Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.3, с. 3–15

УДК 517.97
ББК 22.18

ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ-УБЕГАНИЯ НА РЕБЕРНОМ ОСТОВЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ. I

Абдулла А. Азамов
Атамурат Ш. Кучкаров
Азамат Г. Холбоев
Институт математики
при Национальном университете Узбекистана
100129, Узбекистан, Ташкент, Дурман йули, 29
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, kuchkarov1@yandex.ru,
azamatholboyev1@gmail.com

Рассматривается игра между группой из n преследователей и одним убегающим, движущимися по графу реберного остова правильного многогранника с одинаковой максимальной скоростью. Цель работы состоит в определении для каждого правильного многогранника M числа $N(M)$, обладающего следующими свойствами: при $n \geq N(M)$ игра заканчивается в пользу группы преследователей, а при $n < N(M)$ – в пользу убегающего. Часть I статьи посвящается случаю многогранников в $\mathbb{R}^3$, часть II будет посвящена случаю $\mathbb{R}^d, d \geq 5$, часть III – случаю $\mathbb{R}^4$.

Ключевые слова: игра преследования-убегания, задача сближения, задача уклонения, позиционная стратегия, контрстратегия, точная поимка, правильный многогранник, граф, одномерный остов.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по координации развития науки и технологий РУз (грант № Ф4-ФА-Ф014)

1. Введение

«Игра на графе» имеет по крайней мере две существенно разные постановки. В первой постановке пространством игры служит абстрактный граф [3]. В ней точки, управляемые игроками, двигаются по вершинам, причем из одной вершины в другую можно перейти только в том случае, если эти вершины образуют ребро. В этом случае ребро есть просто пара точек, хотя при геометрическим представлении оно может изображаться отрезком или кривой.

Такие игры относятся к классу динамических игр с дискретным временем. Существенно, что при этом граф может быть бесконечным. Примером может служить игра «Полицейский автомобиль» [1, 16]. Чтобы отличить от второй постановки, игры на абстрактных графах лучше называть «многоходовыми играми на графах». Разные варианты таких игр изучены, например, в работах [9, 10, 13, 17, 19].

В настоящей статье рассматривается игра преследования-убегания (или практически почти то же самое, игра сближения-уклонения), когда граф является геометрическим объектом, а ребра являются спрямляемыми жордановыми кривыми. В этом случае каждое ребро задается взаимно-однозначным, регулярным, абсолютно-непрерывным отображением $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$. (Предполагается, что ребра могут пересекаться только в вершинах). Последнее условие позволяет точкам двигаться вдоль ребер, т.е. в соответствии с уравнением вида $dX/dt = u(t)$, где $u(t)$ – измеримая функция, удовлетворяющая ограничению $|u(t)| \leq 1$ почти всюду. При этом допустимы те управления $u(t)$, для которых имеет место включение

$$X(t) = X_0 + \int_0^t u(s)ds \in M$$

при всех $t \geq 0$ (X_0 – начальное положение рассматриваемой точки). Вектор функция $X(t)$ представляет собой траекторию точки X. Поскольку управление $u(t)$ однозначно восстанавливается по траектории, мы будем преимущественно работать с траекториями.

В рассматриваемом случае игру следует отнести к классу дифференциальных игр преследования-убегания [4, 6, 8] с фазовым ограничением. Обзор работ по таким играм, а также близкой к ним задаче поиска на геометрических графах дан в [14] (см. также [2]).

