

УДК 517.977.8

ББК 22.18

ДВУХУРОВНЕВАЯ КООПЕРАЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СОКРАЩЕНИЯ ВРЕДНЫХ ВЫБРОСОВ

НИКОЛАЙ В. КОЛАБУТИН

Факультет прикладной математики –
процессов управления

Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: n.kolabutin@spbu.ru

Кооперативные дифференциальные игры – один из наиболее актуальных разделов теории игр. Они хорошо описывают конфликтно-управляемые процессы в менеджменте и в экономике. Решением кооперативной дифференциальной игры является некоторое кооперативное соглашение и принцип оптимальности, согласно которому распределяется полученный выигрыш. К сожалению изначально выбранное кооперативное решение часто теряет свою оптимальность с течением времени. Поэтому встал вопрос о временной состоятельности кооперативного решения или о динамической устойчивости. Понятие динамической устойчивости решения было формализовано Л.А. Петросяном. Кооперативное решение считается динамически устойчивым, если принцип оптимальности, выбранный в начале игры, сохраняет свою оптимальность на протяжении всей игры. Для динамической устойчивости необходимо проводить регуляризацию выбранного принципа оптимальности. Л.А. Петросян предложил использовать перераспределение полученного выигрыша в соответствии с «процедурой

распределения дележа». В некоторых случаях в дифференциальных играх исследуются коалиционные модели, в которых коалиции выступают как отдельные игроки и играют друг с другом в бескоалиционную игру, а выигрыш каждой коалиции распределяется между ее участниками в соответствии с некоторым принципом оптимальности. Кроме того, исследуются модели, в которых коалиции выступают как отдельные игроки, но при этом также могут кооперироваться, чтобы максимизировать общий выигрыш. В этом случае общий выигрыш распределяется между коалициями в соответствии с выбранным принципом оптимальности, а затем выигрыш каждой коалиции распределяется между ее участниками так же в соответствии с некоторым принципом оптимальности, возможно другим. Такая кооперация называется двухуровневой. Для решения моделей двухуровневой кооперации требуется на каждом уровне кооперации построить характеристическую функцию и процедуру распределения дележа. В данной статье рассматривается модель двойной кооперации в игре сокращения выброса вредных веществ. Участниками игры выступают предприятия, чье производство наносит вред окружающей среде. Выигрышем игроков являются затраты на возмещение ущерба от выбросов. Предприятия стремятся минимизировать затраты и могут объединяться в коалиции для минимизации общих затрат и их перераспределения. Коалиции также могут кооперироваться. На первом (нижнем) уровне предприятия объединяются в коалиции. На втором (верхнем) уровне коалиции, действуя как отдельные игроки, объединяются в одну общую коалицию, чтобы минимизировать общие затраты. Полученный на верхнем уровне выигрыш распределяется между коалициями-участниками. В качестве принципа оптимальности выбран динамический вектор Шепли. Затем каждая коалиция распределяет свою долю выигрыша между входящими в нее предприятиями. В данной статье мы следуем модели, описанной в [8], а специфика заключается в особенности построения характеристической функции.

Ключевые слова: дифференциальная игра, кооперация, характеристическая функция, процедура распределения дележа.

1. Математическая модель

Рассмотрим кооперативную дифференциальную игру, в которой участвуют предприятия, разрабатывающие некоторую продукцию. Производство каждого из предприятий наносит вред окружающей среде. Обозначим игру через $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$. Множество предприятий обозначим за $N = \{1, \dots, n\}$. Игра начинается в момент t_0 из начального состояния $s_0 \geq 0$ – общего уровня загрязнения на начальный момент и имеет бесконечную продолжительность. Основным параметром в игре является уровень загрязнения окружающей среды. Обозначим за $s(t) \in R^+$ уровень загрязнения к моменту t . Производство каждого из предприятий загрязняет окружающую среду за счет вредных выбросов. Обозначим за $e_i(s(t))$ выбросы от предприятия $i \in N$.

Динамика объема загрязнения определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{s}(t) = \sum_{i \in N} e_i(s(t)) - \delta s(t), \quad s(t_0) = s_0, \quad (1.1)$$

где δ – коэффициент природного поглощения загрязнения. Максимально допустимый уровень загрязнения для предприятия i определяется величиной $\bar{e}_i > 0$.

Предприятие несет затраты на природоохранные мероприятия и на возмещение от загрязнения. Затраты на природоохранные мероприятия имеют вид

$$C_i(e_i(s(t))) = \frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2, \quad (1.2)$$

$$0 \leq e_i(s(t)) \leq \bar{e}_i, \quad \gamma > 0.$$

Затраты на возмещение от загрязнения имеют вид

$$D_i(s(t)) = \pi_i s(t), \quad \pi_i > 0. \quad (1.3)$$

Считается, что параметры модели таковы, что выполняется условие

$$\bar{e}_i \gg \sum_{j \in N} \pi_j.$$

Это означает, что максимально возможный объем загрязнения для каждого предприятия значительно больше, чем общая готовность платить за его возмещение. Будем считать верным следующее

равенство:

$$\gamma \bar{e}_i \geq \frac{\sum_{j \in N} \pi_j}{r + \delta},$$

где $r \in [0, 1]$ – ставка дисконтирования.

Каждое предприятие стремится минимизировать свои суммарные затраты, дисконтированные на момент t_0 , которые определяются следующим функционалом:

$$\Pi_i(s_0, t_0, \mathbf{e}) = \int_{t_0}^{\infty} (C_i(e_i(s(t))) + D_i(s(t))) \exp[-r(t - t_0)] dt,$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}(s(t)) = \{e_1(s(t)), \dots, e_n(s(t))\}$ – ситуация в игре.

Чтобы минимизировать суммарные затраты, предприятия могут объединяться в коалиции. Затраты коалиции $K \subseteq N$ определяются суммой затрат ее участников:

$$\begin{aligned} \Pi_K(s_0, t_0, \mathbf{e}) &= \sum_{i \in K} \Pi_i(s_0, t_0, \mathbf{e}) = \\ &= \sum_{i \in K} \int_{t_0}^{\infty} (C_i(e_i(s(t))) + D_i(s(t))) \exp[-r(t - t_0)] dt. \end{aligned}$$

Пусть задано коалиционное разбиение игры $\Delta = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$.

При этом $M = \{1, \dots, m\}$ – множество индексов разбиения. Считаем, что коалиции в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$ выступают как отдельные игроки, при этом они также могут кооперироваться между собой, чтобы уменьшить суммарные затраты. Введем обозначения для коалиции K_l :

$k_l = |K_l|$ – число участников коалиции K_l ; $e_{K_l}(s(t)) = \{e_i(s(t))\}_{i \in K_l}$ – управление коалиции K_l в момент $t \in [t_0, \infty)$, равное набору управлений ее участников; $\bar{e}_{K_l} = \sum_{i \in K_l} \bar{e}_i$ – максимально допустимый уровень

загрязнения для коалиции K_l ; \check{N} – коалиция, образованная всеми коалициями из разбиения Δ , т.е. $\check{N} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$;

$\check{K} \subseteq \check{N}$ – любая коалиция, образованная коалициями из разбиения Δ , т.е. $\check{K} = K_{l_1} \cup K_{l_2} \cup \dots \cup K_{l_k}$, где $K_{l_1}, K_{l_2}, \dots, K_{l_k} \subset \Delta$; $V^{\Delta(t_0)} = V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t)$ – характеристическая функция игры $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$.

Затраты коалиции $K_l \subset \Delta$ вычисляется как сумма затрат ее участников:

$$\begin{aligned} \Pi_{K_l}(s_0, t_0, \mathbf{e}) &= \sum_{i \in K_l} \Pi_i(s_0, t_0, \mathbf{e}) = \\ &= \sum_{i \in K_l} \int_{t_0}^{\infty} h_i(s(t), e(s(t))) \exp[-r(t - t_0)] dt, \end{aligned}$$

где $h_i(s(t), e(s(t))) = (C_i(e_i(s(t))) + D_i(s(t)))$ – мгновенные затраты предприятия $i \in K_l$ в момент $t \in [t_0, \infty)$

Затраты коалиции $\check{K} \subseteq \check{N}$ рассчитываются как сумма затрат ее участников, т.е.

$$\begin{aligned} \Pi_{\check{K}}(s_0, t_0, \mathbf{e}) &= \sum_{\xi=1}^k \Pi_{K_{l_\xi}}(s_0, t_0, \mathbf{e}) = \\ &= \sum_{\xi=1}^k \left(\sum_{i \in K_{l_\xi}} \int_{t_0}^{\infty} h_i(s(t), e(s(t))) \exp[-r(t - t_0)] dt \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Кооперация коалиций

Коалиции $\{K_l\}_{l \in M}$ могут кооперироваться между собой, чтобы уменьшить суммарные затраты. Рассмотрим коалицию $\check{K} = K_{l_1} \cup K_{l_2} \cup \dots \cup K_{l_k}$, где $K_{l_1}, K_{l_2}, \dots, K_{l_k} \subset \Delta$. Затраты коалиции \check{K} рассчитываются по формуле (1.4).

