

УДК 519.832+378

ББК 22.18

КООПЕРАТИВНЫЙ ПОДХОД К НАЗНАЧЕНИЮ ВЕСОВ ЗАДАНИЙ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ТЕСТЕ

МИХАИЛ М. ЛУЦЕНКО

НАТАЛИЯ В. ШАДРИНЦЕВА

Петербургский государственный университет
путей сообщения

190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

e-mail: ML4116@mail.ru, shadrinceva@mail.ru

Веса заданий педагогического теста строятся по векторам Шепли и Банзафа некоторой кооперативной игры, характеристическая функция которой рассчитывается с учетом структуры изученного курса и времени, затраченного на освоение его различных разделов. Предложены формулы расчета векторов Шепли и Банзафа для линейной и древовидной структур курса.

Ключевые слова: тестирование, уровень знаний, вес задания теста, кооперативная игра, вектор Шепли, индекс Банзафа.

1. Введение

Ситуации, в которых игроки получают полезность (выигрыш) при кооперации, моделируются кооперативными играми с трансферабельной функцией полезности (ТП игры). Основной задачей кооперативной теории игр является выработка формально обоснованных решений, приемлемых для всех участников игры [4, 6, 15]. При этом под решением кооперативной игры понимается некоторый вектор или

множество векторов, приписывающих доли общего выигрыша всем участникам игры. Наиболее известны: однозначные решения – вектора Шепли [20], Банзафа [19]; множественное решение – s -ядро [9].

Существует ряд процедур, позволяющих находить вектора Шепли и Банзафа, однако, в общем случае каждая компонента векторов содержит 2^n слагаемых. В настоящей работе будет приведен класс кооперативных игр, для которых вектора Шепли и Банзафа записываются в простой аналитической форме.

Во многих экономических задачах игроки оказываются частично или даже линейно упорядочены, а выигрыши игроков определяются относительной позицией игрока в коалиции. Многочисленные примеры игр с упорядоченным множеством игроков приведены в работах [7, 8, 16, 17]. В настоящей работе мы также предполагаем, что игроки частично упорядочены.

Исторически кооперативные игры использовались при моделировании «разумного» дележа общего *дохода* людьми, имеющими различный вклад в его получение. Именно для таких моделей традиционно определяются как дележи, так и принципы их оптимальности. В работе [11] кооперативная теория применяется к задаче о распределении *платежей* за строительство взлетно-посадочной полосы аэропорта. Авторы предложили распределять взносы за строительство согласно вектору Шепли, аналитический вид которого оказался крайне простым. Хотя задачи распределения доходов и платежей очень близки, однако, соответствующие им кооперативные игры различны. Например, в игре о взлетно-посадочной полосе множество дележей и s -ядро пусты, а поэтому приходится переходить к дополнительным играм.

Важным приложением кооперативной теории игр является политология, где наиболее известен вектор (индекс) Банзафа, использующийся при оценке веса того или иного выборщика в задачах голосования [4, с. 321]. В настоящей работе мы покажем, как методы кооперативной теории могут быть применены в педагогике, при назначении веса задания теста.

Тестирование, как инструмент измерения уровня знаний, давно и успешно применяется в обучении. За последние годы интерес к нему значительно возрос, что вызвано формализацией учебного процесса и

развитием компьютерных средств контроля знаний. Появление математических моделей Раша, Бирнбаума и др. существенно расширили теорию и дали возможность использовать современные математические модели: теорию параметризации педагогических тестов (Item Response Theory) [5], статистические игры [2, 3].

Одной из проблем теории тестирования является задача определения веса задания теста. В большинстве тестов веса заданий считаются равными, но по мере усложнения структуры теста и увеличении числа заданий в тесте, потребность в определении сложности задания теста возрастает. Это особенно важно при сравнении учащихся, решавших разные тесты, или в тех случаях, когда времени на решение всех заданий теста недостаточно.

В теории параметризации педагогических тестов (IRT) предлагается оценивать вес задания педагогического теста по доле учащихся, выполнивших это задание [5]. Однако такой подход стимулирует нетрадиционные методы обучения: чем меньше учащихся выполнили задание, тем выше вес этого задания, но вполне возможно, что время, затрачиваемое на подготовку тестируемого к решению более редкого задания, окажется малым и преподаватель начнет готовить учащихся к решению «редких» заданий, нарушая логику курса.

Так как тесты часто проводятся по завершению части или всего курса обучения, то вполне естественно определить трудность (сложность, вес) задания как время, необходимое для подготовки учащегося к выполнению этого задания теста. Если учащийся самостоятельно выбирает последовательность изучаемых разделов (с учетом структуры курса и имеющегося у него времени), то за вес задания можно принять некоторое усредненное время на подготовку к его решению. Такой способ нахождения весов характерен для теории игр. Таким образом, проблема назначения веса задания педагогического теста сводится к проблеме построения решения в некоторой кооперативной игре.

Если изучаемый курс имеет линейную структуру, то кооперативная игра, возникающая при назначении веса задания, близка к игре, рассмотренной в работе [11] в связи с задачей о взлетно-посадочной полосе. Для курса, имеющего структуру дерева, вектор Шепли был построен авторами в работе [13], [14] (см. похожий пример в книге

Maschler [15, с. 777]).

В следующей части даны основные определения классической кооперативной теории. В частности, дано определение s -ядра, дополнительного (анти) s -ядра, дополнительной характеристической функции, индивидуального вероятностного значения, множества Вебера, векторов Шепли и Банзафа. Перечислены их свойства.

Третья часть статьи посвящена кооперативным играм с упорядоченным множеством игроков. Приведены примеры игр: «сообщество равных» и «оплата ВПП».

В четвертой части определена игра «сумма знаний» и перечислены ее основные свойства. Сформулирована основная теорема о виде векторов Шепли и Банзафа при древовидном порядке, заданном на множестве игроков (разделов учебного курса).

В пятой части работы обсуждается возможность применения кооперативной игры «сумма знаний» при назначении весов заданий педагогического теста. Показано, что веса Шепли и Банзафа обладают рядом разумных свойств, приемлемых при назначении весов заданий. В последней части приведены примеры расчета векторов Шепли и Банзафа.

2. Кооперативные игры

Определение 2.1. Кооперативная игра $\Gamma = \langle I, v \rangle$ определяется множеством игроков $I = \{1, 2, \dots, n\}$ и характеристической функцией v , ставящей в соответствие каждому подмножеству игроков $K \subseteq I$ тот выигрыш, который они могут получить, объединившись в коалицию K .

Таким образом, характеристическая функция v отображает множество всех подмножеств множества I во множество вещественных чисел R . В дальнейшем любое подмножество игроков $K \subseteq I$ игры Γ мы назовем *коалицией*, а ее мощность мы будем обозначать через $|K|$. Заметим, что коалиция может быть пустой, одноэлементной, или совпадать со всем I . Кроме того, мы предполагаем, что $v(\emptyset) = 0$.

Игра $\Gamma = \langle I, v \rangle$ называется *простой*, если характеристическая функция v принимает лишь два значения: ноль и единица. В простой игре коалиция K называется *выигрывающей*, если $v(K) = 1$.

Если для любых двух коалиций K_1 , K_2 и характеристической функции v кооперативной игры $\Gamma = \langle I, v \rangle$ верна импликация

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow v(K_1) \leq v(K_2),$$

то функция v называется *монотонной*, если выполняется неравенство

$$v(K_1) + v(K_2) \leq v(K_1 \cup K_2) + v(K_1 \cap K_2),$$

то она называется *выпуклой*, и если выполняется противоположное неравенство

$$v(K_1) + v(K_2) \geq v(K_1 \cup K_2) + v(K_1 \cap K_2),$$

то *вогнутой*.