2. Постановка задачи

Итак, задан M – граф одномерного остова правильного многогранника M, который обозначим той же буквой M. Вершины M будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, а ребра – парой вершин. В игре по графу M будут передвигаться точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и Q со скоростью, не превышающей по модулю ρ. При этом за счет выбора единицы измерения можно считать, что $\rho = 1$ и все ребра имеют длину 1. Точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ называются преследователями и их группа $\mathbb{P}$ (т.е. набор) составляет игрока-преследователя. Точка Q представляет собой убегающего игрока. В начальный момент времени $t = 0$ точки занимают положения $\mathbb{P}(0)$ и $Q(0)$. Если каждый из игроков выберет определенный способ управления, то точки двигаются по определенным траекториям $\mathbb{P}(t), Q(t)$. Способы управления должны обеспечить фазовое ограничение $P_k(t), Q(t) \in M$ при всех $t \geq 0, k = 1, 2, \ldots, n$. Пара таких способов управления образуют партию. Партия завершается в пользу игрока $\mathbb{P}$, если $P_k(t) = Q(t)$ для некоторых $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \geq 0$. Партия завершается в пользу игрока Q, если $P_k(t) \neq Q(t)$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $t \geq 0$.

Ответы на вопросы «Что такое способ управления игроков?» и «Как определяются траектории, порождаемые заданными начальными положениями $\mathbb{P}(0)$, $Q(0)$ и способами управления?» составляют проблему формализации понятия дифференциальной игры. К настоящему времени предложено много подходов к этой проблеме (см., например, [3–9, 17–19]). В принципе все они могут быть привлечены к нашей игре, но наиболее удобным представляется подход Л.С. Понтрягина, который можно называть конструктивным [4]. В этом подходе вопросы формализации переносятся из «постановки задачи» в «доказательство теоремы». А именно, понятия «способ управления» и «траектория» описываются не строго, частично апеллируя к интуитивным понятиям, в этом же стиле формулируется основной результат (в виде теоремы). И при этом в процессе доказательства строятся конкретные способы управления группы преследователей $\mathbb{U}^*$ и убегающей точки V^*, обладающие следующими свойствами (которые описываются в подходящей для нас форме):

1°. Для любого начального состояния $\mathbb{P}(0), Q(0)$ и измеримого управления $v(t), |v(t)| \leq 1$ п.в. на $[0, \infty)$, данные $\mathbb{P}(0), Q(0), v(\cdot), \mathbb{U}^*$ порождают траектории $\mathbb{P}(t), Q(t)$ так, что $P_k(t) = Q(t)$ для некоторых $k = 1, 2, \dots, n$ и $t \geq 0$;

2°. Существует начальное состояние $\mathbb{P}(0), Q(0)$ такое, что для любых измеримых управлений $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, $|u_k(t)| \leq 1$ п.в. на $[0, \infty), k = 1, 2, \dots, n$, данные $\mathbb{P}(0), Q(0), \mathbf{u}(\cdot), V^*$ порождают траектории $\mathbb{P}(t), Q(t)$ так, что имеет место $P_k(t) \neq Q(t)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и $t \geq 0$. (Заметим, что в нашем случае траектории будут определены единственным образом.)

Из условий 1° и 2° видно, что здесь рассматривается игра преследования-убегания с точной поимкой. Отметим, что свойства 1° и 2° являются независимыми – в условии 1° способ управления преследователя $\mathbb{U}^*$ действует против произвольных допустимых управляющих функций $v(\cdot)$ убегающего, в то же время как в условии 2° способ управления убегающего V^* сравнивается с произвольным набором допустимых управлений $\mathbf{u}(\cdot)$ группы преследователей.

При этом, исходя из того, что рассматривается точная поимка, способ управления убегающего выбирается в виде позиционной стратегии, точнее говоря, исходя из информации $\mathbb{P}(s), Q(s), 0 \leq s \leq t$, где t – текущий момент времени, а способ управления группы преследователей выбирается в виде контрстратегии, т.е. исходя из информации о $\mathbb{P}(s), Q(s), 0 \leq s \leq t$ и еще о значении $v(t)$.

Поскольку, как было отмечено выше, каждый раз гарантирующие способы управления строятся в явном виде, то формализация понятия «игра заканчивается в пользу игрока ... » и других понятий в соответствии с существующими подходами не представляет собой сложную задачу.

