Математическая Теория Игр и её Приложения, т.6, в.2, с. 100–121

УДК 518.9
ББК 22.18

ОГРАНИЧЕННОЕ С-ЯДРО ДЛЯ ИГР С НЕПОЛНОЙ КООПЕРАЦИЕЙ *

Елена Б. Яновская
Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
e-mail: eyanov@emi.nw.ru

Игрой с *ограниченной (неполной) кооперацией* называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N$ – набор *допустимых коалиций,* такой что $N \in \Omega$, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция. В отличие от классических кооперативных игр с-ядро игры с ограниченной кооперацией может быть неограниченным. Недавно Грабиш и Зюдхолтер [9] предложили новое решение – ограниченное с-ядро, которое сопоставляет игре с ограниченной кооперацией объединение всех ограниченных граней ее с-ядра. Ограниченное с-ядро может быть пустым даже если само с-ядро не пусто. В статье приводятся две аксиоматизации ограниченного с-ядра. Первая характеризует ограниченное с-ядро на классе $\mathcal{G}^r$ всех игр с ограниченной кооперацией, а вторая – для подкласса $\mathcal{G}^r_{bc} \subset \mathcal{G}^r$ игр с непустыми ограниченными с-ядрами.

Ключевые слова: игра с ограниченной кооперацией, решение, с-ядро, ограниченное с-ядро, аксиоматическая характеризация.

1. Введение

Нахождение новых решений и их аксиоматическая характеризация являются одними из центральных задач теории кооперативных

* Работа поддержана грантом РФФИ 01-11-0411а

игр. Эти задачи успешно решаются для кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП). Однако, для различных обобщений ТП игр они еще не решены ввиду невыполнения естественных свойств решений ТП игр для таких обобщений, как, например, несовместности свойств линейности и эффективности для игр с нетрансферабельными полезностями.

В классических ТП играх предполагается, что для заданного множества игроков N любая коалиция $S \subset N$ допустима, так что характеристическая функция игры v определена на множестве всех коалиций, т.е. подмножеств множества игроков N. В реальных же ситуациях, моделируемых кооперативными играми, не все коалиции могут образоваться по разным причинам экономического, политического или технического характера.

Таким образом, следует рассмотреть более общий класс ТП игр, в котором наборы допустимых коалиций задаются априори, и определить для классические концепции справедливых распределений выигрышей. Такие игры называются *играми с ограниченной кооперацией.*

Обычно в контексте игр с ограниченной кооперацией рассматриваются конкретные ограничения на допустимые наборы коалиций. Первые работы в этом направлении рассматривали игры с *коалиционной структурой.* В таких играх уже определены и охарактеризованы линейные решения [11,14], зависящие от разбиения множества игроков. Однако, характеристическая функция для таких игр определялась, как и в классическом случае, на множестве всех коалиций, хотя ее значения для недопустимых коалиций не участвовали в определении решения.

Что касается c-ядра, то изучение этого решения для кооперативных игр с иерархической структурой коалиций восходит еще к работе Чарнса и Кортанека [1]. Чем меньше набор допустимых коалиций, тем большим становится c-ядро. Поэтому для достаточно малых допустимых наборов c-ядро может оказаться неограниченным. Одним из направлений дальнейших исследований c-ядра является ограничить c-ядро равенствами $x(S) = v(S)$ (вместо неравенств $x(S) \geq v(S)$) для некоторых допустимых коалиций [9]. Недавно Грабиш и Зюдхолтер [10] определили концепцию «ограниченного» c-ядра для игр с ограничениями, определяемыми частичным порядком на множестве игроков. В соответствующем определении вектор выигрышей x принадлежит ограниченному с-ядру, если для любого игрока каждый из его «подчиненных» по упорядочению является членом некоторой допустимой коалиции, эффективной для x и не содержащей этого игрока.

Оказалось, что это определение эквивалентно следующему: ограниченное с-ядро состоит из всех ограниченных граней с-ядра. Последнее определение можно применить к играм с произвольным набором Ω допустимых коалиций.

В данной работе рассматриваются классы ТП игр с произвольным набором допустимых коалиций, содержащим большую коалицию всех игроков. В первом разделе приводятся основные определения и необходимые для последующего известные результаты, а также необходимые и достаточные условия непустоты ограниченного с-ядра, если само с-ядро не пусто. В разделах 2 и 3 приводится аксиоматизация ограниченного с-ядра для класса всех игр с ограниченной кооперацией: в разделе 2 аксиоматизация дается для игр двух лиц, а затем в разделе 3 с помощью согласованного расширения построена аксиоматическая характеризация ограниченного с-ядра для классов с произвольными множествами игроков. Эти аксиоматизации не используют аксиому непустоты, поэтому они не дают характеризации ограниченного с-ядра как единственного решения, пустое решение, как правило, удовлетворяет произвольному набору аксиом. Однако если к набору аксиом добавить условие максимальности, то аксиоматизации получаются в явном виде. В последнем разделе приводится аксиоматическая характеризация ограниченного с-ядра для класса игр с непустым ограниченным с-ядром, таким образом, к системе аксиом добавляется аксиома непустоты. Эта аксиоматизация модифицирует известную аксиоматизацию с-ядра, данную Пелегом для сбалансированных игр [15]. Отличие состоит в том, что для игр с ограниченной кооперацией невозможно применять аксиому индивидуальной рациональности, так как одноточечные коалиции могут не быть допустимыми. Эта аксиома заменяется аксиомами ограниченности и ковариантности, что можно сделать и для классического случая.

2. Непустота ограниченного с-ядра

2.1. Определения и свойства ограниченного с-ядра

Игрой с ограниченной кооперацией называется набор (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор *допустимых* коалиций, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция.

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = = (N, v)$ становится классической ТП кооперативной игрой.

Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков, $\mathcal{G}^r$ – класс всех ТП игр с ограниченной кооперацией и множествами игроков из $\mathcal{N}$, так что

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r \implies N \subset \mathcal{N}.$$

Для вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и коалиции $S \subset N$ будем использовать обычное обозначений $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$, а через $\Omega|_S$ будем обозначать проекцию набора Ω на множество S :

$$\Omega|_S = \{T \subset S \,|\, \exists Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega\}.$$

Для каждой игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω), ее множество *допустимых* векторов выигрышей обозначим через

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) \le v(N)\},$$

а множество *эффективных* векторов выигрышей – через

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x(N) = v(N)\}.$$

Решением для класса $\mathcal{C}^r_N \subset \mathcal{G}^r_N$ называется отображение σ, сопоставляющее каждой игре $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}^r_N$ некоторое подмножество $\sigma(N, v, \Omega) \subset X(N, v)$.

С-ядром (анти с-ядром) игры (N, v, Ω) называется множество

$$C(N, v, \Omega) \;\; (AC(N, v, \Omega)) =$$
$$= \{x \in X^*(N, v) \,|\, x(S) \ge (\le) v(S) \text{ для всех } S \in \Omega\}.$$

Из определения следует, что с-ядро любой игры является замкнутым многогранным множеством. Оно может быть представлено в виде (см. [14]):

$$C(N, v, \Omega) = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(C(N, v, \Omega)) + C(N, v_0, \Omega),$$

где «conv» – выпуклая оболочка, «ext» – множество крайних точек, v_0 – нулевая игра, для которой $v_0(S) = 0$ для всех $S \in \Omega$.

Необходимые и достаточные условия непустоты с-ядра являются непосредственным следствием теоремы Бондаревой–Шепли:

Теорема (Faigle [5]). *Пусть* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$. *Необходимым и достаточным условием непустоты с-ядра* (N, v, Ω) *является выполнение неравенства*

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) \leq v(N),$$

для любой минимального сбалансированного набора коалиций $\mathcal{S} \in \Omega$, $\mathcal{S} \neq \{N\}$, *где* $(\lambda_S)_{S \in \mathcal{S}}$ *система балансирующих весов для набора* $\mathcal{S}$.

Следовательно если набор Ω не содержит сбалансированных поднаборов, то $C(N, v, \Omega) \neq \emptyset$ для любых значений $v(S), S \in \Omega$. Однако такое с-ядро может быть неограниченным.

Ограниченным с-ядром игры (N, v, Ω), $C^b(N, v, \Omega)$ называется объединение всех ограниченных граней с-ядра $C(N, v, \Omega)$. Ограниченное с-ядро может быть пустым даже если само с-ядро не пусто. Например, если $\Omega = \{S, N\}, S \subset N$, то с-ядро

$$C(N, v, \Omega) = \{x \in \mathbb{R}^N \,|x(N) = v(N), x(S) \geq v(S)\},$$

не имеет крайних точек, и, следовательно, не ограничено.

Ограниченное с-ядро является замкнутым связным многогранным множеством. Однако, оно может быть не выпуклым (пример см. [10]).

2.2. Непустота ограниченного с-ядра

Обозначим через $\mathcal{G}_b^r$ класс игр с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром.

Теорема 2.1. *Пусть* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ *– произвольная игра. Необходимым и достаточным условием непустоты ограниченного с-ядра игры* (N, v, Ω) *является равенство rank*$(||\chi_S||_{S \in \Omega}) = n = |N|$.

Доказательство. Непустота ограниченного с-ядра эквивалентна существованию у него крайних точек. Если $x \in \mathrm{ext}(C(N, v, \Omega))$, то

$x(S) = v(S)$ для таких коалиций из набора $\mathcal{S}_1 \subset \Omega$, что $|\mathcal{S}_1| \geq n$ и $(\mathcal{S}_1) = n$.

Предположим, что $\mathrm{rank}||\chi_S||_{S\in\Omega} = n$. Пусть $m \leq n$ – максимальное число коалиций в наборе $\mathcal{S}_2 \subset \Omega, N \in \mathcal{S}_2$, для которого векторы $\chi_S, S \in \mathcal{S}_2$ линейно независимы, и найдется вектор $x \in C(N, v, \Omega)$ с $x(S) = v(S)$ для всех $S \in \mathcal{S}_2$. Тогда, если $m = n$, то $x \in C_b(N, v, \Omega)$.

Пусть теперь $m < n$. Рассмотрим вектор $y \in X(N, v)$, для которого $y(S) = v(S)$ для всех $S \in \mathcal{S}_2$ и еще для одной коалиции $T \in \Omega$, такой, что векторы $\chi_S, S \in \mathcal{S}_2 \cup T$ линейно независимы. Такая коалиция T найдется по условию теоремы. Тогда $y \notin C(N, v\Omega)$ по максимальности m, следовательно, существует поднабор $\mathcal{Q} \subset \Omega \setminus (\mathcal{S}_2 \cup T)$, для которого $y(Q) < v(Q)$ для всех $Q \in \mathcal{Q}$. Обозначим $q = |\mathcal{Q}|$.

Заметим, что $x(Q) > v(Q)$ для всех коалиций $Q \in \mathcal{Q}$, так как, по максимальности набора $\mathcal{S}_2$, выполняется соотношение

$$x(R) = v(R) \text{ для } R \in \Omega \setminus \mathcal{S}_2 \implies y(R) = x(R).$$

Тогда для любой коалиции $Q \in \mathcal{Q}$ найдется такое число $\alpha(Q) \in \in (0, 1)$, что

$$z_Q = \alpha(Q)x(Q) + (1 - \alpha(Q))y(Q) = v(Q).$$

Пусть

$$Q_1 \in \arg\max_{Q\in\mathcal{Q}} \alpha(Q).$$

Тогда $z_{Q_1} \in C(N, v, \Omega)$. Вектор χ_{Q_1} должен линейно зависеть от векторов $\chi_S, S \in \mathcal{S}_2$ по максимальности $\mathcal{S}_2$. Следовательно,

$$|\{Q \in \Omega \setminus \mathcal{S}_2 \,|\, z_{Q_1}(Q) = v(Q)\}| = q + 1.$$

Повторим эту процедуру, начиная с вектора z_{Q_1} вместо x, и будем повторять ее далее. Тогда на шаге с номером $|\Omega| - n - q$ мы получим противоречие с условием $\mathrm{rank}(||\chi_S||_{S\in\Omega}) = n$. □

Джиллис [8] нашел условия на игры с ограниченной кооперацией, при которых само с-ядро ограничено. Ясно, что если $\Omega = 2^N$, то с-ядро ограничено. Приведем его результат.