Определение 2.2. Дележом кооперативной игры $\Gamma = \langle I, v \rangle$ называется неотрицательный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условию коллективной рациональности

$$x(I) = \sum_{i \in I} x_i = v(I).$$

В настоящей работе мы отказываемся от свойства *индивидуальной рациональности* дележа ($x_i \geq v(\{i\})$, при $i = \overline{1, n}$), часто требуемого в работах.

Определение 2.3. Ядром (c -ядром) игры $\langle I, v \rangle$ называется множество дележей $C(v)$, для которых выполнены следующие неравенства:

$$x(K) = \sum_{i \in K} x_i \geq v(K), \text{ для всех } K \subseteq I.$$

Заметим, что дележи из c -ядра индивидуально рациональны.

Дополнительным (анти) c -ядром называют множество дележей, удовлетворяющих противоположным неравенствам

$$C^*(v) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n \mid x(K) = \sum_{i \in K} x_i \leq v(K), \text{ для всех } K \subseteq I \right\}.$$

Возможна следующая интерпретация введенного выше определения c -ядра. Допустим, что в результате предварительных переговоров игрокам из множества I (группе производителей) предложен

коллективно рациональный дележ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, согласно которому игрок с номером i получает величину x_i . Пусть коалиция игроков K имеет возможность самостоятельно заключить на стороне контракт на сумму $v(K)$. Если сумма $x(K)$, предлагаемая коалиции K , меньше величины $v(K)$, то компании, входящие в коалицию K , откажутся от предложенного дележа на том основании, что у них есть более выгодное предложение. Таким образом, ядро $C(v)$ – множество дележей, стабилизируемых простыми угрозами.

Предположим, что величина $v(K)$ имеет смысл платежа за услугу, оказанную коалиции K , потребность в которой у участников K различна, а дележ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – предлагаемое распределение платежей между игроками. Вполне естественно, что игроки из коалиции K вступят в большую коалицию I , если предлагаемая им плата $x(K)$ за услугу будет меньше, чем $v(K)$. В частности, $x_i \leq v(\{i\})$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, дополнительное ядро $C^*(v)$ – множество платежей (дележей), стабилизируемых простыми угрозами.

Определение 2.4. *Игра $\Gamma_T = \langle I, u_T \rangle$, $T \neq \emptyset$ называется простейшей с носителем T , если выигрыши коалиций, содержащих коалицию T , равны единице, а выигрыши всех других коалиций равны нулю.*

Таким образом, в игре Γ_T значения характеристической функции находятся по формуле

$$u_T(K) = \begin{cases} 1, & \text{при } T \subseteq K, \\ 0, & \text{при } T \not\subseteq K. \end{cases} \quad (2.1)$$

Легко проверить [6], что характеристическая функция простейшей игры монотонна и выпукла, а ее ядро имеет вид

$$C(u_T) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^n \mid \sum_{i \in T} x_i = 1, x_i = 0 \text{ при } i \in I \setminus T \right\}.$$

Если зафиксировать множество игроков I , то на множестве характеристических функций можно определить операции сложения и умножения на число по формулам

$$(u + v)(K) = u(K) + v(K), \quad (c \cdot v)(K) = c \cdot v(K).$$

В результате мы получим линейное пространство характеристических функций размерности $N = 2^n - 1$ и оно изоморфно пространству R^N . В работе Шепли [20] показано, что простейшие функции u_T составляют базис пространства R^N , а, следовательно, каждая характеристическая функция v имеет единственное разложение по этому базису:

$$v(K) = \sum_{T \subseteq I, T \neq \emptyset} v_T \cdot u_T(K),$$

где $v_T = v(T) - \sum_{S \subset T} v_S$ координаты функции v в этом базисе (дивиденды Харсаньи).

Если в игре $\Gamma = \langle I, v \rangle$ коалиция K уже сформировалась, то ценность не входящего в нее игрока i с точки зрения этой коалиции равна $\Delta_i(K) = v(K \cup \{i\}) - v(K)$. Поэтому величина $\Delta_i(K)$ является разумной платой за присоединение игрока i к коалиции K .

Определение 2.5. Для игрока $i \in I$ кооперативной игры $\Gamma = \langle I, v \rangle$ величина $\Delta_i(K) = v(K \cup \{i\}) - v(K)$ называется (маргинальным) вкладом игрока i в коалицию K или приращением выигрыша коалиции K за счет игрока i .

Заметим, что вклады игроков в коалиции $\Delta_i(K)$ для игр с монотонными характеристическими функциями неотрицательны.

Для линейного множества кооперативных игр J с фиксированным множеством игроков I и игрока $i \in I$ его индивидуальным значением $\phi_i(v)$ на J называется функция $\phi_i : J \rightarrow R$. Значение $\phi_i(v)$ игры v можно назвать оценкой игроком i его перспектив от участия в игре v .

Определение 2.6. Для игрока $i \in I$ и произвольного распределения $\{p_K^i\}$, заданного на множестве не содержащих игрока i коалиций, индивидуальным вероятностным значением на J называется функция $\phi_i(v)$, ставящая в соответствие каждой игре v из J сумму

$$\phi_i(v) = \sum_{i \notin K} p_K^i \cdot (v(K \cup \{i\}) - v(K)), \text{ где } \sum_{i \notin K} p_K^i = 1, p_K^i \geq 0, K \subseteq I. \quad (2.2)$$

Индивидуальное значение (2.2) имеет следующую вероятностную интерпретацию. Пусть игрок i полагает, что, участвуя в игре

$\Gamma = \langle I, v \rangle$, он получит лишь вклад $\Delta_i(K)$ от присоединения к возникшей до его появления коалиции K . Если для каждой коалиции K , величина p_K^i понимается, как субъективная вероятность того, что он сможет присоединиться к коалиции K , то $\phi_i(v)$ – математическое ожидание выигрыша игрока i в игре v .

Примерами вероятностных значений являются вектора Шепли и Банзафа. Компонента i вектора Банзафа возникает из субъективного предположения, что все коалиции K возникают с одинаковыми вероятностями, а именно, $p_K^i = 1/2^{n-1}$. Значения Шепли возникают из предположения, что коалиции K мощности k (при $0 \leq k \leq n-1$) возникают с одинаковыми вероятностями, и что все коалиции одной и той же мощности k также равновероятны:

$$p_K^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{C_{n-1}^k} = \frac{k! \cdot (n-k-1)!}{n!}, \quad \text{где } K \subseteq I \setminus \{i\}, \quad k = |K|.$$

Используя формулу (2.2) можно найти значения Шепли и Банзафа для простейшей игры $\Gamma_T = \langle I, u_T \rangle$ с носителем T . В результате получим

$$Sh_i(u_T) = \frac{1}{|T|} \mathbf{1}_T(i); \quad Bz_i(u_T) = \frac{1}{2^{|T|-1}} \mathbf{1}_T(i),$$

где $\mathbf{1}_T(i)$ – характеристическая функция множества T .

Легко проверить, что вероятностное значение $\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \dots, \phi_n(v))$ линейно на множестве игр J в следующем смысле:

$$\phi(cv) = c\phi(v), \quad \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2),$$

где v, v_1, v_2 – произвольные игры из J , а $c \in R$.

Определение 2.7. Пусть $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ – произвольное упорядочение игроков, тогда вектор x^π с координатами

$$x_{i_k}^\pi = v(i_1, \dots, i_k) - v(i_1, \dots, i_{k-1}), \quad k = \overline{1, n},$$

называется вектором маргинальных вкладов, соответствующий упорядочению π . Выпуклая оболочка всех векторов маргинальных вкладов $W(v)$ называется множеством Вебера [19].