Учитывая дизъюнктность коалиций K_{l_ξ} выражение (1.4) можно упростить:

$$\Pi_{\check{K}}(s_0, t_0, \mathbf{e}) = \sum_{i \in \check{K}} \int_{t_0}^{\infty} h_i(s(t), e(s(t))) \exp[-r(t - t_0)] dt.$$

Чтобы построить коалиционное решение в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$, необходимо определить характеристическую функцию $V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t)$ и процедуру распределения дележа [7]. В данном случае между игроками распределяются затраты.

3. Вычисление характеристической функции в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$

Участниками игры $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$ являются не отдельные предприятия, а коалиции, поэтому при вычислении значения характеристической функции $V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t)$ необходимо рассмотреть не все подмножества множества N , а только подмножества $\{K_l\} \subset \Delta$ и их возможные объединения.

Характеристическую функцию будем искать в три этапа: вначале построим равновесие по Нэшу в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$; далее найдем значение характеристическую функцию для максимальной коалиции в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$; затем построим характеристическую функцию для произвольной коалиции. Под максимальной коалицией в данном случае понимается коалиция \check{N} , образованная всеми коалициями из разбиения Δ . Под произвольной коалицией в данном случае понимается коалиция $\check{K} \subseteq \check{N}$, образованная некоторыми коалициями из разбиения Δ .

3.1. Равновесие по Нэшу в игре коалиций

Чтобы построить равновесие по Нэшу в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$, необходимо решить следующую систему задач минимизации:

$$W^{(t)K_l}(t, s(t)) = \min_{e_{K_l}} \left\{ \sum_{i \in K_l} \Pi_i(s(t), t, e) \right\} =$$

$$= \min_{e_{K_l}} \left\{ \sum_{i \in K_l} \int_t^\infty h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, K_l \subset \Delta,$$

где $h_i(s(\tau), e(s(\tau))) = (C_i(e_i(s(\tau))) + D_i(s(\tau)))$ – мгновенные затраты предприятия $i \in K_l$ в момент $\tau \in [t, \infty)$; $W^{(t)K_l}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты коалиции K_l в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Динамика системы определяется уравнением (1.1)

Нахождение равновесия по Нэшу в коалиционной игре экологического регулирования было описано в работах [2], [3]. Приведем окончательные результаты:

Оптимальные выбросы для участников коалиции $K_l \subset \Delta$ в рав-

новесии по Нэшу определяются формулой:

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r + \delta}, \quad i \in K_l \subset \Delta. \quad (3.1)$$

Уравнение движения принимает следующий вид:

$$s^{\Delta \setminus \{K_l\}}(t) = \left(s_0 - \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \Delta} \left(k_\xi \frac{\sum_{i \in K_\xi} \pi_i}{r + \delta} \right) \right] \right) \cdot \exp[-\delta(t - t_0)] + \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \Delta} \left(k_\xi \frac{\sum_{i \in K_\xi} \pi_i}{r + \delta} \right) \right].$$

Значение характеристической функции в равновесии по Нэшу равно

$$V^{\Delta(t_0)}(K_l, s(t), t) = W^{(t_0)K_l}(t, s(t)) = \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma(r + \delta)} \sum_{K_\xi \subset \Delta \setminus K_l} \left(k_\xi \sum_{j \in K_\xi} \pi_j \right) - \frac{k_l}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in K_l} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)], \quad (3.2)$$

где функция $W^{(t_0)K_l}(t, s(t))$ вычисляется по формуле

$$W^{(t_0)K_l}(t, s(t)) = [A_{K_l}s(t) + B_{K_l}] \exp[-r(t - t_0)],$$

а коэффициенты A_{K_l} и B_{K_l} имеют вид

$$A_{K_l} = \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r + \delta},$$

$$B_{K_l} = \frac{A_{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_j \subset \Delta \setminus K_l} k_j A_{K_j} - \frac{k_l}{2\gamma} A_{K_l} \right).$$

3.2. Вычисление значения характеристической функции для максимальной коалиции \check{N}

Затраты максимальной коалиции \check{N} представляет собой сумму затрат предприятий из всего множества N . Следовательно, необходимо решить следующую задачу минимизации:

$$\begin{aligned} W^{(t)N}(t, s(t)) &= \min_{e_N} \left\{ \sum_{i \in N} \Pi_i(s_0, t_0, \mathbf{e}) \right\} = \\ &= \min_{e_{K_i}} \left\{ \sum_{i \in N} \int_t^{\infty} h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $h_i(s(\tau), e(s(\tau))) = (C_i(e_i(s(\tau))) + D_i(s(\tau)))$ – мгновенные затраты предприятия $i \in N$ в момент $\tau \in [t, \infty)$; $W^{(t)N}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты коалиции \check{N} в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Динамика системы определяется уравнением (1.1).

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Характеристическая функция $V^{\Delta(t_0)}(\check{N}, s(t), t)$ в игре $\Gamma^{\Delta}(s_0, t_0)$ для максимальной коалиции \check{N} равна*

$$\begin{aligned} V^{\Delta(t_0)}(\check{N}, s(t), t) &= W^{(t_0)N}(t, s(t)) = \\ &= \frac{\sum_{i \in N} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in N} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Решение задачи (3.3) должно удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned} rW^{(t)N}(t, s(t)) - W_t^{(t)N}(t, s(t)) &= \\ = \min_{e_N} \left\{ \sum_{i \in N} h_i(s(\tau), e(s(\tau))) + W_s^{(t)N}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} e_i(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Учитывая формулы для затрат (1.2) и (1.3), уравнение (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & rW^{(t)N}(t, s(t)) - W_t^{(t)N}(t, s(t)) = \\
 & = \min_{e_N} \left\{ \sum_{i \in N} \left(\frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2 + \pi_i s(t) \right) + \right. \\
 & \left. + W_s^{(t)N}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} e_i(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Продифференцировав правую часть (3.5) по e_i , $i \in N$, и приравняв частные производные нулю, получаем

$$-\gamma(\bar{e}_i - e_i(s(t))) + W_s^{(t)N}(t, s(t)) = 0, \quad i \in N,$$

откуда следует, что

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} W_s^{(t)N}(t, s(t)), \quad i \in N. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned}
 & rW^{(t)N}(t, s(t)) - W_t^{(t)N}(t, s(t)) = \\
 & = \frac{n}{2\gamma} (W_s^{(t)N}(t, s(t)))^2 + \sum_{i \in N} (\pi_i s(t)) + \\
 & + W_s^{(t)N}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{\gamma} W_s^{(t)N}(t, s(t)) - \delta s(t) \right). \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Функцию Беллмана можно представить в виде

$$W^{(t)N}(t, s(t)) = A_N s(t) + B_N, \quad (3.8)$$

где A_N и B_N – коэффициенты. Очевидно, что

$$W_s^{(t)N}(t, s(t)) = A_N. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8) и (3.9) в (3.7), находим значения для коэффициентов A_N и B_N :

$$\begin{aligned}
 A_N &= \frac{\sum_{i \in N} \pi_i}{r + \delta}, \\
 B_N &= \frac{A_N}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{2\gamma} A_N \right).
 \end{aligned}$$

Оптимальные выбросы предприятий в коалиции \check{N} принимают вид

$$e_i^{(\Delta)N}(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \frac{\sum_{i \in N} \pi_i}{r + \delta}, \quad i \in N. \quad (3.10)$$

Уравнение движения принимает следующий вид:

$$s^{(\Delta)\{N\}}(t) = \left(s_0 - \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in N} \pi_i \right] \right) \cdot \exp[-\delta(t - t_0)] + \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in N} \pi_i \right]. \quad (3.11)$$

Очевидно, что

$$W^{(t_0)N}(t, s(t)) = W^{(t)N}(t, s(t)) \exp[-r(t - t_0)].$$

Таким образом, характеристическая функция для максимальной коалиции равна

$$\begin{aligned} V^{\Delta(t_0)}(\check{N}, s(t), t) &= W^{(t_0)N}(t, s(t)) = \\ &= \frac{\sum_{i \in N} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in N} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)]. \end{aligned}$$

□

3.3. Вычисление значения характеристической функции для произвольной коалиции $\check{K} \subseteq \check{N}$

Пусть $\check{K} = K_{l_1} \cup K_{l_2} \cup \dots \cup K_{l_k}$ – объединение некоторого подмножества коалиций из разбиения Δ . Для построения характеристической функции $V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t)$ для коалиции \check{K} требуется решить следующую задачу минимизации:

$$\begin{aligned} W^{(t)\check{K}}(t, s(t)) &= \min_{e_{\check{K}}} \left\{ \sum_{i \in \check{K}} \Pi_i(s(t), t, \mathbf{e}) \right\} = \\ &= \min_{e_{\check{K}}} \left\{ \sum_{i \in \check{K}} \int_t^{\infty} h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, \quad \check{K} \subseteq \check{N}, \end{aligned}$$

где $W^{(t)\check{K}}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты коалиции \check{K} в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Считаем, что коалиции $K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}$ используют свои стратегии равновесия по Нэшу в игре коалиций, которые определяются формулой (3.2). Динамика системы определяется уравнением (1.1).