В данной работе для каждого правильного многогранника M найдено такое натуральное число $N(M)$, что при $n \geq N(M)$ имеет место свойство 1°, а при $n < N(M)$ – свойство 2°. При этом в процессе решения задачи преследования (т.е. при $n \geq N(M)$) для каждого многогранника M будет указано положительное число $T(M)$, такое, что равенство $P_k(t) = Q(t)$ в свойстве 1° будет иметь место при некотором $t \in [0, T(M)]$. Аналогично, при решении задачи убегания указывается число $T,\ T > 0$, и последовательность моментов времени $t_1, t_2, \dots$, такие, что $t_1 \geq 0,\ t_{n+1} - t_n > T,\ n = 1, 2, \dots$, и ситуация с расположением точек (в определенном смысле этого слова) в моменты времени t_n повторяют ситуацию в момент времени t_1.

Таким образом, фактически игра преследования-убегания на бесконечном интервале времени сведется к игре на конечном фиксированном отрезке. Это обстоятельство позволяет применить теорему об альтернативе Н.Н. Красовского в следующей усиленной форме: для каждого многогранника M и числа n имеет место одно и только одно из свойств 1° и 2° [4, 5].

3. Основной результат

Теорема 3.1. N(тетраэдр)$=N$(куб)$=N$(октаэдр)$=2$; N(додекаэдр)$=N$(икосаэдр)$=3$.

Доказательство приводится раздельно для каждого многогранника, хотя схемы доказательства во многом имеют общие черты и допускают обобщение для некоторых типов графов, имеющих достаточно богатую группу симметрий.

3.1. Случай: M – тетраэдр

Пусть M – тетраэдр. Достаточно показать, что два преследователя P_1, P_2 поймают убегающего Q. Предпишем преследователю P_1 занять ближайшую вершину M, скажем A – на это потребуется время не более 0.5 (вспомним, что было предположено $\rho = 1$ и все ребра имеют длину 1). После этого преследователь P_2 начинает преследовать Q, заставив его пройти через какую-либо вершину B многогранника M – на это потребуется время, как легко вычислить, не более 2.5 (наихудшее положение перед началом процесса преследования Q со стороны P_2 – это когда P_2 находится в середине какого-либо ребра с концом A, а Q – на противоположном ребре). Пусть $t = \tau$ – момент времени, когда Q оказался в вершине B, так что $\tau \leq 3$ (рис. 1). Можно считать $B \neq A$. Начиная с этого момента времени P_2 продолжит преследование Q, заставляя последнего уйти из вершины B, а точке P_1 предписывается двигаться симметрично к Q относительно плоскости симметрии M, проходящей через середину ребра AB. За время, не превосходящее 1.5, либо P_1 и Q одновременно окажутся в точке, лежащей на плоскости симметрии, либо Q будет пойман преследователем P_2.

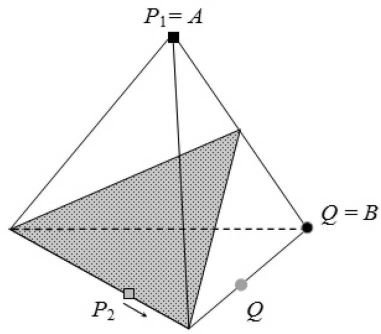

Рисунок 1. Ситуация в момент времени $t = \tau$

Следствие. Для тетраэдра время поимки T(тетраэдр)≤ 4.5.

Примечание. На самом деле можно показать T(тетраэдр)≤ 3.5 и это время является оптимальным в определенном смысле этого понятия.