Заметим, что компонента i_k вектора x^π – вклад игрока i_k в создавшуюся до него коалицию, если он присоединился к ней k -м по порядку в соответствии с упорядочением π .

Теорема 2.1 (Вебер). *Если игроки присоединяются к игре $\Gamma = \langle I, v \rangle$ в случайном порядке, причем все порядки равновероятны, то математическое ожидание выигрыша i -го игрока определяется соответствующей компонентой вектора Шепли, то есть*

$$Sh(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} x^\pi.$$

Другие свойства Векторов Шепли и Банзафа можно найти в работах [15, 19].

Определение 2.8. *Характеристическая функция v^* называется дополнительной к характеристической функции v игры $\Gamma = \langle I, v \rangle$, если*

$$v^*(K) = v(I) - v(I \setminus K).$$

Величина $v^*(K)$ – упущенная выгода коалиции K , при ее отказе от объединения с дополнительной коалицией $I \setminus K$.

Значения дополнительно функции v^* на пустой и большой коалициях равны значениям функции v на соответствующих коалициях: $v^*(\emptyset) = 0$, $v^*(I) = v(I)$.

Операция дополнения идемпотентна, однородна и аддитивна, то есть для любых характеристических функций v , v_1 , v_2 и числа c выполняются равенства

$$(v^*)^* = v, \quad (cv)^* = c(v^*), \quad (v_1 + v_2)^* = v_1^* + v_2^*.$$

Найдем дополнительную функцию для простейшей характеристической функции u_T . Легко проверить, что она имеет вид

$$u_T^*(K) = \begin{cases} 1, & \text{при } K \cap T \neq \emptyset, \\ 0, & \text{при } K \cap T = \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом, выигрывающая коалиция в игре $\Gamma_T^* = \langle I, u_T^* \rangle$ лишь та, в которую входит хотя бы один игрок из множества T . Можно показать, что характеристическая функция игры $\Gamma_T^* = \langle I, u_T^* \rangle$

монотонна и вогнута, а ее ядро $C(u_T^*)$ пусто. С другой стороны дополнительное ядро $C^*(u_T^*)$ совпадает с ядром простейшей функции $C(u_T)$.

Теорема 2.2 (Шепли-Вебер). *Если характеристическая функция v игры $\Gamma = \langle I, v \rangle$ выпукла, то множество Вебера совпадает с s -ядром игры Γ , то есть $W(v) = C(v)$. Если функция v в игре Γ вогнута, то множество Вебера равно дополнительному s -ядру игры: $W(v) = C^*(v)$.*

Доказательство первой части теоремы можно найти в работах [19]. Доказательство второй части получается аналогично.

Перечислим важнейшие свойства операции дополнения, доказательство которых или очевидно, или можно найти в учебниках [8, 15].

1. Если характеристическая функция v монотонна, то дополнительная функция v^* также монотонна.
2. Если характеристическая функция v выпукла, то дополнительная функция v^* вогнута.
3. Дополнительное ядро характеристической функции v равно s -ядру дополнительно функции: $C^*(v) = C(v^*)$.
4. Вектора Шепли характеристической функции v и дополнительной функции v^* равны: $Sh(v) = Sh(v^*)$.
5. Вектора Банзафа характеристической функции v и дополнительной функции v^* равны: $Bz(v) = Bz(v^*)$.

Из этих свойств видно, что каждая кооперативная игра тесно связана со своей двойственной, и результаты исследования одной игры могут быть использованы при решении двойственной игры.

3. Игры с упорядоченным множеством игроков

Мы будем говорить, что множество игроков $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$ частично упорядочено отношением «следование» (« $<$ »), если это отношение антирефлексивно и транзитивно.

Пусть α – произвольный элемент частично упорядоченного множества A . Обозначим через

$$V(\alpha) = \{\beta \in A \mid \beta < \alpha\}, \quad \bar{V}(\alpha) = \{\beta \in A \mid \alpha < \beta\} \quad (3.1)$$

множество элементов, предшествующих элементу α , и множество элементов следующих за α . В силу антирефлексивности отношения предшествования множества $V(\alpha)$, $\bar{V}(\alpha)$ не содержат элемент α .

Обозначим через

$$V[\alpha] = V(\alpha) \cup \{\alpha\}, \quad \bar{V}[\alpha] = \bar{V}(\alpha) \cup \{\alpha\} \quad (3.2)$$

множество элементов предшествующих или равных α , и множество элементов следующих или равных ему. Если K – коалиция игроков в A , то аналогично определяются

$$V(K) = \bigcup_{\alpha \in K} V(\alpha) = \{\beta \in A \mid \exists \alpha \in K (\beta < \alpha)\}, \quad V[K] = V(K) \cup K. \quad (3.3)$$

В дискретной математике множества $V[\alpha]$, $\bar{V}[\alpha]$ часто называют верхним и нижним конусами, соответствующими элементу α .

Определение 3.1. Элемент α назовем максимальным во множестве игроков K ($K \subseteq A$), если не существует игрока $\beta \in K$, для которого $\alpha < \beta$. Множество всех максимальных элементов множества K обозначим через $\max K$. Аналогично определяется множество минимальных игроков $\min K$ в множестве K .

Таким образом, игрок α минимален в A , если $V(\alpha) = \emptyset$ и максимален в A , если $\bar{V}(\alpha) = \emptyset$.

Заметим, что для любого непустого множества разделов $K \subseteq A$, множество максимальных разделов $\max K$ не пусто. Если же множество K пусто, то множество $\max K$ мы считаем также пустым.

Для каждого игрока α можно определить множество игроков непосредственно ему предшествующих по формуле:

$$S(\alpha) = \max V(\alpha), \quad (3.4)$$

то есть среди элементов множества A , и любого $\beta \in V(\alpha)$ нет элемента γ , удовлетворяющего неравенствам $\beta < \gamma < \alpha$.

С другой стороны пусть $S(\alpha)$ некоторая функция, ставящая в соответствие каждому элементу множества A некоторое его подмножество. Будем говорить, что элемент β множества A *следует за элементом* α , или элемент α *предшествует элементу* β и записывать $\alpha < \beta$, если найдутся такие элементы $\alpha = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k = \beta$ множества A , для которых выполняются следующие утверждения:

$$\alpha \in S(\gamma_2), \gamma_2 \in S(\gamma_3), \dots, \gamma_{k-1} \in S(\beta).$$

Введенное таким образом отношение следования (предшествования) обладает свойством транзитивности.

Если для любого игрока α из A множество игроков $S(\alpha)$ или пусто, или состоит из одного элемента, а порождаемое функцией S транзитивное отношение предпочтения иррефлексивно, то функция S является функцией непосредственного предшествования для этого отношения.

В этих предположениях ориентированный граф, соответствующий отношению предшествования, будет деревом с корнем α_1 , если множество $\min A = \{\alpha_1\}$. Если множество $\min A$ состоит из k элементов, то соответствующий ориентированный граф есть объединение k деревьев с соответствующими корнями или лес.

Частичный порядок на множестве игроков $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ назовем линейным, если он полон, то есть для любых двух различных элементов α, β множества A верно ровно одно из двух неравенств: $\alpha < \beta, \beta < \alpha$.

Определение 3.2. В простой игре $\Gamma = \langle A, v \rangle$ игрок α называется *вето-игроком*, если для любой коалиции K выполняется равенство $v(K \setminus \{\alpha\}) = 0$. Таким образом, вето-игрок принадлежит всем выигрывающим коалициям.

Приведем примеры игр, у которых характеристические функции согласованы с частичным порядком на множестве игроков. Первый из них связан с задачей распределения доходов, а второй с распределением платежей.