Теорема (Gillies [8]). *Для того чтобы в игре $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_b^r$ ее с-ядро было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы набор Ω был сбалансирован и имел ранг $n = |N|$ (без N).*

Замечание 2.1. Заметим, что условия теоремы не зависят от значений характеристической функции, они накладываются только на набор Ω. Следовательно, для класса $\mathcal{G}_b^r$ теорема дает необходимые и достаточные условия непустоты ограниченного с-ядра для любой сбалансированной игры.

Пример 2.1. $N = \{1,2,3,4,5\}, \Omega = \{124, 134, 234, 125, 135, 235, N\}$,
$v(124) = 1, v(134) = 3, v(234) = 5$,
$v(125) = 2, v(135) = 4, v(235) = 6, v(N) = 7$.

Хорошо известно, что данный набор Ω не содержит сбалансированных поднаборов (за исключением $\{N\}$) [2], и $\mathrm{rank}||\chi_S||_{S\in\Omega} = 5$. По теореме 2.1 и теореме Джиллиса $C(N,v,\Omega) \neq \emptyset$, $C_b(N,v,\Omega) \neq \emptyset$.

Действительно, $C_b(N,v,\Omega) = \{x\}$, где $x = (-2,0,2,3,4)$. Здесь $x(S) = v(S)$ для всех $S \in \Omega$.

Пусть теперь N, Ω определены как и в предыдущем примере, но значения характеристической функции w определяются равенствами
$w(124) = 1, w(134) = 2, w(234) = 5$,
$w(125) = 3, w(135) = 1, w(235) = 4, w(N) = 7$.

Здесь $C^b(N,w,\Omega) = \{y\}$, $y = (-2,1,-1,5,4)$, $y(124) = 4 >$ $> 1 = w(124)$, $y(S) = v(S)$ для остальных коалиций $S \in \Omega$.

3. Характеризация ограниченного с-ядра для игр двух лиц

Цель этого раздела – дать аксиоматическую характеризацию ограниченного с-ядра для класса всех игр двух лиц с ограниченной кооперацией. Как следует из раздела 1, непустота ограниченного с-ядра для игр с ограниченной кооперацией зависит как от набора Ω, так и от непустоты самого с-ядра. Таким образом, чтобы установить непустоту ограниченного с-ядра, следует сначала установить непустоту с-ядра, а затем непустоту его ограниченных граней. Именно так была сформулирована теорема Джиллиса, дающая необходимые и достаточные условия ограниченного с-ядра для игр с непустым с-ядром. Поэтому, в этом и следующем разделах далее мы будем давать характеризации ограниченного с-ядра на пространстве всех игр с ограниченной кооперацией без аксиомы непустоты, а в последнем разделе – для класса игр с ограниченной кооперацией, обладающих ограниченным непустым с-ядром.

Сначала приведем список хорошо известных аксиом, описывающих свойства решений классических ТП игр с фиксированным конечным числом игроков.

Пусть $\mathcal{G}_N \subseteq \mathcal{G}^r$ –произвольных класс с множеством игроков N. Решение σ для класса $\mathcal{G}_N$ называется

– *не пустым* или удовлетворяющим свойству *непустоты*, если $\sigma(N, v, \Omega)) \neq \emptyset$ для любой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N$;

– *эффективным (EFF) или оптимальным по Парето,* если $\sum\limits_{i \in N} x_i(N, v) = v(N)$ для любых $x \in \sigma(N, v)$, $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N$;

– *анонимным (ANO),* если для любой игры $(N, v, \Omega)) \in \mathcal{G}$ и отображения $\pi : N \rightarrow \mathcal{N}$, такого, что $(\pi N, \pi v) \in \mathcal{G}_N$, выполняется следующее равенство: $\sigma(\pi N, \pi v, \pi\Omega) = \pi(\sigma(N, v))$. Здесь функция πv определяется равенствами $\pi v(\pi S) = v(S)$ для всех $S \subset N$;

– *ограниченным (BOUND)*, если $\sigma(N, v, \Omega)$ является ограниченным подмножеством множества $X(N, v)$ для всех $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N$;

– *супераддитивным (SUPA)*, если класс $\mathcal{G}_N$ замкнут относительно сложения характеристических функций, и для любых игр $(N, v_1, \Omega), (N, v_2, \Omega) \in \mathcal{G}_N$ выполняется неравенство

$$\sigma(N, v_1, \Omega) + \sigma(N, v_2, \Omega) \subset \sigma(N, v_1 + v_2, \Omega),$$

где $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ для всех $S \in \Omega$.

Следующая аксиома не столь хорошо известна. Она применялась автором для характеризации теоретико-множественных аналогов пред n-ядра [17].

Решение σ для класса $\mathcal{G}_N$ называется

– *ординальным (ORD)* или удовлетворяет *ординальности*, если из $(N, v, \Omega), (N, v', \Omega) \in \mathcal{G}_N$, $\ x \in X(N, v)\, x' \in X(N, v')$ для всех $S \in \Omega, S \neq N$ и соотношений

$$\begin{array}{lcl} x(S) < v(S) & \Longleftrightarrow & x'(S) < v'(S), \\ x(S) = v(S) & \Longleftrightarrow & x'(S) = v'(S), \end{array} \tag{3.1}$$

следует, что либо $x \in \sigma(N, v, \Omega)$, $x' \in \sigma(N, v', \Omega)$, либо $x \notin \sigma(N, v, \Omega)$, $x' \notin \sigma(N, v', \Omega)$.

