесие. Если задача объемом w_1 переходит с самой загруженной машины со скоростью r на менее загруженную со скоростью s, то ее задержка не изменится. При переходе на машину со скорость 1 ее задержка становится равной $s-r-r^2+s^2r+sr^2+2rs>\lambda_r$. Если задача минимального объема w_2 перейдет с машины со скоростью s на машину со скоростью 1, то ее задержка не изменится.

В оптимальном случае на машине со скоростью r размещается задача объемом w_4, на машине со скоростью s – задачи с объемами w_1, w_3 и w_5, на машине со скоростью 1 – задача объемом w_2. На всех машинах задержка одинакова и равна s^2+s-r.

Тогда отношение равновесных затрат к оптимальным равно $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}}$.
$\square$

Наличие точной оценки цены анархии дает возможность получить достаточное условие для возникновения ситуации, аналогичной парадоксу Браесса [1,8,9,10], то есть такой ситуации, когда добавление новых ресурсов в систему ухудшает ее характеристики. Покажем, когда добавление в систему новой машины может увеличить значение цены анархии для новой системы по сравнению с ее первоначальным значением.

Теорема 3.3. *Для системы S, состоящей из двух машин со скоростями $1 \leq s$ при добавлении в систему новой машины со скоростью r такой, что $s > r^2 + r$, $s(s^2 - r(s+r+1)) \geq 2(rs + s - r)$ и $r > \frac{s+1}{s(s-1)}$, цена анархии строго увеличивается.*

Доказательство. Как показано в работах [2,4], для системы двух машин со скоростями $1 < s$ цена анархии не более, чем $\frac{s+1}{s}$. При добавлении новой машины со скоростью r такой, что $s > r^2 + r$ и $s(s^2 - r(s+r+1)) \geq 2(rs + s - r)$, согласно теореме 3.2 цена анархии $\frac{s+r+2}{s+1-\frac{r}{s}} > \frac{s+1}{s}$ при $r > \frac{s+1}{s(s-1)}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения.* СПб-М.-Краснодар: Лань, 2010.

2. Чиркова Ю.В. *Цена анархии в игре баланса загрузки системы обслуживания* // Математическая теория игр и ее приложения. Т. 2, вып. 3, С. 93–113.

3. Czumaj A., Vöcking B. *Tight bounds for worst-case equilibria* // Proceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'02). 2002. P 413–420.

4. Epstein L. *Equilibria for two parallel links: the strong price of anarchy versus the price of anarchy* // Acta Informatica. 2010. V. 47 (7-8). P. 375–389.

5. Even-Dar E., Kesselman A. and Mansour Y. *Convergence time to Nash equilibria* // In Proc. of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2003). 2003. P. 502–513.

6. Feldmann R., Gairing M., Lücking T., Monien B. and Rode M. *Nashification and the coordination ratio for a selfish routing game* // In Proc. of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP2003). 2003. P. 514–526.

7. Fotakis D., Kontogiannis S.C., Koutsoupias E., Mavronicolas M. and Spirakis P.G. *The structure and complexity of Nash equilibria for a selfish routing game* // In Proc. of the 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2002). 2002. P. 123–134.

8. Korilis Y.A., Lazar A.A., Orda A. *Avoiding the Braess paradox in non-cooperative networks* // J. Appl. Prob. 1999. V. 36. P. 211–222.

9. Murchland J.D. *Braess's paradox of traffic flow* // Transportation Research. 1970. V. 4. P. 391–394.

10. Roughgarden T., Tardos É. *How bad is selfish routing?* // Journal of the ACM. 2002. V. 49. N 2. P. 236–259.

PRICE OF ANARCHY FOR MACHINE LOAD BALANCING GAME WITH 3 MACHINES

Julia V. Chirkova, IAMR KarRC RAS, Cand.Sc.
(julia@krc.karelia.ru).

Abstract: The Machine Load Balancing Game with 3 machines is considered. A set of n jobs is to be assigned to a set of 3 machines with different speeds. Jobs choose machines to minimize their own delays. The social cost of a schedule is the maximum delay among all machines, i.e. *makespan*. For this model the upper bound estimation of the Price of Anarchy is obtained. This upper bound estimation is an exact estimation of the Price of Anarchy for the case when the speed of the fastest machine is enough large. Conditions of PoA increasing with addition a machine in the system of 2 machines are found.

Keywords: machine load balancing game, Nash equilibrium, price of anarchy.