Пример 3.1 (Сообщества равных). Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — дрововидно упорядоченное множество игроков с минимальным элементом α_1 , и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — неотрицательный вектор. Определим

характеристическую функцию игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$ по формуле

$$v(K) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_{V[\alpha_i]}(K), \quad (3.5)$$

где $u_T(K)$ – простейшая характеристическая функция (2.1), а множество игроков $V[\alpha]$ определяется по формуле (3.2).

Игроков в игре Γ интерпретируют как агентов с общественными и индивидуальными экономическими характеристиками, причем общественные интересы задаются отношением порядка, а экономические – вектором $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ (см. [7]). Иными словами агент (игрок) эффективен, если он кооперируется с агентами (игроками), стоящими выше его по иерархической лестнице (предшествующие ему). Таким образом, без лидера, находящегося на вершине иерархии (в корне дерева) выигрыши коалиций равны нулю. Многочисленные экономические задачи, сводящиеся к рассмотренной выше игре, можно найти в работах [8, 17].

Характеристическая функция игры Γ монотонна, выпукла, а α_1 – вето-игрок в этой игре. Значения функции v на коалициях без игрока α_1 равны нулю. Множество Вебера $W(v)$ совпадает с непустым s -ядром $C(v)$, а вектор Шепли $Sh(v)$ занимает центральное положение в s -ядре. В частности, координаты векторов Шепли и Банзафа, соответствующие игроку α , равны

$$Sh_\alpha(v) = \sum_{\alpha \in V[\alpha_i]} \frac{a_i}{m_i}, \quad Bz_\alpha(v) = \sum_{\alpha \in V[\alpha_i]} a_i \cdot 2^{1-m_i}, \quad m_i = |V[\alpha_i]|.$$

В 1973 г. Литтлчайлд и Оуэн [11] предложили использовать вектор Шепли для распределения платежей за строительство взлетно-посадочной полосы. Ими была построена кооперативная игра и получены крайне простые формулы для вектора Шепли.

Пример 3.2 (Оплата взлетно-посадочной полосы). Предположим, что n авиакомпаний $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ должны распределить затраты на строительство взлетно-посадочной полосы (ВПП), причем для обслуживания самолетов, принадлежащих авиакомпании i достаточно, чтобы длина полосы была равна c_i . Будем считать, что затраты пропорциональны длине соответствующей полосы, причем

$$c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n.$$

Эти неравенства позволяют определить линейное отношение порядка на множестве игроков A с наименьшим игроком α_1 :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n.$$

Таким образом, если образуется коалиция K , то затраты этой коалиции могут быть найдены по формуле

$$\begin{aligned} v(K) &= \max\{c_i \mid \alpha_i \in K\} = \\ &= \left(c_1 u_{V[\alpha_1]}^* + (c_2 - c_1) u_{V[\alpha_2]}^* + \dots + (c_n - c_{n-1}) u_{V[\alpha_n]}^* \right) (S). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Можно доказать (см. [11]), что вектор Шепли для функции v будет иметь следующие компоненты:

$$Sh_i(v) = \sum_{j=1}^i \frac{c_j - c_{j-1}}{n - j + 1} \quad \text{для всех } i = \overline{1, n}, \text{ причем } c_0 = 0.$$

Иными словами за ту часть полосы, которой пользуются все авиакомпании, они платят поровну. За следующую часть, которой пользуются только $n - 1$ компания, уже $n - 1$ платят поровну, и т.д.

Характеристическая функция (3.6) монотонна, вогнута и имеет пустое s -ядро. Рассмотренная в примере 3.2 игра тесно связана с задачей о распределении платежей за загрязнение реки (см., например, [16]).

4. Игра сумма знаний

Определение 4.1. Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ – частично упорядоченное множество игроков, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – неотрицательный вектор. Кооперативная игра $\Gamma = \langle A, v \rangle$ называется игрой «сумма знаний», если характеристическая функция имеет вид

$$v(K) = \sum_{\alpha \in V[K]} a_\alpha, \quad (4.1)$$

где $V[K]$ – множество игроков, предшествующих или равных игрокам из K (3.3).

Игра $\Gamma = \langle A, v \rangle$ является математической моделью следующей ситуации (см. [12, 13, 14]). Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ – некоторый курс, логическая структура которого определяется функцией $S(\alpha)$ (множество разделов курса непосредственно предшествующих разделу α). Предположим, что для каждого раздела α можно указать время a_α необходимое для его освоения учащимся, если он освоил все разделы из множества $S(\alpha)$. Будем считать, что функция $S(\alpha)$ определяет на множестве разделов курса A частичный антирефлексивный порядок. Множества $V(\alpha) = \{\beta \in A \mid \beta < \alpha\}$ и $\bar{V}(\alpha) = \{\beta \in A \mid \alpha < \beta\}$ состоят из разделов курса, предшествующих разделу α , и разделов следующих за разделом α соответственно.

Если учащийся изучил все разделы из множества разделов K , то $V(K)$ – множество разделов предшествующих разделам из множества K , а число $v(K)$ – время необходимое для их изучения. Таким образом, величина $v(K)$ – числовая характеристика объема (уровня) знаний учащегося.

Заметим, что время изучения любого начального раздела α курса A равно a_α . Легко также указать время подготовки тестируемого ко всему тесту. Так как $V(A) \subset A$, то согласно формуле (4.1), время освоения курса A равно

$$v(A) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha.$$

Перечислим некоторые свойства характеристической функции $v(K)$, доказательство которых практически очевидно.

1. *Персональность.* $v(\emptyset) = 0$.
2. *Монотонность и неотрицательность.* Для любых двух совокупностей разделов K_1 и K_2 верно следующее утверждение:

$$K_1 \subset K_2 \quad \Rightarrow \quad v(K_1) \leq v(K_2).$$

3. *Ориентация на продвинутые разделы.* Значение характеристической функции на множестве разделов K совпадает с ее значением на множестве максимальных разделов множества K , то есть $v(K) = v(\max K)$. Иными словами время, затраченное на

изучение разделов из множества K , совпадает со временем, затраченным на изучение наиболее «продвинутых» разделов из множества K .

4. *Вогнутость.* Характеристическая функция v вогнута, дополнительное s -ядро $C^*(v)$ совпадает с множеством Вебера $W(v)$, а s -ядро $C(v)$ пусто.

Доказательство первых трех свойств получается из определения характеристической функции. Докажем вогнутость функции v . Запишем сумму значений функций для произвольных множеств K и L :

$$v(K) + v(L) = \sum_{\alpha \in V[K]} a_\alpha + \sum_{\alpha \in V[L]} a_\alpha = \sum_{\alpha \in V[K] \cup V[L]} a_\alpha + \sum_{\alpha \in V[K] \cap V[L]} a_\alpha.$$

Для объединения и пересечения множеств верны соотношения

$$V[K \cup L] = V[K] \cup V[L], \quad V[K \cap L] \subseteq V[K] \cap V[L].$$

Следовательно,

$$v(K) + v(L) \geq v(K \cup L) + v(K \cap L).$$

Для игры «сумма знаний» $\Gamma = \langle A, v \rangle$ можно указать аналитические формулы расчета векторов Шепли и Банзафа в важном частном случае. Доказательство этих формул мы проведем с использованием комбинаторных формул.