Эта аксиома утверждает, что свойство вектора выигрыша принадлежать решению зависит только от знаков – больше-меньше нуля – компонент вектора эксцессов, но не зависит от самих значений. Из этого свойства следует, что любое ординальное решение для каждой игры (N, v, Ω) состоит из областей, на которые гиперплоскости $x(S) = v(S), S \in \Omega$ делят множество векторов выигрышей. Если решение σ для класса $\mathcal{G}^r$ удовлетворяет аксиомам BOUND и ORD, то эти области ограничены, т.е. для любой игры (N, v, Ω) множество $\sigma(N, v, \Omega)$ либо пусто, либо состоит из объединения некоторых ограниченных областей вида

$$\mathcal{D}_{\Omega_1,\Omega_2} = \{x \in X^*(N, v) \,|\, x(S) = v(S) \text{ для } S \in \Omega_1, \\ x(S) < v(S) \text{ для } S \in \Omega_2,\ \Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega\}.$$

Лемма 3.1. *Если решение для класса $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^r$ удовлетворяет аксиоме ординальности, то оно ковариантно.*

Доказательство. Пусть σ – произвольное решение для класса $\mathcal{G}'$, удовлетворяющее аксиоме ординальности, $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}'$ – произвольная игра, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}^N$. Рассмотрим игру (N, w, Ω), где $w(S) = \alpha v(S) + \beta(S)$ для всех $S \in \Omega$. Пусть $x \in \sigma(N, v, \Omega)$, $y = \alpha x + \beta$. Тогда следующие отношения выполняются для всех коалиций $S \in \Omega$:

$$x(S) < v(S) \iff y(S) < w(S), \tag{3.2}$$

$$x(S) = v(S) \iff y(S) = w(S). \tag{3.3}$$

По ординальности решения σ из формул (3.1), (3.3), (5.1) следует $y \in \sigma(N, w, \Omega)$, что и означает его ковариантность. □

Обозначим через $\mathcal{G}_2^r = \mathcal{G}_N^r, |N| = 2$ подкласс игр двух лиц. Он состоит из классических ТП игр двух лиц и из игр с $\Omega = \{i\}, \{i, j\}$ $(N = \{i, j\}.)$ Мы не рассматриваем вырожденный случай $\Omega = \{i, j\}$ так как для него ограниченное с-ядро пусто.

Лемма 3.2. *Пусть σ – решение для класса классических ТП игр двух лиц, удовлетворяющее аксиомам EFF, BOUND и ORD. Тогда* *для любой игры* $(\{i,j\},v)$ *ее решение* $\sigma(\{i,j\},v)$ *содержится либо в с-ядре, если игра супераддитивна, или в анти с-ядре, если игра субаддитивна.*

Доказательство. Пусть σ удовлетворяет условиям теоремы, $N = \{i,j\}$. Для любой игры (N,v) если решение $\sigma(N,v) \neq \emptyset$, то $\sigma(N,v) \subset X^*(N,v)$. Пусть $x \in \sigma(N,v)$. Если $x_i < v(\{i\}), x_j \geq v(\{i\})$, то по аксиоме ORD множество $\sigma(N,v)$ неограничено, что противоречит аксиоме BOUND. Следовательно, либо вектор x индивидуально рационален, либо выполняются неравенства $x_i \leq v(\{i\}), x_j \leq v(\{i\})$, означающие, что x принадлежит анти с-ядру.

Кроме того, по аксиоме ORD, если внутренность с-ядра или анти с-ядра пересекается с решением, то оно содержит соответствующую внутренность. □

Из леммы следует, что максимальное по включению решение для классических ТП игр, удовлетворяющее аксиомам EFF, BOUND и ORD, является решением, совпадающим с с-ядром для супераддитивных игр, и с анти с-ядром для субаддитивных.

Далее мы будем рассматривать не тождественно пустые решения для классов игр с ограниченной кооперацией, т.е. такие, для каждого из которых найдется игра из соответствующего класса, для которой решение не пусто. Как правило, для аксиоматизации таких решений нужно ввести аксиому, обеспечивающую непустоту решения хотя бы для одной игры.

Вместо такой аксиомы мы будет использовать свойство максимальности относительно включения решений, удовлетворяющих некоторым другим аксиомам.

Лемма 3.3. *Максимальным по включению решением для класса классических кооперативных игр двух лиц, удовлетворяющих аксиомам EFF, BOUND, ORD, и SUPA, является с-ядро для супераддитивных игр и анти с-ядро для субаддитивных игр.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что с-ядро и анти с-ядро игр двух лиц удовлетворяют всем условиям теоремы. По аксиомам ORD и BOUND они максимальны по включению.

Пусть теперь σ – решение, удовлетворяющее всем условиям теоремы. Из леммы 3.1 следует, что оно ковариантно, поэтому достаточно доказать теорему для игр $(N, v) = (\{i, j\}, v)$ с $v(\{i, j\} = 0$.

По аксиомам ORD и BOUND решение $\sigma(N, v)$ может состоять только из внутренностей с-ядра (анти с-ядра), их крайних точек и их объединений, и $\sigma(N, 0) = \mathbf{0}$. Максимальными из них будут сами указанные решения. □

Следствие 3.1. *Максимальное по включению решение для класса игр $\mathcal{G}'$ с ограниченной кооперацией и $|N| \leq 2$, удовлетворяющее аксиомам EFF, BOUND и ORD, совпадает с с-ядром для супераддитивных ТП игр и анти с-ядром для субаддитивных ТП игр и, соответственно, с ограниченными с-ядром и анти с-ядром для игр, не являющимися классическими ТП играми.*

Доказательство. В лемме 3.3 доказана справедливость этого утверждения для классических ТП игр двух лиц. Рассмотрим класс игр двух лиц с ограниченной кооперацией, не являющихся классическими ТП играми. Пусть (N, v, Ω) – произвольная игра из этого класса. Тогда набор Ω состоит из двух коалиций $\{i\}, \{i, j\}$. По аксиоме COV, следующей из ORD (лемма 3.1), множество $\sigma(N, v, \Omega)$ пусто или не пусто для всех игр с таким набором Ω. Предположим, что $\sigma(N, v, \Omega) \neq \emptyset$. Тогда по аксиомам EFF, BOUND и ORD

$$\sigma(N, v, \Omega) = \{(v(\{i\}), v(N) - v(\{i\})\}. \tag{3.4}$$

Следовательно, любое максимальное решение также совпадает с (3.4) для неклассических игр двух лиц с ограниченной кооперацией. Оно совпадает и с ограниченным с-ядром, и с ограниченным анти с-ядром. □

4. Характеризация ограниченного с-ядро для класса $\mathcal{G}^r$

Для определения расширений решений игр двух лиц, исследованных в предыдущем разделе, на игры из класса $\mathcal{G}^r$ с произвольными множествами игроков мы будем применять свойства согласованности, связывающие между собой решения игр с переменными множествами игроков.