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 3.2. *Характеристическая функция $V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t)$ в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$ для произвольной коалиции $\check{K} \subseteq \check{N}$ равна*

$$V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t) = W^{(t_0)\check{K}}(t, s(t)) = \frac{\sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma(r + \delta)} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(k_\xi \sum_{j \in K_\xi} \pi_j \right) - \frac{\check{k}}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in \check{K}} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)].$$

Доказательство. Функция $W^{(t)\check{K}}(t, s(t))$ должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$rW^{(t)\check{K}}(t, s(t)) - W_t^{(t)\check{K}}(t, s(t)) = \min_{e_{\check{K}}} \left\{ \sum_{i \in \check{K}} h_i(s(\tau), e(s(\tau))) + W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} e_i(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}, \check{K} \subseteq \check{N}.$$

Множество индексов, коалиций, не входящих в \check{K} , обозначим за $M \setminus \check{k}$. Выражение (3.12) можно переписать в виде

$$rW^{(t)\check{K}}(t, s(t)) - W_t^{(t)\check{K}}(t, s(t)) = \min_{e_{\check{K}}} \left\{ \sum_{i \in \check{K}} \left(\frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2 + \pi_i s(t) \right) + W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} e_i(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}, \check{K} \subseteq \check{N}.$$

Продифференцировав правую часть (3.12) по e_i , $i \in \check{K}$, и приравняв частные производные нулю, получаем следующее выражение:

$$-\gamma(\bar{e}_i - e_i(s(t))) + W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) = 0, \quad i \in \check{K} \subseteq \check{N},$$

откуда следует, что

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)), \quad i \in \check{K} \subseteq \check{N}. \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.12), получаем

$$\begin{aligned} rW^{(t)\check{K}}(t, s(t)) - W_t^{(t)\check{K}}(t, s(t)) &= \frac{\check{k}}{2\gamma} \left(W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) \right)^2 + \sum_{i \in \check{K}} (\pi_i s(t)) + \\ &+ W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in \check{K}} \bar{e}_i + \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(\sum_{i \in K_\xi} e_i^{(\Delta)K_\xi}(s(t)) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\check{k}}{\gamma} W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) - \delta s(t) \right), \quad \check{k} = |\check{K}|, \quad \check{K} \subseteq \check{N}. \end{aligned}$$

При этом

$$e_i^{(\Delta)K_\xi} = \bar{e}_i - \frac{\sum_{i \in K_\xi} \pi_i}{\gamma r + \delta}, \quad i \in K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}.$$

Легко проверить, что функция

$$W^{(t)\check{K}}(t, s(t)) = A_{\check{K}} s(t) + B_{\check{K}}, \quad (3.13)$$

где $A_{\check{K}}$ и $B_{\check{K}}$ – коэффициенты, удовлетворяет уравнению Беллмана. Очевидно, что

$$W_s^{(t)\check{K}}(t, s(t)) = A_{\check{K}}. \quad (3.14)$$

Из (3.13), (3.14) и (3.3) находим значения для коэффициентов $A_{\check{K}}$ и $B_{\check{K}}$:

$$\begin{aligned} A_{\check{K}} &= \frac{\sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{r + \delta}, \\ B_{\check{K}} &= \frac{A_{\check{K}}}{r} \left(\sum_{i \in \check{K}} \bar{e}_i + \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(\sum_{i \in K_\xi} e_i^{(\Delta)K_\xi} \right) - \frac{\check{k}}{2\gamma} A_{\check{K}} \right). \quad (3.15) \end{aligned}$$

Оптимальные выборы в коалиции \check{K} задаются формулой

$$e_i^{(\Delta)\check{K}}(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{\sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{\gamma r + \delta}, \quad i \in \check{K} \subset \check{N}. \quad (3.16)$$

Уравнение движения принимает следующий вид:

$$s^{(\Delta)\check{K}}(t) = \left(s_0 - \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{\check{k} \sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{\gamma r + \delta} - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(k_\xi \frac{\sum_{i \in K_\xi} \pi_i}{r + \delta} \right) \right] \right) \cdot \exp[-\delta(t - t_0)] + \frac{1}{\delta} \left[\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{\check{k} \sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{\gamma r + \delta} - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(k_\xi \frac{\sum_{i \in K_\xi} \pi_i}{r + \delta} \right) \right].$$

Легко видеть, что

$$W^{(t_0)\check{K}}(t, s(t)) = W^{(t)\check{K}}(t, s(t)) \exp[-r(t - t_0)].$$

Таким образом, характеристическая функция для коалиции \check{K} равна

$$V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t) = W^{(t_0)\check{K}}(t, s(t)) = \frac{\sum_{i \in \check{K}} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma(r + \delta)} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(k_\xi \sum_{j \in K_\xi} \pi_j \right) - \frac{\check{k}}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in \check{K}} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)].$$

□

3.4. Субаддитивность характеристической функции

$$V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t)$$

Характеристическая функция $V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t)$ имеет вид

$$V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t) = \begin{cases} 0, & K = \emptyset, \\ W^{(t_0)K_l}(t, s(t)), & K = K_l \subset \Delta, \\ W^{(t_0)N}(t, s(t)), & K = \check{N}, \\ W^{(t_0)\check{K}}(t, s(t)), & K = \check{K} \subset \check{N}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Требуется определить, при каких условиях характеристическая функция будет субаддитивной.

Определение 3.1. Будем говорить, что функция $V^{\Delta(t_0)}(K, s(t), t)$ является субаддитивной, если для любых коалиций $\check{K}, \check{L} \subset \check{N}$, $\check{K} \cap \check{L} = \emptyset$ и в любой момент $t \in [t_0, \infty)$ выполняется следующее неравенство:

$$V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s(t), t) + V^{\Delta(t_0)}(\check{L}, s(t), t) \geq V^{\Delta(t_0)}(\check{K} \cup \check{L}, s(t), t) .$$

В работах Козловской Н.В. [2], [3] была доказана субаддитивность характеристической функции в игре между предприятиями. Доказательство субаддитивности характеристической функции в кооперативной игре $\Gamma^{\Delta}(s_0, t_0)$ между коалициями проводится аналогичным образом, но рассматриваются только коалиции из разбиения Δ и их объединения. Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 3.3. Характеристическая функция (3.17) в игре $\Gamma^{\Delta}(s_0, t_0)$ является субаддитивной.

Доказательство. Для доказательства субаддитивности достаточно показать, что для любых $\check{K}, \check{L} \subset \check{N}$, $\check{K} \cap \check{L} = \emptyset$ выполняется

$$W^{(t)\check{K}}(t, s(t)) + W^{(t)\check{L}}(t, s(t)) \geq W^{(t)\check{K} \cup \check{L}}(t, s(t)) .$$

Получаем формулы для каждой из функций:

$$W^{(t)\check{K}}(t, s^{\check{K}}(t)) = A_{\check{K}} s^{\check{K}}(t) + B_{\check{K}} ,$$

$$W^{(t)\check{L}}(t, s^{\check{L}}(t)) = A_{\check{L}} s^{\check{L}}(t) + B_{\check{L}} ,$$

$$W^{(t)\check{K} \cup \check{L}}(t, s^{\check{K} \cup \check{L}}(t)) = A_{\check{K} \cup \check{L}} s^{\check{K} \cup \check{L}}(t) + B_{\check{K} \cup \check{L}} ,$$

где $s^{\check{K}}(t)$, $s^{\check{L}}(t)$ и $s^{\check{K} \cup \check{L}}(t)$ – траектории соответствующих коалиций. Очевидно, что

$$A_{\check{K} \cup \check{L}} = A_{\check{K}} + A_{\check{L}} .$$

Введем обозначения: \check{k} – число предприятий в коалиции \check{K} ; \check{l} – число предприятий в коалиции \check{L} ; \check{k}_{ξ} – число предприятий в коалиции \check{K}_{ξ} , где $\xi \in M$.