3.2. Случай: M – октаэдр

И здесь P_1 займет положение в какой-либо вершине A и будет ждать там, пока P_2 не заставит Q пройти через одну из вершин, соседних с A. Преследователь P_2 может осуществить это, например, сперва добравшись до вершины $\bar{A}$ (здесь и в дальнейшем антиподальная точка обозначается чертой сверху), затем направляясь в сторону Q (рис. 2). Таким образом, за время, не превосходящее 3.5, точки P_1 и Q окажутся одновременно в соседних вершинах A и B соответственно. Этот момент времени обозначим τ. Пусть Π – плоскость симметрии M, проходящая через середину ребра AB. При $t \geq \tau$ точке P_1 предпишем двигаться симметрично Q относительно Π, а P_2 продолжит преследование Q, все время направляясь к Q по ближайшему вдоль M пути. Тогда, если Q попадает на Π, то она будет поймана точкой P_1. Чтобы избежать попадания на Π, точка Q должна оставаться в пределах связной компоненты разности $M \backslash \Pi$, содержащей вершину B, которая представляет собой дерево (т.е. граф без циклов). В таком случае точка Q будет поймана точкой P_2 за время, не превосходящее 2, разумеется, если за это время последняя сама не столкнулась с точкой P_1.

Следствие. T(октаэдр)≤ 5.5.

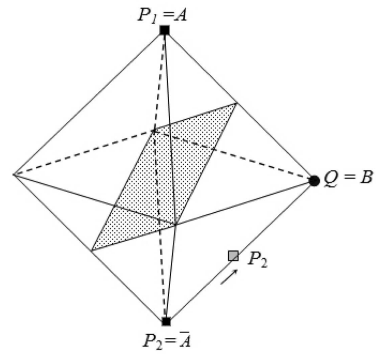

Рисунок 2. Ситуация в момент времени $t=\tau$

3.3. Случай: M – куб

В этом случае P_1 займет положение в вершине A, а P_2, если потребуется, сперва добравшись до вершины $\bar{A}$, заставит Q пройти через одну из вершин B_1, B_2, B_3, таких, что отрезки AB_1, AB_2, AB_3 есть диагонали граней с общей вершиной A (рис. 3). Это можно осуществить потому, что если исключить из рассмотрения ребра, выходящие из A, то при удалении точек B_1, B_2, B_3 оставшаяся часть M распадается на деревья.

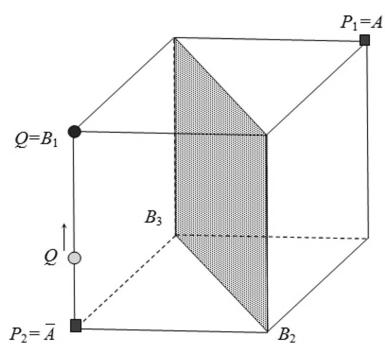

Рисунок 3. Ситуация в момент времени $t=\tau$

Итак, пусть τ – первый момент времени, когда $Q \in \{B_1, B_2, B_3\}$, например $Q(\tau)=B_1$. Обозначим П плоскость симметрии куба, проходящую через середину отрезка $AB_1 = P_1(\tau)Q(\tau)$ перпендикулярно этому отрезку. Начиная с этого момента времени P_1 будет двигаться симметрично Q относительно плоскости П. И на этот раз $M\backslash\Pi$ распадается на две компоненты связности, являющиеся деревьями. Поэтому P_2, преследуя Q, либо настигает его, либо заставит попасть на $M\cap\Pi$, где его встретит P_1.

Легко заметить, что $T(M) \leq 6$.

3.4. Случай: M – икосаэдр

Сперва докажем, что два преследователя P_1, P_2 не смогут поймать Q. В качестве $Q(0)$ выберем какую-либо вершину A, так чтобы $P_1(0)$ и $P_2(0)$ были отличны от A (такое расположение назовем начальной ситуацией). Для доказательства достаточно убедиться, что убегающий либо может, избегая поимки, оставаться на месте, либо сможет перейти в одну из соседних с A вершин, тем самым повторив начальную ситуацию.