Начнем с определения свойства согласованности в смысле определения Дэвиса–Машлера для класса игр $\mathcal{G}^r$ с ограниченной кооперацией. Впервые редуцированные игры для этого класса были определены Ллерена [13].

Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$ – произвольная игра, $x \in X^*(N, v), S \subset N$ – произвольные вектор выигрышей и коалиция. *Редуцированной игрой на множество игроков S относительно вектора x* называется игра (S, v_S^x, Ω_S), где

$$v_S^x(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S), & \text{если } T = S, \\ \max\limits_{\substack{Q \subset N \setminus S \\ T \cup Q \in \Omega}} v(T \cup Q) - x(Q), & \text{если } T \subsetneqq S. \end{cases} \tag{4.1}$$

Решение σ для класса $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^r$ называется

– *согласованным по Дэвису–Машлеру (CONS)*[1], если для любых игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}$ и коалиции $S \subset N$ из $x \in \sigma(N, v, \Omega)$ следует, что редуцированная игра $(S, v_S^x, \Omega_S) \in \mathcal{G}$, и $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega_S)$;

– *слабо согласованным (WCONS)*, если свойство согласованности выполняется только для редуцированных игр одного лица и двух лиц;

– *обратно согласованным (CCONS)*, если из следующих условий: $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}$, $x \in X^*(N, v)$, $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega|_S)$ $\forall S \subset N, |S| = 2$, следует, что $x \in \sigma(N, v, \Omega)$;

– удовлетворяет *свойству подтверждения (RCP)*, если из условий: $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}$, $x \in \sigma(N, v, \Omega)$, $S \subset N, y_S \in \sigma(S, v^x, \Omega|_S)$ следует, что $(x_{N \setminus S, y_S}) \in \sigma(N, v, \Omega)$.

Легко видно, что эти определения корректны для классов игр с ограниченной кооперацией, замкнутых относительно редуцирования. Действительно, из условия $N \in \Omega$ следует, что редуцированные игры определены для любой коалиции $S \subset N$. Далее, для каждой игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) набор $\Omega_{N \setminus \{i\}}$ для редуцированной игры на множество игроков $N \setminus \{i\}$ состоит из таких коалиций

---

[1]Это определение согласованности впервые было предложено Ллерена [13] для характеризации с-ядра для игр с ограниченной кооперацией.

$S \subset N \setminus \{i\}$, что либо $S \in \Omega$, либо $S \cup \{i\} \in \Omega$, либо $S, S \cup \{i\} \in \Omega$. Для любого из этих случаев равенство (4.1) определяет соответствующее значение характеристической функции редуцированной игры.

Замечание 4.1. В работе [6] (см. также [16]) было показано, что если решение σ для класса ТП игр удовлетворяет аксиомам COV, WCONS и BOUND, то оно эффективно. Этот результат можно применить и к играм с ограниченной кооперацией, и мы будем это делать без дальнейших пояснений.

Следовательно, по лемме 3.1, если решение σ для класса $\mathcal{G}^r$ (или для любого подкласса $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}^r$, замкнутого относительно редуцирования и ковариантных преобразований), удовлетворяет аксиомам ORD, WCONS и BOUND, то оно эффективно.

Покажем, что это замечание можно применить и к ограниченному с-ядру, т.е. что оно удовлетворяет приведенным аксиомам.

Ограниченность и ординальность следуют из определения ограниченного с-ядра. Следующий результат показывает его согласованность.

Предложение 4.1. *Ограниченное с-ядро согласовано в смысле Дэвиса–Машлера для любого класса $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}^r$, замкнутого относительно редуцирования для векторов из ограниченного с-ядра.*

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}'$, $x \in C^b(N, v, \Omega)$, $S \subset N$, а (S, v^x, Ω_S) – редуцированная игра на множество игроков относительно вектора x. Из определения согласованности для игр с ограниченной кооперацией следует, что $x_S \in C(S, v^x, \Omega_S)$.

По определению ограниченного с-ядра вектор x принадлежит одной из ограниченных граней с-ядра $C(N, v, \Omega)$. Такая грань определяется набором ее вершин $y^1, \ldots, y^k$, $k \le n$, для которых $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y^i$, $\alpha_i > 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Любая вершина y^i определяется набором линейно независимых коалиций $\mathcal{S}^i = \{T_1^i, \ldots, T_{n-1}^i, N\} \subset \Omega$, для которых выполняются равенства $y^i(T) = v(T)$ для $T = T^i_h, h = 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$x(T) \begin{cases} = v(T) & \text{для } T \in \bigcap_{i=1}^k \mathcal{S}^i, \\ > v(T) & \text{для остальных } T \in \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Так как $x_S \in C(S, v^x, \Omega|_S)$, из определения редуцированной игры $(S, v^x, \Omega|_S)$ следует, что $x_S(T) = v^x(T)$ для $T \subset S$, если найдется такая коалиция $Q \subset N \setminus S$, для которой $T \cup Q \in \bigcap_{i=1}^k \mathcal{S}^i$, и $x_S(T) > v^x(T)$ для остальных коалиций $T \subset S$.

Так как набор векторов, кроме x, удовлетворяющих (4.2), ограничен, соответствующая грань редуцированного с-ядра также ограничена. Действительно, неравенства (4.2) в пространстве $\mathbb{R}^S$ состоят из следующих векторов z_S :

$$z_S(T) \begin{cases} = v^x(T), & \text{если найдется такая коалиция} \\ & Q \subset N \setminus S, \text{ что } T \cup Q \in \Omega, \\ > v^x(T), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Вектор x_S удовлетворяет неравенствам (4.3), следовательно, он принадлежит ограниченному с-ядру $C^b(S, v^x, \Omega_S)$. □

Однако ограниченное с-ядро не удовлетворяет свойству обратной согласованности. Следующий пример показывает это.