Очевидно, что число предприятий коалиции $\check{K} \cup \check{L}$ будет $\check{k} + \check{l}$.

Рассмотрим разность

$$W^{(t)\check{K} \cup \check{L}}(t, s^{\check{K} \cup \check{L}}(t)) - W^{(t)\check{K}}(t, s^{\check{K}}(t)) - W^{(t)\check{L}}(t, s^{\check{L}}(t)) .$$

Раскрывая формулы для каждой из функций, и учитывая (3.15), получаем:

$$\begin{aligned}
 & W^{(t)\check{K}\check{U}\check{L}}(t, s^{\check{K}\check{U}\check{L}}(t)) - W^{(t)\check{K}}(t, s^{\check{K}}(t)) - W^{(t)\check{L}}(t, s^{\check{L}}(t)) = \\
 & = \frac{A_{\check{K}\check{U}\check{L}}}{r} \left(r s^{\check{K}\check{U}\check{L}}(t) + \sum_{i \in \check{K}\check{U}\check{L}} \bar{e}_i + \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \{\check{K}\check{U}\check{L}\}} \left(\sum_{i \in K_\xi} e_i^{(\Delta)K_\xi} \right) - \frac{\check{k} + \check{l}}{2\gamma} A_{\check{K}\check{U}\check{L}} \right) - \\
 & \quad - \frac{A_{\check{K}}}{r} \left(r s^{\check{K}}(t) + \sum_{i \in \check{K}} \bar{e}_i + \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} \left(\sum_{i \in K_\xi} e_i^{(\Delta)K_\xi} \right) - \frac{\check{k}}{2\gamma} A_{\check{K}} \right) - \\
 & \quad - \frac{A_{\check{L}}}{r} \left(r s^{\check{L}}(t) + \sum_{i \in \check{L}} \bar{e}_i + \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{L}} \left(\sum_{i \in K_\xi} e_i^{(\Delta)K_\xi} \right) - \frac{\check{l}}{2\gamma} A_{\check{L}} \right) = \\
 & = \frac{A_{\check{K}\check{U}\check{L}}}{r} \left(r s^{\check{K}\check{U}\check{L}}(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \{\check{K}\check{U}\check{L}\}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \frac{\check{k} + \check{l}}{2\gamma} A_{\check{K}\check{U}\check{L}} \right) - \\
 & \quad - \frac{A_{\check{K}}}{r} \left(r s^{\check{K}}(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \frac{\check{k}}{2\gamma} A_{\check{K}} \right) - \\
 & \quad - \frac{A_{\check{L}}}{r} \left(r s^{\check{L}}(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \frac{\check{l}}{2\gamma} A_{\check{L}} \right) = \\
 & \quad = A_{\check{K}\check{U}\check{L}} s^{\check{K}\check{U}\check{L}}(t) - A_{\check{K}} s^{\check{K}}(t) - A_{\check{L}} s^{\check{L}}(t) + \\
 & \quad + \frac{A_{\check{K}}}{r} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{k}}{2\gamma} A_{\check{K}} \right) + \frac{A_{\check{L}}}{r} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{l}}{2\gamma} A_{\check{L}} \right) - \\
 & \quad - \frac{A_{\check{K}\check{U}\check{L}}}{r} \left(\frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \{\check{K}\check{U}\check{L}\}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{k} + \check{l}}{2\gamma} A_{\check{K}\check{U}\check{L}} \right) = \\
 & = A_{\check{K}\check{U}\check{L}} s^{\check{K}\check{U}\check{L}}(t) - A_{\check{K}} s^{\check{K}}(t) - A_{\check{L}} s^{\check{L}}(t) + \frac{1}{r\gamma} \left(A_{\check{K}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{k}}{2} A_{\check{K}}^2 + \right. \\
 & \quad \left. + A_{\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{l}}{2} A_{\check{L}}^2 - A_{\check{K}\check{U}\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}\check{U}\check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \frac{\check{k} + \check{l}}{2} A_{\check{K}\check{U}\check{L}}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \Lambda^{\check{K}\cup\check{L}} &= A_{\check{K}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{k}}{2} A_{\check{K}}^2 + A_{\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \\ &+ \frac{\check{l}}{2} A_{\check{L}}^2 - A_{\check{K}\cup\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}\cup\check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \frac{\check{k} + \check{l}}{2} A_{\check{K}\cup\check{L}}^2. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) = \sum_{K_\xi \subset \check{N}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \sum_{K_\xi \subset \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}).$$

Тогда $\Lambda^{\check{K}\cup\check{L}}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Lambda^{\check{K}\cup\check{L}} &= A_{\check{K}\cup\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{K}\cup\check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - A_{\check{K}} \sum_{K_\xi \subset \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \\ &- A_{\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) + \frac{\check{k}}{2} A_{\check{K}}^2 + \frac{\check{l}}{2} A_{\check{L}}^2 - \frac{\check{k} + \check{l}}{2} A_{\check{K}\cup\check{L}}^2 = \\ &= A_{\check{K}} \sum_{K_\xi \subset \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) + A_{\check{L}} \sum_{K_\xi \subset \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \\ &- (\check{k} + \check{l}) A_{\check{K}} A_{\check{L}} - \frac{\check{l}}{2} A_{\check{K}}^2 - \frac{\check{k}}{2} A_{\check{L}}^2 = A_{\check{K}} \left(\sum_{K_\xi \subset \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \check{l} A_{\check{L}} \right) + \\ &+ A_{\check{L}} \left(\sum_{K_\xi \subset \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \check{k} A_{\check{K}} \right) - \frac{\check{l}}{2} A_{\check{K}}^2 - \frac{\check{k}}{2} A_{\check{L}}^2. \end{aligned}$$

Отметим, что $\sum_{K_\xi \subset \check{L}} k_\xi = \check{l}$; $\sum_{K_\xi \subset \check{K}} k_\xi = \check{k}$; $\sum_{K_\xi \subset \check{L}} A_{K_\xi} = A_{\check{L}}$; $\sum_{K_\xi \subset \check{K}} A_{K_\xi} = A_{\check{K}}$. Учитывая неотрицательность π_j , $j \in N$ и k_ξ , $\xi \in M$, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{K_\xi \subset \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \check{k} A_{\check{K}} &\leq 0, \\ \sum_{K_\xi \subset \check{L}} (k_\xi A_{K_\xi}) - \check{l} A_{\check{L}} &\leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda^{\check{K}\cup\check{L}} \leq 0$, для любых $\check{K}, \check{L} \subset \check{N}$, $\check{K} \cap \check{L} = \emptyset$.

Считается, что до момента времени τ коалиции действуют кооперативно, и траектория задается формулой (3.11). Если в момент τ кооперация распадается и создается коалиция \check{K} , то траектория загрязнения $s(t)$ определяется подстановкой в уравнение динамики (1.1) формул выбросов $e_i^{(\Delta)\check{K}}$ (3.16) для $i \in \check{K}$ и $e_i^{(\Delta)K_l}$ (3.1) для $i \in \check{N} \setminus \check{K}$. Следовательно, ее формула будет следующей:

$$s^{(\Delta)\check{K}}(t) = \frac{G_{\check{K}}}{\delta} (1 - \exp[-\delta(t - \tau)]) + s^{(\Delta)N}(\tau) \exp[-\delta(t - \tau)], \quad (3.18)$$

где

$$G_{\check{K}} = \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{\check{k}}{\gamma} A_{\check{K}} - \frac{1}{\gamma} \sum_{K_\xi \subset \check{N} \setminus \check{K}} (k_\xi A_{K_\xi}).$$

Рассмотрим теперь разность

$$A_{\check{K} \cup \check{L}} s^{\check{K} \cup \check{L}}(t) - A_{\check{K}} s^{\check{K}}(t) - A_{\check{L}} s^{\check{L}}(t).$$

Учитывая (3.18), получаем

$$\begin{aligned} & A_{\check{K} \cup \check{L}} s^{\check{K} \cup \check{L}}(t) - A_{\check{K}} s^{\check{K}}(t) - A_{\check{L}} s^{\check{L}}(t) = \\ &= \frac{1}{\delta} (1 - \exp[-\delta(t - \tau)]) (A_{\check{K} \cup \check{L}} G_{\check{K} \cup \check{L}} - A_{\check{K}} G_{\check{K}} - A_{\check{L}} G_{\check{L}}) = \\ &= \frac{\Lambda^{\check{K} \cup \check{L}}}{\delta \gamma} (1 - \exp[-\delta(t - \tau)]). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} & W^{(t)\check{K} \cup \check{L}}(t, s^{\check{K} \cup \check{L}}(t)) - W^{(t)\check{K}}(t, s^{\check{K}}(t)) - \\ & - W^{(t)\check{L}}(t, s^{\check{L}}(t)) = \frac{\Lambda^{\check{K} \cup \check{L}}}{\delta \gamma} (1 - \exp[-\delta(t - \tau)]) + \frac{\Lambda^{\check{K} \cup \check{L}}}{r \gamma}. \end{aligned}$$