Теорема 4.1. Пусть A – частично упорядоченное множество, S – функция непосредственного предшествования (3.4), $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – неотрицательный вектор, v – характеристическая функция игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$, определенная формулой (4.1). Если для любого игрока $\alpha \in A$ множество $S(\alpha)$ или пусто или состоит из одного игрока, то компоненты векторов Шепли и Банзафа могут быть найдены по формулам

$$Sh_\alpha(v) = \sum_{\beta \in V[\alpha]} \frac{a_\beta}{\overline{m}_\beta}, \quad Bz_\alpha(v) = \sum_{\beta \in V[\alpha]} a_\beta 2^{1-\overline{m}_\beta}, \quad \overline{m}_\beta = |\overline{V}[\beta]|. \quad (4.2)$$

Замечание 4.1. Таким образом, несмотря на существенное отличие характеристической функции рассмотренной игры от характеристической функции игры «сообщества равных», вектора Шепли и Банзафа оказываются похожими.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится комбинаторная формула, доказательство которой можно найти в книге Д. Кнут [1] (см. с. 87 формула 11)

$$\sum_{k=0}^n C_m^k = C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = C_{m+1}^{m+1}. \quad (4.3)$$

Для игрока α и произвольного вероятностного распределения $\{p_K\}$ найдем индивидуальное вероятностное значение (2.2)

$$\phi_\alpha(v) = \sum_{\alpha \notin K} p_K \cdot (v(K \cup \{\alpha\}) - v(K)). \quad (4.4)$$

Если коалиция K содержит игрока β , следующего за игроком α , т.е. $\beta \in \bar{V}(\alpha)$, то $V[\alpha] \subseteq V[\beta]$ и разность $v(K \cup \{\alpha\}) - v(K)$ равна нулю. Поэтому суммирование в равенстве (4.4) можно брать лишь по коалициям K , которые не содержат игроков следующих за игроком α ($K \subseteq A \setminus \bar{V}[\alpha]$). Таких коалиций будет $2^{n-\bar{m}_\alpha}$, где $\bar{m}_\alpha = |\bar{V}[\alpha]|$.

Маргинальный вклад игрока α в коалицию K представим в виде суммы разностей:

$$v(K \cup \{\alpha\}) - v(K) = (v(K \cup \{\alpha\}) - v(K \cup \{\alpha'\})) + (v(K \cup \{\alpha'\}) - v(K)),$$

где $\{\alpha'\} = S(\alpha)$. Для всех рассматриваемых коалиций верно следующее равенство: $a_\alpha = v(K \cup \{\alpha\}) - v(K \cup \{\alpha'\})$, так как $V[K \cup \{\alpha\}] = \{\alpha\} \cup V[K \cup \{\alpha'\}]$. Если α' входит в коалицию K , то разность $v(K \cup \{\alpha'\}) - v(K)$ равна нулю и, следовательно, формулу (4.4) можно записать в виде

$$\phi_\alpha(v) = a_\alpha \cdot \sum_{K \subseteq A \setminus \bar{V}[\alpha]} p_K + \sum_{\alpha' \notin K} p_K \cdot (v(K \cup \{\alpha'\}) - v(K)). \quad (4.5)$$

Таким образом, число слагаемых в первой сумме равна числу подмножеств множества $A \setminus \bar{V}[\alpha]$, то есть $2^{n-\bar{m}_\alpha}$. Если $p_K = 1/2^{n-1}$, то первая сумма в равенстве (4.5) имеет вид

$$a_\alpha \cdot \sum_{K \subseteq A \setminus \bar{V}[\alpha]} p_K = a_\alpha \cdot (1/2^{n-1}) \cdot 2^{n-\bar{m}_\alpha} = a_\alpha / 2^{\bar{m}_\alpha-1}.$$

Если $p_K = k! \cdot (n - k - 1)!/n!$, $k = |K|$, то первая сумма равенства (4.5) имеет вид

$$a_\alpha \cdot \sum_{K \subseteq A \setminus \overline{V}[\alpha]} p_K = a_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{k!(n - k - 1)!}{n!} \cdot C_{i-1}^k, \text{ где } i = n - m_\alpha, k = |K|.$$

В правой части числа C_{i-1}^k ($k = \overline{1, i-1}$) заменяем на отношение по формуле $C_{i-1}^k = (i-1)!/k!(i-k-1)!$. Из всех слагаемых выносим общий множитель $(i-1)!/n!$ и делим их на $(n-i)!$. В результате мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} a_\alpha \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{k!(n - k - 1)!}{n!} \cdot \frac{(i-1)!}{k! \cdot (i - k - 1)!} = \\ = a_\alpha \cdot \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(n-k-1)!}{(i-k-1)!(n-i)!}. \end{aligned}$$

Заметим, что в сумме все слагаемые можно заменить на C_{n-k-1}^{i-k-1} . Изменим индекс суммирования k на t по формуле $t = i - k - 1$ и воспользуемся формулой суммирования (4.3). Таким образом, верны следующие равенства:

$$a_\alpha \cdot \frac{1}{nC_{n-1}^{i-1}} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} C_{n-k-1}^{i-k-1} = a_\alpha \cdot \frac{1}{nC_{n-1}^{i-1}} \cdot \sum_{t=0}^{i-1} C_{n-i+t}^t = a_\alpha \cdot \frac{C_n^{i-1}}{nC_{n-1}^{i-1}} = a_\alpha / (m_\alpha + 1).$$

Аналогично рассчитывается вторая сумма в формуле (4.5) но для элемента α' и так далее. В результате мы получим формулы (4.2) теоремы. $\square$

Следствие 4.1. *Если в игре сумма знаний $\Gamma = \langle A, v \rangle$ время освоения каждого начального раздела положительно, то*

- все компоненты векторов Шепли и Банзафа положительны;
- весовые функции Шепли и Банзафа строго монотонны, как функции множеств.

Истинность этих утверждений следует из того факта, что каждая компонента векторов Шепли и Банзафа содержит хотя бы один минимальный элемент. Так как вес нового раздела получается из веса

предыдущего раздела добавлением доли времени на его освоение, то верно следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Если время освоения некоторого раздела равно нулю, то веса Шепли, Банзафа этого и предшествующего ему разделов равны.*

5. Веса заданий педагогического теста

Существенной частью учебного процесса является контроль знаний учащихся. Тестирование – формализованный инструмент измерения (оценки) уровня знаний тестируемых. Тест – набор заданий, на выполнение каждого из которых требуется незначительное время. Если каждому из заданий теста может быть присвоен вес (балл), отражающий сложность выполнения соответствующего задания, то решение об уровне знаний тестируемого (степени освоения курса тестируемым) принимается по количеству набранных баллов (выполненных заданий). Таким образом, группа тестируемых по результатам выполнения теста разбивается на N групп, где N – число возможных сумм баллов. Число N можно интерпретировать, как предельную точность оценки уровня знаний тестируемых тестом. При одинаковых весах заданий предельная точность теста N на единицу больше числа заданий. Если же веса заданий различны, то предельная точность оказывается существенно больше. Заметим, что наибольшая предельная точность равна числу всевозможных совокупностей заданий и она достигается в том случае, когда веса всех совокупностей различны.

Обычно тестирование проводят по окончании учебного курса или его части, и преподавателю, как правило, сложно указать трудности заданий теста, так как опыт проведения тестирования у него мал. Однако, если связать тест со структурой проверяемого курса и временем на его освоение, то веса заданий можно определить с помощью теории кооперативных игр.

Предположим, что по окончании учебного курса $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ учащийся выполняет проверочный тест, составленный так, что из каждого раздела курса в тест входит ровно одно задание. В этом случае для заданий теста, можно использовать те же обозначения, что и для соответствующих разделов курса A . В частности, если учащийся

выполняет все задания из множества $K \subseteq A$, то мы считаем, что он имеет *уровень знаний* K , или *навык выполнения* заданий множества K .

Таким образом, функцию сложности w для курса A следует определить на $2^n - 1$ подмножествах множества A , причем необходимо учесть неполное, а иногда и противоречивое, понимание интуитивной сложности. Однако с точки зрения теории игр функция сложности w есть характеристическая функция кооперативной игры $\Gamma = \langle A, w \rangle$, обладающая свойствами персональности и монотонности. Рассматриваемый класс функций довольно широк. Он включает в себя все неотрицательные супераддитивные и, в частности, аддитивные функции множеств.