Пример 4.1. Пусть(N, v, Ω) игра 5 лиц, в которой набор допустимых коалиций такой же, как в примере 1, $v(S) = 1$ для всех $S \in \Omega, S \neq N$, $v(N) = \frac{5}{3}$.

С-ядро этой игры неограничено: $C(N, v, \Omega) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \alpha(2, 2, 2, -3, -3)$, $\alpha \geq 0$. Ограниченное с-ядро состоит из единственной вершины $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = C^b(N, v, \Omega)$.

Пусть $y \in C(N, v, \Omega), y \neq x$ – произвольный вектор. Так как $\alpha > 0$, любая редуцированная игра $(\{i, j\}, v^y_{\{i,j\}}$ на множество двух игроков $\{i, j\}, i, j \in N$ является классической ТП игрой ввиду того, что $y_i > v^y_{i,j}(\{j\} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. В таких редуцированных играх с-ядро ограничено, т.е. $(y_i, y_j) \in C(\{i, j\}, v^y_{\{i,j\}}) = C^b(\{i, j\}, v^y_{\{i,j\}})$.

Введем ослабленное свойство обратной согласованности решений, удовлетворяющих аксиомам BOUND и ORD.

– Решение σ для класса $\mathcal{G}^r$, называется *ограниченно обратно согласованным, (BCCONS)*, если из $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r$, $x \in \mathcal{D}_{\Omega_1,\Omega_2}$ и $(x_i, x_j) \in \sigma(\{i, j\}, v^x, \Omega|_{\{ij\}})$ для всех $i, j \in N$ следует, что $x \in \sigma(N, v)$.

Очевидно, что ограниченное с-ядро обладает свойством BCCONS.

Вспомним следствие 3.1. Для того, чтобы выбрать решение игры из с-ядра и анти с-ядра, будем использовать ограниченную обратную согласованность.

Следующая лемма показывает, что анти с-ядро не удовлетворяет свойству обратной согласованности для классических ТП игр, а так как анти с-ядро для таких игр ограничено, то не выполнение для него свойства CCONS эквивалентно не выполнению ограниченной обратной согласованности для более широкого класса $\mathcal{G}^r$.

Лемма 4.1. *Анти с-ядро не удовлетворяет обратной согласованности на классе ТП игр с произвольным универсальным множеством игроков.*

Доказательство. Для произвольного конечного множества игроков N рассмотрим симметричную игру (N, v), в которой $v(N) = 1, v(S) = 1$ для всех $S, |S| \neq 2$, и $v(\{i, j\}) < \frac{2}{n}$ для всех $i, j \in N$. Тогда вектор $x = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ не принадлежит анти с-ядру $AC(N, v)$. Однако, для редуцированной игры на произвольное множество двух игроков $(\{i, j\}, v^x)$, $i, j \in N$ относительно x выполняются равенства $v^x(\{i\}) = v^x(\{j\}) = 1, v^x(\{i, j\}) = \frac{2}{n}$. Следовательно, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in AC(\{i, j\}, v^x)$. □

Теорема 4.1. *Ограниченное с-ядро является наибольшим по включению решением для класса $\mathcal{G}^r$, удовлетворяющим аксиомам BOUND, ORD, WCONS и BCCONS. Указанные аксиомы логически независимы.*

Доказательство. Уже было показано, что ограниченное с-ядро удовлетворяет всем указанным аксиомам. Остается доказать единственность наибольшего решения. Из условия максимальности следует, что мы можем исключить пустое решение, сопоставляющее каждой игре из рассматриваемого класса пустое множество.

Пусть σ – произвольное максимальное по включению решение для класса $\mathcal{G}^r$, удовлетворяющее всем аксиомам. Из замечания 4.1 следует, что оно эффективно. Теперь единственность и максимальность решения σ следуют из лемм 3.2, 4.1, замечаний 4.1 и 2.1.

Проверим независимость аксиом. Для этого приведем примеры решений, отличных от ограниченного с-ядра и удовлетворяющих всем аксиомам теоремы кроме одной.

Без аксиомы BOUND: $\sigma_1(N, v, \Omega) = X^*(N, v)$;

Без аксиомы ORD: $\sigma_2(N, v, \Omega) = PK(N, v, \Omega)$; Определение и свойства пред k-ядра для игр с ограниченной кооперацией можно найти в [12]. Это решение является непустым для сбалансированных наборов Ω (хотя, в отличие от пред n-ядра, не только для них), ограничено, согласовано и обратно согласовано. Последнее свойство обеспечивает максимальность решения σ_2.

Без аксиомы WCONS:

$$\sigma_3(N, v, \Omega) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } C^b(N, v, \Omega) = \emptyset, \\ C^b(N, v, \Omega), & \text{если } C^b(N, v, \Omega) \neq \emptyset \text{ и } |N| > 2, \\ \operatorname{rel\,int} C^b(N, v, \Omega), & \text{если } C^b(N, v, \Omega) \neq \emptyset \text{ и } |N| \leq 2. \end{cases}$$

Без аксиомы BCCONS:

$$\sigma_4(N, v, \Omega) = \begin{cases} C^b(N, v, \Omega), & \text{если } C^b(N, v, \Omega \neq \emptyset, \\ AC^b(N, v, \Omega), & \text{если } AC^b(N, v, \Omega \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{в остальных случаях .} \end{cases}$$

В последней формуле через AC^b обозначено ограниченное анти с-ядро, определяемое аналогично ограниченному с-ядру. □

5. Класс $\mathcal{G}^r_{bc}$ игр с ограниченной кооперацией и непустыми ограниченными с-ядрами

Игра (N, v, Ω) принадлежит классу $\mathcal{G}^r_{bc}$, если ее с-ядро $C(N, v, \Omega)$ не пусто и ограничено. Тогда если $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_{bc}$, то по цитированному результату Деркса и Райнерсе [4], набор Ω (без N) сбалансирован и имеет ранг $n = |N|$. В частности, класс сбалансированных ТП игр содержится в $\mathcal{G}^r_{bc}$.