Поскольку $r, \gamma, \delta \geq 0$ и $\Lambda^{\check{K} \cup \check{L}} \leq 0$, то получаем, что

$$W^{(t)\check{K} \cup \check{L}}(t, s^{\check{K} \cup \check{L}}(t)) - W^{(t)\check{K}}(t, s^{\check{K}}(t)) - W^{(t)\check{L}}(t, s^{\check{L}}(t)) \leq 0,$$

что и требовалось доказать. \square

4. Процедура распределения прибыли в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$

Будем считать, что участники кооперации коалиций делят полученный выигрыш в соответствии с динамическим вектором Шепли. Поскольку участниками игры $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$ являются не отдельные предприятия, а их коалиции, то, формула компонент вектора Шепли будет несколько отличаться от стандартной тем, что рассчитываются доли тех коалиций K_l , которые принадлежат разбиению Δ . Формула для компоненты вектора Шепли принимает следующий вид:

$$\nu_{K_l}(V) = \sum_{\check{K} \subseteq \check{N}} \frac{(k-1)!(m-k)!}{m!} \left[V(\check{K}) - V(\check{K} \setminus K_l) \right].$$

Здесь $\check{K} = K_{l_1} \cup K_{l_2} \cup \dots \cup K_{l_k}$ – объединение некоторого подмножества коалиций из разбиения Δ , K_{l_ξ} , $\xi = 1, \dots, k$, k – число коалиций-участников игры, входящих в коалицию \check{K} . На промежутке $[t_0, \infty)$ коалиции используют управления $e_i^{(\Delta)N}(s(t))$, вычисляемые по формуле (3.10).

В начальный момент времени t_0 доля затрат коалиции $K_l \subset \Delta$ будет равна

$$\begin{aligned} \nu_{K_l}^{(t_0)}(t_0, s_0) = \sum_{\check{K} \subseteq \check{N}} \frac{(k-1)!(m-k)!}{m!} \left[V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s_0, t_0) - \right. \\ \left. - V^{\Delta(t_0)}(\check{K} \setminus K_l, s_0, t_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Учитывая, что $V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s_0, t_0) = W^{(t_0)\check{K}}(t_0, s_0)$, можно переписать (4.1) в следующем виде:

$$\nu_{K_l}^{(t_0)}(t_0, s_0) = \sum_{\check{K} \subseteq \check{N}} \frac{(k-1)!(m-k)!}{m!} \left[W^{(t_0)\check{K}}(t_0, s_0) - W^{(t_0)\check{K} \setminus K_l}(t_0, s_0) \right].$$

Вектор Шепли должен поддерживаться на протяжении всей игры, поэтому в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \sum_{\check{K} \subseteq \check{N}} \frac{(k-1)!(m-k)!}{m!} \left[W^{(t_0)\check{K}}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - \right. \\ \left. - W^{(t_0)\check{K} \setminus K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) \right]. \end{aligned}$$

Из субаддитивности характеристической функции $V^{\Delta(t_0)}(\check{K}, s^{(\Delta)N}(t), t)$ следует индивидуальная рациональность и эффективность вектора Шепли:

$$\begin{aligned} \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) &\leq W^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)), \\ \sum_{K_l \subset \Delta} \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) &= W^{(t_0)N}(t, s^{(\Delta)N}(t)). \end{aligned}$$

Для реализации динамического вектора Шепли необходимо определить процедуру распределения дележа [7]. Определим процедуру распределения дележа, как функцию $\beta_{\Delta}(t) = \{\beta_{K_l}(t)\}_{t \in [t_0, \infty)}$, такую, что

$$\nu_{K_l}^{(t_0)}(t_0, s_0) = \int_{t_0}^{\infty} \beta_{K_l}(\tau) \exp[-r(\tau - t_0)] d\tau. \quad (4.2)$$

Функция $\beta_{K_l}(\tau)$ – это мгновенные затраты, которые несет коалиция-участник K_l в момент τ .

Для поддержания вектора Шепли необходимо выполнение равенства

$$\nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \int_t^{\infty} \beta_{K_l}(\tau) \exp[-r(\tau - t)] d\tau. \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) следует

$$\nu_{K_l}^{(t_0)}(t_0, s_0) = \int_{t_0}^t \beta_{K_l}(\tau) \exp[-r(\tau - t_0)] d\tau + \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)).$$

Последнее условие означает динамическую устойчивость решения относительно коалиций-участников K_l .

Поскольку в каждый момент $\tau \in [t_0, \infty)$ происходит только перераспределение общих затрат, сумма мгновенных затрат остается неизменной:

$$\sum_{K_l \subset \Delta} \beta_{K_l}(\tau) = \sum_{K_l \subset \Delta} \sum_{i \in K_l} h_i \left(\tau, e_i^{(\Delta)N}(s^{(\Delta)N}(\tau)) \right).$$

Общая формула процедуры распределения дележа $\beta_{K_l}(\tau)$ имеет вид

$$\beta_{K_l}(\tau) = r \sum_{\check{K} \subseteq \check{N}} \frac{(k-1)!(m-k)!}{m!} \left[W^{(t)\check{K}}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - W^{(t)\check{K} \setminus K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) \right] - A_{K_l} \left(\sum_{i \in N} e_i^{(\Delta)N}(s^{(\Delta)N}(\tau)) - \delta s^{(\Delta)N}(\tau) \right).$$

5. Распределение прибыли внутри коалиции K_l

Выигрыш, полученный в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$ коалиция K_l делит между своими предприятиями-участниками. Требуется вычислить долю от общих затрат для каждого предприятия $i \in K_l$. Предполагается, что внутри коалиции K_l предприятия действуют кооперативно, используя в качестве дележа динамический вектор Шепли. Для его реализации необходимо определить еще одну процедуру распределения дележа. Необходимо учитывать, что выигрыш коалиции K_l , равный компоненте вектора Шепли $\nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t))$, в общем случае не совпадает с тем выигрышем, который коалиция получила бы, играя самостоятельно. Будем рассчитывать выигрыш каждого предприятия следующим образом.

Определим коалиционную игру $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$, в которой участвуют коалиция K_l и коалиция $\check{N} \setminus K_l$. Найдем характеристическую функцию в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ для коалиции K_l и всех ее подкоалиций $L \subseteq K_l$. При этом предполагается, что предприятия, входящие в коалицию $\check{N} \setminus K_l$, используют свои оптимальные коалиционные стратегии $e^{(\Delta)N}(s^{(\Delta)N}(t))$ в игре $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$, а предприятия, входящие в K_l , но не входящие в L – свои равновесные по Нэшу стратегии в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$. Характеристическую функцию в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ обозначим через $V^{K_l(t_0)}(L, s(t), t)$, $L \subseteq K_l$. Вычислив характеристическую функцию, вычислим компоненты вектора Шепли для предприятий $i \in K_l$, $\left\{ \bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) \right\}_{i \in K_l}$. Зная значение характеристической функции $V^{K_l(t_0)}(K_l, s^{(\Delta)N}(t), t)$, определим долю выигрыша каждого предприятия i , ω_i :

$$\omega_i(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \frac{\bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{V^{K_l(t_0)}(K_l, s^{(\Delta)N}(t), t)}.$$

Тогда выигрыш предприятия в соответствии с долей по вектору Шепли будет равен

$$\begin{aligned} \nu_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) &= \omega_i(t, s^{(\Delta)N}(t)) \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \\ &= \frac{\bar{\nu}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{V^{K_l(t_0)}(K_l, s^{(\Delta)N}(t), t)} \nu_{K_l}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)). \end{aligned}$$

Чтобы реализовать данные компоненты, необходимо определить процедуру распределения дележа.

5.1. Вычисление значения характеристической функции для максимальной коалиции K_l в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$

Для вычисления характеристической функции для максимальной коалиции K_l необходимо решить следующую задачу минимизации:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t)) &= \min_{e_{K_l}} \left\{ \sum_{i \in K_l} \Pi_i(s(t), t, \mathbf{e}) \right\} = \\ &= \min_{e_{K_l}} \left\{ \sum_{i \in K_l} \int_t^\infty h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, \end{aligned}$$

где \mathbf{e} – ситуация в игре; $\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты коалиции K_l в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Динамика системы определяется уравнением (1.1).