К сожалению, не всякая функция сложности w дает возможность сравнивать учащихся решивших различные совокупности заданий, так как сложность совокупности может совпадать со сложностью какого-то одного (наиболее трудного) задания (см. предыдущий раздел). То есть из соотношения $K_1 \subset K_2$ может следовать равенство $w(K_1) = w(K_2)$, и тем самым мы, возможно, не учтем число выполненных тестируемым заданий.

Итак, определим весовую функцию $w : 2^A \rightarrow R$, значение которой на совокупности заданий $K \subseteq A$ интерпретируется как сложность (вес) этой совокупности или как уровень подтвержденных знаний тестируемым.

Функция знаний v (равенство (4.1)) является основным претендентом на такую весовую функцию w . Однако, получаемая при этом оценка уровня знаний $w(K) = v(K)$ неустойчива. Действительно, выполнение хотя бы одного задания высокого уровня, обеспечивает тестируемому высокий балл. Однако, такое решение может появиться или случайно, или как результат несанкционированных консультаций. Во-вторых, тестируемый может неправильно оценить свои силы и затратить все отведенное время на выполнение наиболее сложного задания. В этом случае возможная неудача (недостаток времени, нервная обстановка, арифметическая ошибка) приведет к тому, что итоговый балл тестируемого будет сильно занижен. В-третьих, балл тестируемого мало зависит от числа выполненных им заданий, что затрудняет дальнейшее сравнение тестируемых.

На практике давно и успешно применяется аддитивная оценка уровня знаний тестируемого

$$w(K) = \sum_{\alpha \in K} w_{\alpha}, \quad (5.1)$$

где K – множество заданий теста $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, выполненных тестируемым. В дальнейшем функцию $w(K)$ мы будем называть весовой функцией теста (изучаемого курса), а ее значения на отдельных заданиях – числа w_{α} , $\alpha \in A$ – весами соответствующих заданий.

Подобное определение очень удобно, и оно позволяет быстро сравнивать учащихся, решивших разные совокупности заданий. Кроме того, весовая функция оказывается строго монотонна (при положительных весах заданий):

$$K_1 \subset K_2 \quad \Rightarrow \quad w(K_1) < w(K_2),$$

или большая совокупность заданий – более сложна.

Хорошо известны две группы методов назначения весов заданий теста.

1. *Экспертный*. Обычно экспертом является составитель заданий, и он назначает веса, руководствуясь собственным опытом. Возможны и более сложные процедуры назначения весов заданий с участием нескольких экспертов.
2. *Частотный*. Веса заданий назначают лишь после проведения теста, причем задание получает больший вес, если оно решено меньшим числом тестируемых. Для расчета весов используют различные математические модели, в том числе: Раша, Бирнбаума и др.

Недостатки обоих методов очевидны. Первый метод субъективен и мало применим к построению тестов по новым курсам. К недостаткам второго метода следует отнести: невозможность указания веса задания до проведения теста и появление больших весов у простых, но непопулярных заданий.

Перейдем теперь к теоретико-игровому определению веса задания педагогического теста. Пусть $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ – множество

заданий теста (разделов курса) со структурой следования, заданной отношением частичного порядка (функцией непосредственного предшествования); $a = (a_\alpha)$ – n -мерный вектор с неотрицательными координатами; v – характеристическая функция, заданная формулой (4.1).

Будем искать вектор весов $w = (w_\alpha)$, компоненты которого будут интерпретироваться, как время, затраченное тестируемым непосредственно на изучение соответствующего раздела.

Уточним понятия разумности и близости весовой функции w к характеристической функции v . Рассмотрим несколько подходов к назначению весов заданий.

5.1. Элементарный подход

Предположим, что курс $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ разбит на две части α_1, α_2 , причем общее время на его изучение равно $a_1 + a_2$. Составим характеристическую функцию v и найдем вектор весов $w = (w_1, w_2)$, в соответствии с общими соображениями для следующих трех важных случаев.

Случай 1. Части α_1 и α_2 логически независимы и на изучение первой из них требуется a_1 часов, а второй – a_2 часов. В силу логической независимости, значения функции непосредственного предшествования равны: $S(\alpha_1) = \emptyset, S(\alpha_2) = \emptyset$. Значения характеристической функции находятся по формулам:

$$v(\{\alpha_1\}) = a_1, \quad v(\{\alpha_2\}) = a_2, \quad v(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = a_1 + a_2.$$

Так как, при освоении курса A , время тратиться лишь на изучение разделов α_1, α_2 , то

$$w_1 = a_1, \quad w_2 = a_2.$$

Случай 2. Части α_1 и α_2 зависимы друг от друга в следующем смысле. Из знания раздела α_2 автоматически следует знание раздела α_1 , однако, знание раздела α_2 следует из знаний раздела α_1 лишь после получения дополнительных знаний в объеме a_2 . Иными словами, если учащийся может выполнить задание α_2 , то он имеет потенциальную возможность выполнить задание α_1 , но не наоборот. Определим порядок на множестве, с помощью функции непосредственного

предшествования $S(\alpha)$, а именно: $S(\alpha_1) = \emptyset$; $S(\alpha_2) = \{\alpha_1\}$. Запишем значения характеристической функции: $v(\{\alpha_1\}) = a_1$, $v(\{\alpha_2\}) = a_2$, $v(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = a_1 + a_2$.

Пусть w_1 – часть времени, затраченного на изучение только раздела α_1 , а w_2 – часть времени, затраченного на изучение только раздела α_2 , тогда разность $w_2 - w_1$ – время, затраченное на изучение только раздела α_2 , после того как раздел α_1 освоен. Составим систему уравнений

$$w_2 - w_1 = a_2, \quad w_1 + w_2 = a_1 + a_2.$$

Из ее решения следует, что доля времени $w_1 = a_1/2$, затрачиваемая на подготовку непосредственно к выполнению задания α_1 , равна половине a_1 . Другую половину времени учащийся тратит на подготовку к выполнению задания α_2 . В результате доля времени на подготовку к выполнению задания α_2 равна $w_2 = a_1/2 + a_2$.

На первый взгляд, тестируемый должен был получить $a_1 + a_2$ баллов за выполнение лишь одного задания α_2 . Однако мы считаем, что у тестируемого было достаточно времени, для решения обоих заданий и частичное выполнение им теста вызвано случайными факторами.

Случай 3. Курс $A = \{\alpha'_1, \alpha'_2\}$ разбит на две части формально. Функция непосредственного предшествования S и характеристическая функция v имеют вид

$$S(\alpha'_1) = \emptyset, \quad S(\alpha'_2) = \{\alpha'_1\}, \quad \alpha'_1 = a_1 + a_2, \quad \alpha'_2 = 0, \\ v(\{\alpha_1\}) = v(\{\alpha_2\}) = v(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = a_1 + a_2.$$

Данное разбиение соответствует тому случаю, когда тест содержит два одинаково трудных задания, для выполнения которых необходимо владение всем курсом. Так как $w_1 + w_2 = a_1 + a_2$, то мы получаем следующие веса заданий:

$$w_1 = w_2 = (a_1 + a_2)/2.$$

Здесь мы также считаем, что в случае устойчивых знаний, тестируемый должен выполнить оба задания и получить за них $a_1 + a_2$ баллов.

Заметим, что во всех трех случаях найденные веса оказываются и весами Шепли, и весами Банзафа.