Если при $t = 0$ точки P_1, P_2 находятся в замкнутой $\frac{1}{2}$-окрестности вершины A (в метрике M, т.е. на половинах ребер с концом A), то Q предпишем передвигаться к соседней вершине по ребру, которое свободно от преследователей.

Если при $t = 0$ обе точки P_1, P_2 находятся вне замкнутой $\frac{1}{2}$-окрестности вершины A, то Q предпишем оставаться на месте, пока хотя бы одна из точек P_1, P_2 не окажется на расстоянии $\frac{1}{2}$ от вершины A.

Пусть в некоторый момент времени τ (возможно $\tau = 0$) точка P_1 находится в замкнутой $\frac{1}{2}$-окрестности вершины A, скажем на ребре AB_0, а точка P_2 – вне этой окрестности. При этом возможны 5 случаев расположения точки P_2 (рис. 4a).

I. P_2 находится в пределах открытой звезды вершины A, скажем на открытом ребре AB_1. В этом случае Q может перейти в любую из оставшихся вершин B_2-B_4, соседних с A.

II. P_2 находится на одном из замкнутых ребер B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_0. Предположим, что $P_2 \in B_kB_{k+1}$ (значения индексов вершин находятся по mod 5). В этом случае расстояние от P_2 по крайней мере до одной из вершин B_j, отличной от B_0, больше 1 (в метрике M), так, что Q может перейти к этой вершине, избегая поимки.

III. P_2 находится на одном из открытых ребер $B_i\overline{B}_j$ (легко заметить, что при этом $2 \leq |i - j| \leq 3$). В этом случае Q может пе-

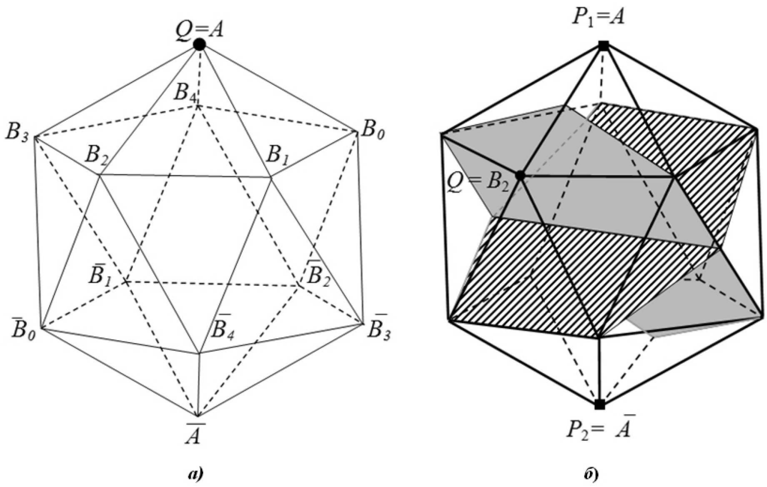

Рисунок 4. Ситуация в момент времени $t = \tau$

реместится к вершине B_k, отличной от $B_0, B_{i-1}, B_i, B_{i+1}$ (среди этих вершин могут быть и совпадающие).

IV. P_2 находится на одном из замкнутых ребер $\overline{B}_i\overline{B}_{i+1}$. В этом случае Q может перейти к той из вершин B_i, B_{i+1}, которая отлична B_0.

V. Наконец, если P_2 находится на открытой звезде вершины $\overline{A}$, то Q может перейти к любой вершине B_k, отличной от B_0.