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 5.1. *Характеристическая функция $V^{K_l(t_0)}(K_l, s(t), t)$ в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ для максимальной коалиции K_l равна*

$$\begin{aligned} V^{K_l(t_0)}(K_l, s(t), t) &= \bar{W}^{(t_0)K_l}(t, s(t)) = \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n - k_l}{\gamma} \sum_{j \in N} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \frac{k_l}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in K_l} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Функция $\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t))$ должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned}
& r\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)K_l}(t, s(t)) = \\
& = \min_{e_{K_l}} \left\{ \sum_{i \in K_l} \left(\frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2 + \pi_i s(t) \right) + \right. \\
& \left. + \bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in K_l} e_i(s(t)) + \sum_{j \in N \setminus K_l} e_j^{(\Delta)N}(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}. \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Продифференцировав правую часть (5.1) по e_i , $i \in K_l$, и приравняв частные производные нулю, получаем

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)), \quad i \in K_l. \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем

$$\begin{aligned}
& r\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)K_l}(t, s(t)) = \\
& = \frac{k_l}{2\gamma} (\bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)))^2 + \sum_{i \in K_l} (\pi_i s(t)) + \\
& + \bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \frac{k_l}{\gamma} \bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)) - \delta s(t) \right). \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Функцию Беллмана $\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t))$ представляем в виде

$$\bar{W}^{(t)K_l}(t, s(t)) = A_{K_l}^{K_l} s(t) + B_{K_l}^{K_l},$$

где $A_{K_l}^{K_l}$ и $B_{K_l}^{K_l}$ – коэффициенты.

Очевидно, что

$$\bar{W}_s^{(t)K_l}(t, s(t)) = A_{K_l}^{K_l}. \quad (5.4)$$

Из (5.4), (5.3) и (5.2) получаем

$$\begin{aligned}
A_{K_l}^{K_l} &= \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r + \delta}, \\
B_{K_l}^{K_l} &= \frac{A_{K_l}^{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \frac{k_l}{2\gamma} A_{K_l}^{K_l} \right).
\end{aligned}$$

Оптимальные выбросы в коалиции K_l задаются формулой

$$e_i^{(K_l)K_l}(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \frac{\sum_{i \in K_l} \pi_i}{r + \delta}, \quad i \in K_l.$$

Таким образом, характеристическая функция для коалиции K_l имеет вид, указанный в формулировке теоремы. \square

5.2. Построение характеристической функции для равновесия по Нэшу в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$

Для построения равновесия по Нэшу в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ требуется решить следующую систему задач минимизации:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(t)i}(t, s(t)) &= \min_{e_i} \{ \Pi_i(s(t), t, \mathbf{e}) \} = \\ &= \min_{e_i} \left\{ \int_t^\infty h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, \quad i \in K_l, \end{aligned}$$

где \mathbf{e} – ситуация в игре; $\bar{W}^{(t)i}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты предприятия $i \in K_l$ в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Динамика системы определяется уравнением (1.1).

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 5.2. *Характеристическая функция $V^{K_l(t_0)}(i, s(t), t)$ в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ в ситуации равновесия по Нэшу равна*

$$\begin{aligned} V^{K_l(t_0)}(i, s(t), t) &= \bar{W}^{(t_0)i}(t, s(t)) = \\ &= \frac{\pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n - k_l}{\gamma} \sum_{j \in N} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l} \frac{\pi_j}{r + \delta} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\pi_i}{r + \delta} \right) \exp[-r(t - t_0)], \quad i \in K_l. \end{aligned}$$

Доказательство. Функции $\bar{W}^{(t)i}(t, s(t))$, $i \in K_l$ должны удовлетворять следующему уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned} r\bar{W}^{(t)i}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)i}(t, s(t)) &= \min_{e_i} \left\{ \frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2 + \pi_i s(t) + \right. \\ &\left. + \bar{W}_s^{(t)i}(t, s(t)) \left(\sum_{j \in K_l} e_j(s(t)) + \sum_{j \in N \setminus K_l} e_j^{(\Delta)N}(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}, \quad i \in K_l. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Дифференцируя правую часть уравнения (5.5) по e_i и приравнявая частные производные нулю, получаем

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \bar{W}_s^{(t)i}(t, s(t)), \quad i \in K_l. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.5) и учитывая (3.16), получаем

$$\begin{aligned} & r\bar{W}^{(t)i}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)i}(t, s(t)) = \\ & = \frac{1}{2\gamma} (\bar{W}_s^{(t)i}(t, s(t)))^2 + \pi_i s(t) + \bar{W}_s^{(t)i}(t, s(t)) \cdot \\ & \cdot \left(\sum_{j \in N} \bar{e}_j - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l} \bar{W}_s^{(t)j}(t, s(t)) - \delta s(t) \right), \quad i \in K_l. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Функцию Беллмана $\bar{W}^{(t)i}(t, s(t))$ представляем в виде

$$\bar{W}^{(t)i}(t, s(t)) = A_i^{K_l} s(t) + B_i^{K_l}. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в (5.7), находим формулы для коэффициентов $A_i^{K_l}$ и $B_i^{K_l}$:

$$\begin{aligned} A_i^{K_l} &= \frac{\pi_i}{r + \delta}, \\ B_i^{K_l} &= \frac{A_i^{K_l}}{r} \left(\sum_{j \in N} \bar{e}_j - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \frac{1}{\gamma} A_{K_l} + \frac{1}{2\gamma} A_i^{K_l} \right). \end{aligned}$$

Выбросы предприятия $i \in K_l$ в равновесии по Нэшу будут равны

$$e_i^{(K_l)}(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \frac{\pi_i}{r + \delta}, \quad i \in K_l.$$

Затраты предприятия $i \in K_l$ будут равны

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(t)i}(t, s(t)) &= \frac{\pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{j \in N} \bar{e}_j - \right. \\ & \left. - \frac{n - k_l}{\gamma} \sum_{j \in N} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l} \frac{\pi_j}{r + \delta} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\pi_i}{r + \delta} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическая функция в равновесии по Нэшу имеет вид, указанный в формулировке теоремы. \square

5.3. Вычисление значения характеристической функции для произвольной коалиции $L \subset K_l$

Вычислим теперь характеристическую функцию для произвольной коалиции $L \subset K_l$. Функция $V^{K_l(t_0)}(L, s(t), t)$ находится посредством решения следующей системы задач минимизации:

$$\begin{aligned} \bar{W}^{(t)L}(t, s(t)) &= \min_{e_L} \left\{ \sum_{i \in L} \Pi_i(s(t), t, e) \right\} = \\ &= \min_{e_L} \left\{ \sum_{i \in L} \int_t^\infty h_i(s(\tau), e(s(\tau))) \exp[-r(\tau - t)] dt \right\}, L \subset K_l, \end{aligned}$$

где $\bar{W}^{(t)L}(t, s(t))$ – функция Беллмана, определяющая минимальные затраты коалиции L в подыгре, начинающейся в момент $t \in [t_0, \infty)$. Динамика системы определяется уравнением (1.1).

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема 5.3. *Характеристическая функция $V^{K_l(t_0)}(L, s(t), t)$ в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ для произвольной коалиции $L \subset K_l$ равна*

$$\begin{aligned} V^{K_l(t_0)}(L, s(t), t) &= \bar{W}^{(t_0)L}(t, s(t)) = \\ &= \frac{\sum_{i \in L} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(rs(t) + \sum_{j \in N} \bar{e}_j - \frac{n - k_l}{\gamma} \sum_{j \in N} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \frac{l}{2\gamma(r + \delta)} \sum_{i \in L} \pi_i \right) \exp[-r(t - t_0)]. \end{aligned}$$

Доказательство. Функция $\bar{W}^{(t)L}(t, s(t))$ должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\begin{aligned} r\bar{W}^{(t)L}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)L}(t, s(t)) &= \min_{e_L} \left\{ \sum_{i \in L} \left(\frac{\gamma}{2} (\bar{e}_i - e_i(s(t)))^2 + \pi_i s(t) \right) + \right. \\ &+ \bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)) \left(\sum_{i \in L} e_i(s(t)) + \sum_{j \in K_l \setminus L} e_j^{(K_l)}(s(t)) + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{j \in N \setminus K_l} e_j^{(\Delta)N}(s(t)) - \delta s(t) \right) \right\}, L \subset K_l. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Продифференцировав правую часть уравнения (5.9) по e_i , $i \in L$, и приравняв частные производные нулю, получаем

$$e_i(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{1}{\gamma} \bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)), \quad i \in L \subset K_l. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.10) в (5.9), получаем

$$\begin{aligned} r\bar{W}^{(t)L}(t, s(t)) - \bar{W}_t^{(t)L}(t, s(t)) &= \frac{l}{2\gamma} (\bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)))^2 + \sum_{i \in L} (\pi_i s(t)) + \\ &+ \bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)) \left(\sum_{j \in N} \bar{e}_j - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \right. \\ &\left. - \frac{l}{\gamma} \bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)) - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} \bar{W}_s^{(t)j}(t, s(t)) - \delta s(t) \right), \quad l = |L|, L \subset K_l. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Функцию Беллмана $\bar{W}^{(t)L}(t, s(t))$ представляем в виде

$$\bar{W}^{(t)L}(t, s(t)) = A_L^{K_l} s(t) + B_L^{K_l}, \quad (5.12)$$

где $A_L^{K_l}$ и $B_L^{K_l}$ – коэффициенты.