5.2. Вероятностный подход

Программой изучения курса $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ называется произвольная последовательность его разделов. Разделы логически зависимы, но мы можем представить курс обучения, в котором сложные разделы изучаются раньше простых. В этом случае можно говорить об изучении от общего к частному. Например, некоторые теоремы математического анализа являются следствиями общих теорем функционального анализа, или при изучении темы «Интегрирование» можно заниматься сначала общими подстановками, а потом отрабатывать частные подстановки. Здесь мы считаем, что при первоначальном освоении общих разделов, время на освоение частных разделов равно нулю.

Пусть $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ – произвольная перестановка разделов, тогда компонента $w_{i_k}^\pi$ вектора маргинальных вкладов w^π – время на изучение раздела α_{i_k} . Учитывая вероятностную интерпретацию вектора Шепли, мы получаем, что вес w_α – математическое ожидание времени подготовки к освоению раздела α для различных программ обучения или средним временем обучения учащегося, при равновероятности всех программ обучения (см. [19, 20]).

Вектор Банзафа $Bz(v)$ является другим вероятностным значением (2.2). Компоненты его интерпретируются, как среднее время необходимое для подготовки тестируемого к выполнению соответствующих заданий при равновероятности появления всех наборов заданий.

5.3. Теоретико-игровой подход

Рассмотрим кооперативную игру $\Gamma = \langle A, v \rangle$, в которой игрокам соответствуют разделы курса $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ (задания теста к соответствующим разделам курса). На множестве игроков определим частичный порядок (отношение предпочтения) в соответствии с логической структурой курса. Характеристическая функция v определяется в соответствии с формулой (4.1).

Сузим множество дележей игры Γ и составим двойственное s -ядро:

$$C^*(v) = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in R_+^n \mid w(K) \leq v(K), \\ \text{для всех } K \subseteq A, w(A) = v(A)\}.$$

Его элементы обладают двумя важными свойствами, а именно:

- сумма весов (баллов) за все задания теста должна равняться времени изучения всего курса ($w(A) = v(A)$);
- при подготовке к выполнению заданий совокупности K , лишь часть времени тратится на изучение соответствующих разделов курса A ($w(K) \leq v(K)$).

Поэтому сумма баллов (весов), выставяемых за выполнение заданий из совокупности K , не превосходит времени на изучение разделов из соответствующей совокупности.

Так как функция v вогнута, то вектор Шепли $w = Sh(v)$ принадлежит множеству $C^*(v)$ и обладает двумя вышеперечисленными свойствами. Так как функция v монотонна, то функция w неотрицательна и монотонна, то есть из того, что $K_1 \subseteq K_2$ следует, что $w(K_1) \leq w(K_2)$.

5.4. Экстремальный подход

Уточним понятие близости весовой функции w к функции v . Для этого составим систему из 2^n уравнений и n неизвестных w_α ($\alpha \in A$) в следующем виде:

$$w(K) = v(K), \quad K \subseteq A. \quad (5.2)$$

Система (5.2) совместна лишь в том случае, когда характеристическая функция v аддитивна. В противном случае найдем приближенное решение этой системы по методу наименьших квадратов. Для этого составим экстремальную задачу

$$f(w) = \sum_{K \subseteq A} m_k \cdot (v(K) - w(K))^2 \rightarrow \min, \quad (5.3)$$

при ограничениях: $w(\emptyset) = v(\emptyset) = 0$, $w(A) = v(A)$,

в которой w_α при всех $\alpha \in A$ – независимые переменные, а число $k = |K|$ есть мощность множества K .

В задаче (5.3) коэффициенты m_k целевой функции f предполагаются положительными. Кроме того, значения коэффициентов m_0

и m_n не существенны в силу ограничений задачи (5.3) и они, как правило, не определяются.

В теории игр оптимальный план, на котором достигается минимум в задаче (5.3), называют значением наименьших квадратов для кооперативной игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$.

Из всех значений наименьших квадратов $w = (w_\alpha) \in R^n$ мы выделим то, которое находится при следующих значениях коэффициентов целевой функции:

$$m_k = ((n-1)C_{n-2}^{k-1})^{-1}, \quad k = |K|. \quad (5.4)$$

Этот оптимальный план $w = (w_\alpha) \in R^n$ оказывается вектором Шепли, а его компоненты можно найти по формулам (2.2) (см. [10]). Решение задачи (5.3) для других наборов коэффициентов можно найти в работе [18].

5.5. Свойства весов Шепли и Банзафа

Таким образом, веса Шепли и Банзафа позволяют оценить уровень знаний тестируемого, и они обладают следующими свойствами.

Весовая функция $w(K)$ аддитивна, положительна и строго монотонна (если время на изучение начальных разделов положительно), то есть

$$\begin{aligned} w(K_1 \cup K_2) &= w(K_1) + w(K_2) \text{ при } K_1 \cap K_2 = \emptyset, \\ K_1 \subset K_2 &\Rightarrow w(K_1) < w(K_2) \text{ при } K_1, K_2 \subseteq A. \end{aligned}$$

Веса (баллы) Шепли и Банзафа измеряется в часах, и они связаны, как со временем подготовки к выполнению заданий, так и со структурой курса A . Вес Шепли $Sh_\alpha(v)$ задания α – математическое ожидание времени обучения этому заданию при равновероятности всех программ обучения, или доля времени, затраченного только на изучение раздела α . Вес Банзафа $Bz_\alpha(v)$ задания α – математическое ожидание времени обучения этому заданию при равновероятности появления всех наборов заданий.

Вектор весов Шепли $w = Sh(v)$ – дележ, находящийся в дополнительном s -ядре $C^*(v)$, который может быть построен по любому курсу A при известных структуре и векторе $a = \{a_\alpha\}$.

Пусть K – совокупность выполненных заданий теста A или совокупность соответствующих разделов курса A . Тогда оценка уровня знаний вектором Шепли $w(K)$ близка к истинному уровню знаний $v(K)$ (является оценкой наименьших квадратов с соответствующими коэффициентами и ограничениями $w(\emptyset) = 0$, $w(A) = v(A)$).

6. Построение весов Шепли и Банзафа

Предположим что структуру изучаемого курса можно представить в виде дерева, в котором вершины – уровни знаний, а ребра – пути, по которым проходит обучение. Причем каждому ребру приписан вес – время необходимое учащемуся с одним уровнем знаний для освоения нового уровня знаний.

Приведем примеры расчета весов заданий теста для курсов, имеющих различную структуру.

Пример 6.1. Пусть все разделы курса $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ не связаны друг с другом ($S(\alpha_i) = \emptyset, i = \overline{1, n}$), а a_α – время, затрачиваемое на изучение раздела α . Время, затраченное на изучение разделов совокупности K , равно: $v(K) = \sum_{\alpha \in K} a_\alpha$. Таким образом, характеристическая функция игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$ аддитивна. В этом случае веса Шепли и Банзафа раздела (задания теста) $\alpha \in A$ совпадают со временем на изучение соответствующего раздела курса A : $w_\alpha = v(\{\alpha\}) = a_\alpha$.