Теперь докажем, что три преследователя P_1, P_2, P_3 в состоянии поймать Q. Точкам P_1 и P_2 предпишем занять положения в вершинах A и $\overline{A}$ соответственно (требуемое время ≤ 2) и ждать там до тех пор, пока P_3, преследуя Q, не заставит ее пройти через какую-либо из оставшихся вершин. Пусть в момент времени τ точка Q окажется, скажем на вершине B_2. Легко заметить, что $\tau \leq 5$. Пусть Π_1 и Π_2 – плоскости симметрии M, проходящие через середины отрезков AB_2 и $\overline{A}B_2$ соответственно. При $t \geq \tau$ точкам P_1 и P_2 предпишем двигаться симметрично к Q относительно плоскостей Π_1 и Π_2 соответственно (рис. 4*б*). Чтобы избежать попадания на $\Pi_1 \cup \Pi_2$, точка Q должна оставаться в пределах связной компоненты разности $M \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, содержащей B, которая представляет собой дерево (см. рис. 4*б*; в действительности, компонента $M \backslash (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, содержащая Q, окажется звездой). Если Q попадает на Π_i, то там ее встретит преследователь $P_i, i = 1, 2$. В противном случае точка Q будет поймана точкой P_3.

Легко заметить, что T(икосаэдр)≤ 9.

3.5. Случай: M – додекаэдр

Сперва докажем, что два преследователя P_1, P_2 не смогут поймать Q. В качестве $Q(0)$ выберем какую-либо вершину A, так чтобы $P_1(0)$ и $P_2(0)$ были отличны от A. И здесь докажем, что убегающий в состоянии перейти в одну из соседних с A вершин B_1, B_2, B_3, избегая поимки, тем самым повторив начальную ситуацию.

Рассмотрим звезды $Z(B_1), Z(B_2), Z(B_3)$ этих вершин (как замкнутые подмножества M). Пересечение каждой пары этих звезд состоит лишь из точки A. Поэтому множества $Z(B_1) \setminus A, Z(B_2) \setminus A, Z(B_3) \setminus A$ попарно не пересекаются. Следовательно, по крайней мере одно из них свободно от преследователей. Пусть это будет множество $Z(B_1) \setminus A$. В такой ситуации убегающему Q предпишем перейти к вершине B_1. При этом он не будет пойман, так как расстояние от B_1 и до $P_1(0)$, и до $P_2(0)$ больше 1.

Теперь докажем, что три преследователя P_1, P_2, P_3 смогут поймать Q. Точкам P_1, P_2 предпишем занять положение в вершинах A и $\overline{A}$ соответственно (для этого достаточно времени $t_0 \leq 3$). Преследователю P_3 предпишем сперва добираться до ближайшей вершины того ребра, где находится $Q(0)$, затем все время двигаться в сторону Q по ближайшему пути вдоль M, заставив Q перейти через какую-либо вершину B. Можно считать, что B не совпадает ни с A и ни $\overline{A}$. Из строения додекаэдра вытекает, что существует грань многогранника M, содержащая либо B и A, либо B и $\overline{A}$. Пусть вершины B и A лежат на одной грани. При этом возможны два случая: вершины A и B соседние (в этом случае точки A и B на рис. 5 обозначены A^* и B^*) или расстояние от A до B равно 2. Если t_1 соответствующий момент времени, то $t_1 \leq 8$, в чем не сложно убедиться. Плоскость симметрии многогранника M, проходящую через середину отрезка AB, обозначим П. Разность $M \setminus \Pi$ распадается на две открытые (в топологии M) компоненты связности. Пусть K – компонента, содержащая точку $B = Q(t_1)$. Из строения графа M следует, что K содержит два цикла с общим ребром, которое обозначим CD. Начиная с момента

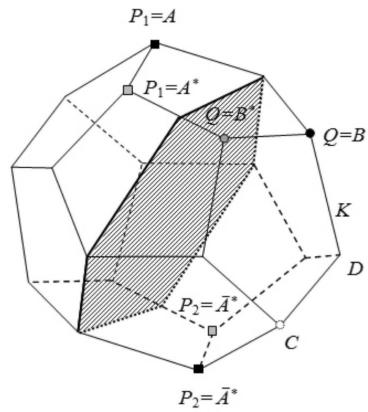

Рисунок 5. Ситуация в момент времени $t = t_1$

времени t_1 точке P_1 предпишем двигаться симметрично к Q относительно плоскости П, а преследователю P_2 – перейти к ближайшей из вершин C, D (пусть это будет C) и в дальнейшем оставаться там, в то время как P_3 продолжит преследование. Разность $K \setminus \{C\}$ будет деревом (рис. 5). Отсюда вытекает, что Q не сможет избежать поимки.