Очевидно, что

$$\bar{W}_s^{(t)L}(t, s(t)) = A_L^{K_l}. \quad (5.13)$$

Из (5.13), (5.12) и (5.11) получаем

$$\begin{aligned} A_L^{K_l} &= \frac{\sum_{i \in L} \pi_i}{r + \delta}, \\ B_L^{K_l} &= \frac{A_L^{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n - k_l}{\gamma} A_N - \frac{l}{2\gamma} A_L^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} A_j^{K_l} \right). \end{aligned}$$

Оптимальные выбросы в коалиции L задаются формулой

$$e_i^{(K_l)L}(s(t)) = \bar{e}_i - \frac{\sum_{i \in L} \pi_i}{\gamma r + \delta}, \quad i \in L \subset K_l.$$

Таким образом, характеристическая функция для коалиции L равна

$$\begin{aligned} V^{K_l(t_0)}(L, s(t), t) &= \bar{W}^{(t_0)L}(t, s(t)) = \\ &= \frac{\sum_{i \in L} \pi_i}{r(r + \delta)} \left(r s(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n - k_l}{\gamma} \sum_{j \in N} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} \frac{\pi_j}{r + \delta} - \frac{l}{2\gamma} \sum_{i \in L} \frac{\pi_i}{r + \delta} \Big) \exp[-r(t - t_0)] .$$

□

5.4. Субаддитивность характеристической функции $V^{K_l(t_0)}(K, s(t), t)$

Характеристическая функция $V^{K_l(t_0)}(K, s(t), t)$ имеет вид

$$V^{K_l(t_0)}(K, s(t), t) = \begin{cases} 0, & K = \emptyset, \\ \bar{W}^{(t_0)K_l}(t, s(t)), & K = K_l, \\ \bar{W}^{(t_0)i}(t, s(t)), & K = i \in K_l, \\ \bar{W}^{(t_0)L}(t, s(t)), & K = L \subset K_l. \end{cases} \quad (5.14)$$

Требуется определить, при каких условиях характеристическая функция будет субаддитивной.

В работах Козловской Н.В. [2], [3] была доказана субаддитивность характеристической функции в игре между предприятиями. Доказательство субаддитивности характеристической функции в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ проводится аналогичным образом, но с учетом остальных коалиций из разбиения Δ . Сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.4. *Характеристическая функция (5.14) в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ является субаддитивной.*

Доказательство. Для доказательства субаддитивности достаточно показать следующее:

$$W^{(t)K \cup L}(t, s(t)) \leq W^{(t)K}(t, s(t)) + W^{(t)L}(t, s(t)) ,$$

где $K, L \subset K_l$, и $K \cap L = \emptyset$.

Из формулы (5.12) получаем формулы для каждой из функций:

$$W^{(t)K}(t, s^K(t)) = A_K^{K_l} s^K(t) + B_K^{K_l} ,$$

$$W^{(t)L}(t, s^L(t)) = A_L^{K_l} s^L(t) + B_L^{K_l} ,$$

$$W^{(t)K \cup L}(t, s^{K \cup L}(t)) = A_{K \cup L}^{K_l} s^{K \cup L}(t) + B_{K \cup L}^{K_l} ,$$

где $s^K(t)$, $s^L(t)$ и $s^{KUL}(t)$ – траектории соответствующих коалиций. Очевидно, что

$$A_{KUL}^{K_l} = A_K^{K_l} + A_L^{K_l}. \quad (5.15)$$

Рассмотрим разность

$$W^{(t)KUL}(t, s^{KUL}(t)) - W^{(t)K}(t, s^K(t)) - W^{(t)L}(t, s^L(t)).$$

Раскрывая формулы каждой из функций, и учитывая (5.15), получаем

$$\begin{aligned} & W^{(t)KUL}(t, s^{KUL}(t)) - W^{(t)K}(t, s^K(t)) - W^{(t)L}(t, s^L(t)) = \\ &= \frac{A_{KUL}^{K_l}}{r} \left(r s^{KUL}(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{k+l}{2\gamma} A_{KUL}^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus \{KUL\}} A_j^{K_l} \right) - \\ & - \frac{A_K^{K_l}}{r} \left(r s^K(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{k}{2\gamma} A_K^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus K} A_j^{K_l} \right) - \\ & - \frac{A_L^{K_l}}{r} \left(r s^L(t) + \sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{l}{2\gamma} A_L^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} A_j^{K_l} \right) = \\ & = A_{KUL}^{K_l} s^{KUL}(t) - A_K^{K_l} s^K(t) - A_L^{K_l} s^L(t) + \\ & + \frac{A_{KUL}^{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{k+l}{2\gamma} A_{KUL}^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus \{KUL\}} A_j^{K_l} \right) - \\ & - \frac{A_K^{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{k}{2\gamma} A_K^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus K} A_j^{K_l} \right) - \\ & - \frac{A_L^{K_l}}{r} \left(\sum_{i \in N} \bar{e}_i - \frac{n-k_l}{\gamma} A_N - \frac{l}{2\gamma} A_L^{K_l} - \frac{1}{\gamma} \sum_{j \in K_l \setminus L} A_j^{K_l} \right) = \\ & = A_{KUL}^{K_l} s^{KUL}(t) - A_K^{K_l} s^K(t) - A_L^{K_l} s^L(t) + \\ & + \frac{1}{r\gamma} \left(\frac{k}{2} (A_K^{K_l})^2 + A_K^{K_l} A_{K_l \setminus K}^{K_l} + \frac{l}{2} (A_L^{K_l})^2 + A_L^{K_l} A_{K_l \setminus L}^{K_l} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{k+l}{2} (A_{KUL}^{K_l})^2 - A_{KUL}^{K_l} A_{K_l \setminus KUL}^{K_l} \right). \end{aligned}$$

Остается доказать, что полученное выражение ≤ 0 . Доказательство приведено в работах Козловской Н.В. [2], [3].

Таким образом, характеристическая функция $V^{K_l(t_0)}(K, s(t), t)$ является субаддитивной. \square

6. Процедура распределения прибыли внутри коалиции K_l

Предполагаем, что участники коалиции K_l делят полученный выигрыш пропорционально вектору Шепли. Коалиция K_l участвует в игре коалиций $\Gamma^\Delta(s_0, t_0)$, поэтому ее участники будут использовать набор оптимальных управлений $e_i^{(\Delta)N}(s(t))$, вычисляемые по формуле (3.10). Чтобы найти выигрыш предприятия $i \in K_l$, необходимо вычислить долю этого предприятия в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$, равную компоненте вектора Шепли в этой игре. Эту долю обозначим через $\bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))$.