Лемма 5.1. *C-ядро на классе $\mathcal{G}^r_{bc}$ удовлетворяет свойствам обратной согласованности и подтверждения.*

Доказательство. Аналогично доказательству для ТП игр. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_{bc}$, и вектор $x \in X^*(N, v)$ проектируется при редуцировании в вектор $x_S \in C(S, v^x)$ для всех коалиций двух лиц $S, |S| = 2$. Пусть $T \in \Omega, T \neq \emptyset, N$. Выберем игроков $i \in T, j \notin T$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i, j\}, v^x, \Omega|_{\{i,j\}})$. По цитированной в разделе 2 теореме Джиллиса [8] набор Ω сбалансирован и имеет ранг $|N|$, следовательно, он вполне разделяющий, т.е. $\Omega|_{\{i,j\}} = \{i\}, \{j\}, \{i, j\}$ и любая редуцированная игра двух лиц игры (N, v, Ω) является классической ТП игрой. Так как $(x_i, x_j) \in C(\{i, j\}, v^x)$, справедливы следующие неравенства:

$$0 \geq v^x(\{i\}) - x_i \geq v(T) - x(T). \tag{5.1}$$

Так как коалиция T – произвольная из набора Ω, получаем, что $x \in C(N, v, \Omega)$.

Пусть $y \in C(N, v, \Omega)$, $S \subset N$, $z_S \in C(S, v^y, \Omega|_S)$, где $(S, v^y, \Omega|_S)$ – редуцированная игра на множество игроков S относительно вектора y. Тогда

$$\begin{aligned} z_S(T) \geq v^y(T) \forall T \in \Omega|_S \subset S \implies & Z_S(T) + y(Q) \geq v(T) + v(Q) \\ & \forall T \subset S, Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega, \end{aligned}$$

т.е. $(z_S, y_{N \setminus S}) \in C(N, v, \Omega)$. □

Лемма 5.2. *Пусть решение σ для класса $\mathcal{G}^r_{bc}$ удовлетворяет аксиомам NE, BOUND, COV и WCONS. Тогда $\sigma(N, v, \Omega) \subset C(N, v, \Omega)$.*

Доказательство. Пусть σ – произвольное решение, удовлетворяющее всем аксиомам, указанным в лемме. Замечание 2.1 можно применить и к классу $\mathcal{G}^r_{bc}$. Тогда из аксиом BOUND и WCONS следует, что

$$\sigma(\{i\}, v) = v(\{i\}) \tag{5.2}$$

для всех игр одного лица (они не зависят от набора Ω).

Все игры двух лиц из класса $\mathcal{G}^r_{bc}$ являются классическими ТП играми. Пусть $x \in \sigma(\{i, j\}, v)$. Если $x \notin C(\{i, j\}, v)$, то x_i (или

$x_j < v(\{i\}))$. Следовательно, по аксиоме WCONS решения σ, в редуцированной игре на одно лицо $\{i\}$, $x_i < v^x(\{i\})$, что противоречит (5.2).

Пусть $x \in \sigma(N, v, \Omega)$, $n = |N| \geq 3$. Тогда по аксиоме WCONS, $x_S \in \sigma(S, v_S^x, \Omega|_S)$ для любой коалиции $S \subset N, |S| = 2$. Так как с-ядро удовлетворяет аксиоме обратной согласованности (лемма 5.1), $x \in C(N, v, \Omega)$. □

Следствие 5.1. *Если $C(N, v, \Omega) = \{x\}$, то $C(N, v, \Omega) = \sigma(N, v, \Omega)$.*

Следующая характеризация ограниченного с-ядра для класса $\mathcal{G}_{bc}^r$ является аналогом известного результата Пелега [15], характеризующего с-ядро для класса сбалансированных ТП игр. Разница состоит в невозможности применения аксиомы индивидуальной рациональности для игр с ограниченной кооперацией, так как одноэлементные коалиции могут не быть допустимыми.

Теорема 5.1. *Существует единственное решение для класса $\mathcal{G}_{bc}^r$, удовлетворяющее аксиомам NE, EFF, BOUND, COV, WCON и SUPA. Это с-ядро. Указанные аксиомы логически независимы.*

Доказательство. С-ядро удовлетворяет всем указанным аксиомам. Докажем единственность. Пусть σ – произвольное решение для класса $\mathcal{G}_{bc}^r$, удовлетворяющее всем аксиомам. Из леммы 5.2 следует, что достаточно доказать обратное включение $\sigma(N, v, \Omega) \supset C(N, v, \Omega)$ для всех игр $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{bc}^r$.

Доказательство является модификацией доказательства теоремы 5.4 [13]. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{bc}^r$ игра, для которой $|C(N, v, \Omega)| > 1$, и наборы $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, где оба набора Ω_1, Ω_2 сбалансированы и имеют ранг $|N|$. Пусть $x \in C(N, v, \Omega)$. Определим характеристическую функцию $w : 2^N \to \mathbb{R}^N$ следующим образом:

$$w(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega_1, \\ x(S), & \text{если } S \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда разность $u = v - w$ определяется равенствами

$$u(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S \in \Omega_1, \\ v(S) - x(S) \leq 0, & \text{если } S \in \Omega_2. \end{cases}$$

Тогда из свойств наборов Ω_1, Ω_2 следует $C(N, w, \Omega) = \{x\}, C(N, u, \Omega) = \{0\}$. По следствию 5.1 из леммы 5.2 мы получаем $\sigma(N, w, \Omega) = \{x\}, C(N, u, \Omega) = \{0\}$, а по аксиоме SUPA решения σ $x \in \sigma(N, w+u, \Omega) = \sigma(N, v, \Omega)$. Следовательно, $\sigma(N, v, \Omega) = C(N, v, \Omega)$.

Проверим независимость аксиом. Индекс следующих решений для класса $\mathcal{G}_{bc}^r$ означает отсутствие аксиомы в порядке перечисления их в утверждении теоремы.

– $\sigma_1(N, v, \Omega) = \emptyset$ для всех $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{bc}^r$.