Можно заметить, что T(додекаэдр)$\leq 8 + 2 + 5 = 15$.

Теорема доказана.

В заключении авторы выражают признательность Л.А. Петросяну за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А.А. *Основания теории дискретных игр.* Ташкент: Niso Poligraf, 2011.

2. Азамов А.А. *Нижняя оценка для коэффициента преимущества в задаче поиска на графах* // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44. №12. С. 1700–1703.

3. Дистель Р. *Теория графов.* Новосибирск: Издательство Института математики, 2002.

4. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* М.: Наука, 1985.

5. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Оптимальный поиск в условиях конфликта.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.

6. Понтрягин Л.С. *Избранные научные труды. Т. 2.* М.: Наука, 1988.

7. Пшеничный Б.Н. *Структура дифференциальных игр*// Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 2. С. 285-287.

8. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

9. Aigner M., Fromme M. *A game of cops and robbers* // Discrete Appl. Math. 1984. №8. P. 1–11.

10. Andreae T. *Note on a pursuit game played on graphs* // Discrete Appl. Math. 1984. №9. P. 111–115.

11. Elliot P.J., Kalton N.J. *The existence of value in games* // (Memoirs of the AMS. №126). Paris. 1972.

12. Fleming W.H. *The convergence problem for differential games* // J. Math. Anal. and Appl. 1961. V. 3. №3. P. 102–116.

13. Fomin F.V., Golovach P.A., Petrov N.N. *Search problems on 1-skeletons of regular polyhedrons* // Int. J. Math. Game Theory and Algebra. 1988. №7. P. 101–111.

14. Fomin F.V., Thilikos D.M. *An annotated bibliography on guaranteed graph searching* // Theoretical Computer Science. 2008. V. 399. P. 236–245.

15. Friedman A. *Differential Games.* New York: John and Wiley, 1971.

16. Isaacs R.*Differential Games.* NY: John and Wiley, 1971.

17. Nowakowski R., Winkler P. *Vertex-to-vertex pursuit in a graph* // Discrete Math. 1983. №43. P. 235–239.

18. Petrosjan L.A. *Differential Games of Pursuit.* World Scientific Publisher, 1993.

19. Quilliot A. *Some results about pursuit games on metric spaces obtained through graph theory techniques* // Eur. J. Comb. 1986. №7. P. 55–66.

THE PURSUIT-EVASION GAME ON THE 1-SKELETON GRAPH OF THE REGULAR POLYHEDRON. I

Abdulla A. Azamov, Institute of Mathematics of the National University of Uzbekistan, Dr.Sc., Professor (abdulla.azamov@gmail.com).
Atamurat Sh. Kucharov, Institute of Mathematics of the National University of Uzbekistan, Dr.Sc. (kuchkarov1@yandex.ru).
Azamat G. Holboyev, Tashkent State Pedagogical University, assistant professor (azamatholboyev1@gmail.com).

Abstract: We consider a game between a group of n pursuers and one evader moving with the same maximal speed along 1-skeleton of a given regular polyhedron. The objective of the paper consists of finding an integer $N(M)$ possessing the following property: if $n \geq N(M)$ then the group of pursuers wins while if $n < N(M)$ then an evader wins. Part I of the paper is devoted to the case of polyhedrons in the space $\mathbb{R}^N$, Part II will be devoted to the case $\mathbb{R}^N$, $n \geq 5$, and Part III will be devoted to the case $\mathbb{R}^4$.

Keywords: pursuit-evasion game, approach problem, evasion problem, positional strategy, counterstrategy, exact catch, regular polyhedron, graph, one-dimensional graph.