В начальный момент времени t_0 доля предприятия $i \in K_l$ в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$ будет равна

$$\begin{aligned} & \bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t_0, s_0) = \\ & = \sum_{K \subseteq K_l} \frac{(k-1)!(k_l-k)!}{k_l!} [V^{K_l(t_0)}(K, s_0, t_0) - V^{K_l(t_0)}(K \setminus i, s_0, t_0)], \end{aligned}$$

где $k = |K|$ – число участников коалиции $K \subseteq K_l$. Чтобы данный вектор Шепли поддерживался на протяжении всего времени игры, в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} & \bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \sum_{K \subseteq K_l} \frac{(k-1)!(k_l-k)!}{k_l!} \cdot \\ & \cdot [V^{K_l(t_0)}(K, s^{(\Delta)N}(t), t) - V^{K_l(t_0)}(K \setminus i, s^{(\Delta)N}(t), t)]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Учитывая формулу (5.14), можно переписать (6.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \bar{v}_i^{(t_0)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \sum_{K \subseteq K_l} \frac{(k-1)!(k_l-k)!}{k_l!} \cdot \\ & \cdot [\bar{W}^{(t_0)K}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - \bar{W}^{(t_0)K \setminus i}(t, s^{(\Delta)N}(t))]. \end{aligned}$$

Определив формулу для компонент вектора Шепли в игре $\Gamma^{K_l}(s_0, t_0)$, вычисляем долю каждого предприятия $i \in K_l$:

$$\omega_i(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \frac{\bar{\nu}_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\sum_{j \in K_i} \bar{\nu}_j^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))} = \frac{\bar{\nu}_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\bar{W}^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))}.$$

Тогда реальный выигрыш предприятия в соответствии с долей по вектору Шепли будет равен:

$$\begin{aligned} \nu_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t)) &= \omega_i(t, s^{(\Delta)N}(t)) \nu_{K_i}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \\ &= \frac{\bar{\nu}_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\bar{W}^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))} \nu_{K_i}^{(t_0)}(t, s^{(\Delta)N}(t)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для реализации данного выигрыша необходимо в каждый момент времени выполнять перераспределение общих затрат. Определяем процедуру распределения дележа [7], как функцию $\beta^{K_i}(t) = \left\{ \beta_i^{K_i}(t) \right\}_{t=t_0}^T$, такую, что

$$\nu_i^{(t_0)K_i}(t_0, s_0) = \int_{t_0}^{\infty} \beta_i^{K_i}(\tau) \exp[-r(\tau - t_0)] d\tau, \quad (6.3)$$

а в момент $t \in [t_0, \infty)$:

$$\nu_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t)) = \int_t^{\infty} \beta_i^{K_i}(\tau) \exp[-r(\tau - t_0)] d\tau. \quad (6.4)$$

Функция $\beta_i^{K_i}(\tau)$ – это мгновенные затраты, которые несет предприятие i в момент τ . Из (6.3) и (6.4) получаем

$$\nu_i^{(t_0)K_i}(t_0, s_0) = \int_{t_0}^t \beta_i^{K_i}(\tau) \exp[-r(\tau - t_0)] d\tau + \nu_i^{(t_0)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t)). \quad (6.5)$$

Компоненты $\beta_i^{K_i}(t)$ находятся из формулы

$$\beta_i^{K_i}(t) = r \nu_i^{(t)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - \frac{d\nu_i^{(t)K_i}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{dt}.$$

Учитывая (6.2), формула для компоненты $\beta_i^{K_l}(t)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta_i^{K_l}(t) = & r \frac{\bar{\nu}_i^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\bar{W}^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))} \nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - \\ & - \nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) d \left(\frac{\bar{\nu}_i^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\bar{W}^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))} \right) / dt + \\ & + \frac{\bar{\nu}_i^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{\bar{W}^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))} \frac{d\nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{dt}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Полная формула для компонент $\beta_i^{K_l}(t)$ не приводится ввиду громоздкости.

Покажем динамическую устойчивость построенного решения. Для этого необходимо показать, что в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ выполняется

$$\sum_{i \in K_l} \beta_i^{K_l}(t) = \beta_{K_l}(t).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in K_l} \bar{\nu}_i^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)) &= \bar{W}^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t)), \\ \sum_{i \in K_l} \frac{d\bar{\nu}_i^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{dt} &= \frac{d\bar{W}^{(t)K_l}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{dt}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Как видно из (6.6) компонента $\beta_i^{K_l}(t)$ состоит из трех частей. Просуммировав компоненты $\left\{ \beta_i^{K_l}(t) \right\}_{i \in K_l}$, легко установить, что первые части в сумме дают $r\nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t))$, вторые, учитывая (6.7) взаимно сокращаются, а третьи части в сумме дают $-d\nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) / dt$. Таким образом

$$\sum_{i \in K_l} \beta_i^{K_l}(t) = r\nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t)) - \frac{d\nu_{K_l}^{(t)}(t, s^{(\Delta)N}(t))}{dt} = \beta_{K_l}(t).$$

Тем самым, показана динамическая устойчивость двойной кооперации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры*. Екатеринбург: Наука, 1993.
2. Козловская Н.В. *Супераддитивность характеристической функции в теоретико-игровой модели территориального экологического производства* // Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». 2010. С. 623–627.
3. Козловская Н.В., Петросян Л.А., Ильина А.В. *Коалиционное решение в задаче сокращения вредных выбросов* // Вестник СПбГУ, сер. 10. 2010. Вып.2. С. 46–59.
4. Колабутин Н.В. *Количественное моделирование динамически устойчивого совместного предприятия* // Труды 39-й международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость». 2008. С. 47–51.
5. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. *О дифференциальной игре на перехват* // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Вып. 16. № 5. С. 113–126.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
7. Петросян Л.А. *Устойчивые решения дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского Университета. 1977. Вып. 19. С. 46–52.
8. Петросян Л.А., Громова Е.В. *Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх* // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 193–203.
9. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Кооперативные дифференциальные игры и их приложения*. Томск: Изд-во ТГУ, 1982.
10. Haurie A. *A note on nonzero-sum differential games with bargaining solutions* // Journal of Optimization Theory and Application. 1976. V. 18. P. 31–39.
11. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Fish wars with many players* // Int. Game Theory Review. 2010. V. 12. N 4. P. 385–405.

12. Mazalov V.V., Rettieva A.N. *Cooperation Maintenance in Fishery Problems* // Fishery Management. Nova Science Publ. P. 151–198.
13. Petrosyan L.A. *Differential Games of Pursuit*. World Scientific, Singapore. 1993.
14. Petrosjan L. A., Zenkevich N.A. *Game Theory*. World Scientific Publishing, Singapore. 1996.
15. Petrosjan, L. A., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27. N 3. P. 381–398.
16. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Proportional time-consistent solution in differential games* // International Conference on Logic Game Theory and Social Choice. Yanovskaya E.B. (ed). 2001. P. 254–256.
17. Yeung D.W.K., Petrosjan L. A. *Cooperative Stochastic Differential Games*. Springer, 2006.
18. Yeung D.W.K., Petrosjan L. A. *Subgame Consistent Economic Optimization*. Springer, 2012.
19. Zenkevich N.A., Kolabutin N.V. *Quantitative Modeling of Dynamic Stable Joint Venture* // Preprint Volume of the 11th IFAC Symposium "Computational Economics and Financial and Industrial Systems". 2007. IFAC, Dogus University of Istanbul, Turkey P. 68–74.

TWO-LEVEL COOPERATION IN THE GAME OF POLLUTION COST REDUCTION

Nikolay V. Kolabutin, Saint-Petersburg State University,
Saint-Petersburg (n.kolabutin@spbu.ru).

Abstract: Cooperative differential games are one of most actual parts of the theory of games. They describe well the conflict-controlled processes in management and economics. The solution of differential game is a cooperative agreement, and the selected principle of optimality, according to which the received payoff is distributed. Unfortunately the initially

selected cooperative solution often loses its optimality over time. Then the question arose about the time consistency of the cooperative solutions or dynamic stability. The concept of dynamic stability was formalized by L.A. Petrosyan. Cooperative solution is dynamically stable, if the selected principle of optimality keeps its optimality throughout the gameplay. For dynamic stability is necessary to carry out the regularization of the chosen principle of optimality. L.A. Petrosyan proposed to use the redistribution of received payoff in accordance with the "imputation distribution procedure". In some cases in differential games coalitional solutions are studied in which the coalitions act as individual players and play with each other in a non-cooperative game, and payoff of each coalition is distributed among its members in accordance with some principle of optimality. Besides studied models where the coalitions act as individual players, but they can also cooperate to maximize joint payoff. In this case, the total payoff is distributed between coalitions in accordance with the selected principle of optimality, and then the payoff of each coalition is distributed between its members according to perhaps other principle of optimality. Such cooperation is called two-level cooperation. To solve models of two-level cooperation which requires at both levels of the cooperation it is necessary to determine the characteristic function and imputation distribution procedure. In this paper we consider a model of two-level cooperation in the game of pollution cost reduction. Participants of game are enterprises whose production harms the environment. The player's payoff is cost of compensation for damage from emissions. The aim of enterprises is minimization of costs and they can join in coalitions to minimize total costs and their redistribution. Coalitions can also cooperate. At the first (lower) level, enterprises form coalitions. At the second (top) level, coalitions, acting as individual players, form a one grand coalition to minimize total costs. The resulting top-level payoff is distributed between coalitions-participants. As a principle of optimality the dynamic Shapley value is selected. Then each coalition distributes the resulting share of payoff among its participants. In this paper we follow the model described in [8], and the specificity is to features of the characteristic function construction.

Keywords: differential game, cooperation, characteristic function, imputation distribution procedure.