Пример 6.2. Предположим, что разделы курса и соответствующие им задания $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ упорядочены линейно с начальным разделом α_1 . Иными словами невозможно научить учащегося выполнять задание α_i , если он не может выполнить задания с меньшими номерами. В этом случае структура курса задается функцией непосредственного предшествования S : $S(\alpha_1) = \emptyset$; $S(\alpha_i) = \{\alpha_{i-1}\}$. (Например, обучение приемам интегрирования происходит лишь после изучения дифференциального исчисления.) Пусть a_i – время, затраченное тестируемым на освоение раздела α_i , если он освоил разделы с меньшими номерами, тогда время необходимое для освоения разделов из совокупности K равно времени необходимому для освоения раздела с наибольшим из K номером, то есть

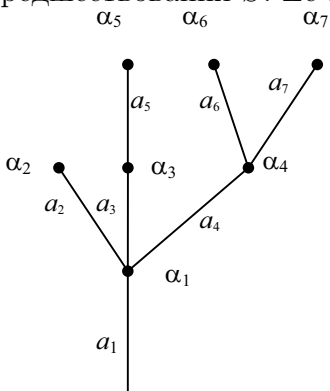
$$v(K) = \sum_{i=1}^m a_i, \quad m = \max K. \quad (6.1)$$

Вектора Шепли и Банзафа кооперативной игры $\Gamma = \langle A, v \rangle$ найдем по формулам (4.2). В результате мы будем иметь

$$Sh_i(v) = \sum_{j=1}^i \frac{a_j}{n-j+1}, \quad Bz_i(v) = \sum_{j=1}^i a_j 2^{n-j}.$$

Таким образом, назначая заданию α_i вес $Sh_i(v)$ мы считаем, что, осваивая каждый новый раздел, тестируемый поровну тратит время на изучение этого раздела и на подготовку к освоению каждого последующего раздела. Более сложно интерпретировать веса Банзафа, так как существенно весомыми оказываются лишь заключительные разделы. С другой стороны, в некоторых случаях, веса Банзафа обеспечивают наибольшую возможную чувствительность (разрешающую способность) теста. Пусть, например, все $a_i = 1$, тогда число возможных сумм баллов за тест A равно 2^n .

Пример 6.3. Курс, по которому составлен тест, состоит из 7 разделов. Его структура задается графом (см. рис. 1). Числа $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, 7}$ определяют время необходимое для изучения соответствующих разделов при условии, что все предыдущие разделы уже изучены. По вышеуказанному графу легко построить функцию непосредственного предшествования S . Ее значения равны



$$S(\alpha_1) = \emptyset, S(\alpha_2) = S(\alpha_3) = S(\alpha_4) = \{\alpha_1\}, \\ S(\alpha_5) = \{\alpha_3\}, S(\alpha_6) = S(\alpha_7) = \{\alpha_4\}.$$

Найдем вектора Шепли и Банзафа. (Мы используем следующие сокращения: $Sh_i = Sh_{\alpha_i}$, $Bz_i = Bz_{\alpha_i}$, $\overline{m}_i = \overline{m}_{\alpha_i}$). Для их вычисления найдем величины m_i (число разделов, для которых раздел α_i предшествующий):

Рисунок 1. Структура курса из 7 разделов.

$$\overline{m}_1 = 6, \quad \overline{m}_2 = 0, \quad \overline{m}_3 = 1, \\ \overline{m}_4 = 2, \quad \overline{m}_5 = \overline{m}_6 = \overline{m}_7 = 0.$$

Компоненты векторов Шепли и Банзафа могут быть найдены по формулам (5.4). В результате мы будем

$$Sh_1 = a_1/7, Sh_2 = a_1/7 + a_2, Sh_3 = a_1/7 + a_3/2, Sh_4 = a_1/7 + a_4/3, \\ Sh_5 = a_1/7 + a_3/2 + a_5, Sh_6 = a_1/7 + a_4/3 + a_6, Sh_7 = a_1/7 + a_4/3 + a_7,$$

и для вектора Банзафа:

$$Bz_1 = a_1/2^6, Bz_2 = a_1/2^6 + a_2, Bz_3 = a_1/2^6 + a_3/2, \\ Bz_4 = a_1/2^6 + a_4/2^2, Bz_5 = a_1/2^6 + a_3/2 + a_5, \\ Bz_6 = a_1/2^6 + a_4/2^2 + a_6, Bz_7 = a_1/2^6 + a_4/2^2 + a_7.$$

Если известны значения переменных $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, 7}$, то полученные формулы позволяют легко найти значения векторов Шепли и Банзафа. Таким образом, согласно формулам Шепли, при изучении начального раздела α_1 тестируемый лишь седьмую часть времени тратил на изучение этого раздела. Остальную часть времени он тратил на подготовку к изучению остальных шести разделов. Вес второго раздела состоит из одной седьмой части времени, затраченной на освоение первого раздела, и времени, затраченного на освоение раздела два. Сложнее интерпретировать веса Банзафа, так как веса начальных разделов существенно ниже весов топовых (сложных) разделов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кнут Д. *Искусство программирования для ЭВМ. Т.1 Основные алгоритмы*. М.: Мир, 1976.
2. Луценко М.М. *Теоретико игровой подход к оценке точности тестирования* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 4. С. 63–77.
3. Луценко М.М., Шадринцева Н.В. *О точности педагогического тестирования* // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2011. Вып 4(29). С. 250–258.
4. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и приложения: Учебное пособие*. СПб: Издательство «Лань», 2010.

5. Нейман Ю.М., Хлебникова В.А. *Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов*. М., 2000.
6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. *Теория игр. Учебное пособие для университетов*. М.: Высшая школа, 1998.
7. Brânzei R., Fragnelli V., Tijs S. *Tree-connected peer group situations and peer group games* // Mathematical Methods of Operations Research. 2002. V. 55. P. 93–106.
8. Curiel I. *Cooperative game theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
9. Gilles D.B. *Some theorems on n-person games*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.
10. Keane M. *Some topics in N-person game theory*. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1969.
11. Littlechild S.C., Owen G. *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case* // Management Sci. 1973. V. 20. P. 370–372.
12. Lutsenko M.M., Shadrintseva N.V. *A Game-Theoretic Approach for Assignment of Items Weight in the Test* // The Fifth International conference Game Theory and Management, Abstracts. 2011. P. 146–148.
13. Lutsenko M.M., Shadrintseva N.V. *The Shapley and Banzaf values for different courses of study* // The Sixth International conference Game Theory and Management, Abstracts. 2012. P. 165–169.
14. Lutsenko M.M., Shadrintseva N.V. *The Shapley value in testing* // Proceedings of the second international conference «Game theory and management application», «Game theory, operations research and applications», Hyderabad, Institute of public enterprise, India. 2012. P. 47–49.
15. Mashler M., Solan E., Zamir S. *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013.

16. Ni D., Wang Y. *Sharing a polluted river* // Games and Economic Behavior. 2007. V. 60. P. 176–186.
17. Rasmusen E. *Games and Information, An Introduction to Game Theory*. Blackwell, Oxford UK & Cambridge USA, 1989.
18. Ruiz L.M., Valenciano F., Zurzuelo J.M. *The family of Least Square Values for Transferable Utility Games* // Games and Economic Behavior. 1998. V. 24. P. 109–130.
19. Weber R.J. *Probabilistic Values for Games* // The Shapley Value (Essays in Honor of Lloyd S. Shapley), L.S. Shapley and A.E. Roth (ed.). Cambridge Univ. Press., Cambridge, UK. 1988. P. 101–119.
20. Shapley L.S. *A value for N-person games* // Contributions to the Theory of Games II (eds. H. W. Kuhn and A. W. Tucker). Princeton University Press, Princeton. 1953. P. 307–317.

COOPERATIVE METHOD FOR ASSIGNMENT OF ITEM WEIGHTS IN EDUCATIONAL TEST

Mikhail M. Lutsenko, The St. Petersburg Transport University, Dr.Sc., professor (ML4116@mail.ru).

Natalia V. Shadrintseva, The St. Petersburg Transport University, assistant professor (shadrinceva@mail.ru).

Abstract: A cooperative game related with determination of the weights of educational test is presented. A learning course structure and time required to be a student get trained are used to calculate a characteristic function of the game. Formulae for Shapley value and Banzhaf power index are given for linear and tree course structures.

Keywords: educational test, item weight, Shapley value, Banzhaf power index, cooperative game.