Для игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{bc}^r$ обозначим через $\tilde{v}(N) = \sup_{\mathcal{B}} \sigma_{S \in \mathcal{B}} \lambda_S v(S)$, где $\mathcal{B}$ – сбалансированный набор коалиций из Ω, $\lambda_S, S \in \mathcal{B}$ – веса, соответствующие набору $\mathcal{B}$. Тогда по определению класса $\mathcal{G}_{bc}^r$, $\tilde{v}(N) \leq v(N)$.

– $\sigma_2(N, v, \Omega) = C(N, v, \tilde{v})$, где

$$\tilde{v}(S) = \begin{cases} \tilde{v}(N), & \text{если } S = N, \\ v(S) & \text{для остальных } S \in \Omega. \end{cases}$$

– $\sigma_3(N, v, \Omega) = X^*(N, v)$.

– $\sigma_4(N, v, \Omega) = \left\{ \frac{v(N)}{n}, \ldots, \frac{v(N)}{n} \right\}$.

– Значение Шепли:

$$\sigma_5(N, v, \Omega) = \arg \min_{x \in X^*(N,v)} \sum_{S \in \Omega} (s-1)!(n-s-1)!(v(S) - x(S))^2. \tag{5.3}$$

Приведенное определение значения Шепли для игр с ограниченной кооперацией обобщает определение Шепли, данное Кином [2] для классических кооперативных игр как результата решения аналога оптимизационной задачи (5.3), где вместо суммы по $S \in \Omega$ стоит суммирование по всем коалициям $S \subset N$. Для наборов Ω, решение задачи $\mathcal{G}_{bc}^r$ единственно.

– $\sigma_6(N, v, \Omega) = PN(N, v, \Omega)$. Так как по определению класса $\mathcal{G}^r_{bc}$ набор Ω сбалансирован и имеет полный ранг, пред n-ядро не пусто и одноточечно [4]. Очевидно, оно удовлетворяет всем свойствам кроме SUPA. □

Ясно, что в условиях теоремы класс $\mathcal{G}^r_{bc}$ можно заменить классом $\mathcal{G}_c$ сбалансированных ТП игр. В такой модификации теорема 5.1 будет давать еще одну аксиоматизацию c-ядра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charnes A., Kortanek K. *On balanced sets, cores and linear programming.* Cah. Centre étude. rech. oper. 1967. an. 0. N 1. P. 32–43.

2. Charnes A., Golany B., Keane M., Rousseau J. *Extremal principle solutions of games in characteristic function form: core, Chebychev and Shapley value generalizations* // In: *Econometrics of Planning and Efficiency* (eds. J.K. Sengupta and G.K. Kadekodi), Kluwer Academic Publisher, 1988, P. 123–133.

3. Davis M., Maschler M. *The kernel of a cooperative game* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. P. 223–259.

4. Derks J., Reijnierse H. *On the core of a collection of coalitions* // International Journal of Game Theory. 1998. V. 27. P. 451–459.

5. Faigle U. *Core of games with restricted cooperation* // Zeitschrift für Operation Research. 1989. V. 33. P. 405–422.

6. Hwang Y.-A., Sudhölter P. *Axiomatizations of the core on the univeesal domain and other natural domains* // International Journal of Game Theory. 2000. V. 29. P. 597–624.

7. Hokari T. *Consistency implies equal treatment in TU-games* // Games and Economic Behavior. 2005. V. 51. P. 63–82.

8. Gillies R.P. *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies* // Theory and Decision Library 44. Springer-Verlag, 2010.

9. Grabisch M. *Ensuring the boundedness of the core of games with restricted cooperation* // Annals of Operations Research. 2011. V. 191. P. 137–154.

10. Grabisch M., Sudhölter P. *The bounded core for games with precedence constraints* // Documents de travail du Centre d'Economie de la Sorbonne 12006, Universit Panthon-Sorbonne (Paris 1), Centre d'Economie de la Sorbonne, 2012.

11. Kamijo Y. *A two-step value for cooperative games with coalitional structures* // International Game Theory Review. 2009. V. 11. P. 207–214.

12. Katsev I.V., Yanovskaya E. *The prenucleolus for games with restricted cooperation* // Mathematical Social Sciences. 2013. V. 66. V. 56–65.

13. Llerena F. *An axiomatization of the core of games with a restricted cooperation* // Economic Letters. 2007. V. 95. P. 80–84.

14. Owen G. *Values of games with a priori unions* // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. 1977. V. 141. P. 76–88.

15. Peleg B. *On the reduced game property and its converse* // International Journal of Game Theory. 1986. V. 15. P. 187–200. *A correction* // International Journal of Game Theory. 1987. V. 16. P. 209.

16. Peleg B., Sudhölter P. *Introduction to the Theory of Cooperative Games.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

17. Yanovskaya E. *Set-valued analogues of the prenucleolus* // International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 1998. V. 7. N 4.

THE BOUNDED CORE FOR GAMES WITH RESTRICTED COOPERATION

Elena B. Yanovskaya, St.Petersburg Institute for Economics and Mathematics RAS, Dr.Sc., prof. (eyanov@emi.nw.ru)

Abstract: A game with *restricted cooperation* is a triple (N, v, Ω), where N is a finite set of players, $\Omega \subset 2^N$ is a non-empty collection of *feasible* coalitions such that $N \in \Omega$, and $v : \Omega \to \mathbb{R}$ is a characteristic function. Unlike the classical TU games the cores for games with restricted cooperation may be unbounded. Recently Grabisch and Sudhölter [9] proposed a new concept – the bounded core – that for assigns to a game (N, v, Ω) the union of all bounded faces of the core. The bounded core can be empty even the core is not empty. An axiomatization of the bounded core for the class $\mathcal{G}^r$ with restricted cooperation is given with the help of axioms efficiency, boundedness, bilateral consistency, a weakening of converse consistency, and ordinality. The last axiom states that the property of a payoff vector to belong to a solution only depends on the signs of the corresponding components of the excess vectors, but not on their values. Another axiomatization of the core is given for the subclass $\mathcal{G}^r_{bc} \subset \mathcal{G}^r$ of games with non-empty bounded cores. The characterizing axioms are non-emptiness, covariance, boundedness, bilateral consistency, and superadditivity,

Keywords: cooperative game, solution, core, bounded core, axiomatic characterization.