Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.3, с. 16–47

УДК 519.833
ББК 91АД, 49Л35

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА. I. СТАТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ*

Светлой памяти Константина Семеновича Вайсмана посвящается

Владислав И. Жуковский
Московский государственный университет
им М.В. Ломоносова
119991, Москва, СП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Константин Н. Кудрявцев
Южно-Уральский государственный университет
454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
e-mail: kudrkn@gmail.com

Предлагается в качестве математической модели Золотого правила использовать концепцию равновесия по Бержу, появившуюся в России в 1994 году в диссертации и работах К.С. Вайсмана. Формализуется равновесие по Бержу–Парето, выявляются достаточные условия и, в качестве приложения, доказывается существование в смешанных стратегиях.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, равновесие по Бержу, максимум по Парето.

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а и НАН Украины, проект №03-01-14

> Celui qui croit pouvoir trouver en soi-même de quoi se passer de tout le monde se trompe fort; mais celui qui croit qu'on ne peut se passer de lui se trompe encore davantage.
>
> La Rochefoucauld[1].

1. Основные понятия

1.1. Золотое правило

Большинство народов в их религиозно–этических основаниях исходят из одной и той же стратегии поведения, которая воплотилась в требовании, получившем название ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА. Надеемся, что оно станет установившейся нравственной формулировкой поведения человечества. Самое известное понятие Золотого Правила гласит: «Поступай по отношению к другому так, как ты хотел бы, чтобы он поступил по отношению к тебе» (из лекции в МГУ директора института философии РАН, академика Гусейнова А.А. 10 октября 2014 г. на IX московском фестивале науки). Исток этого в НОВОМ ЗАВЕТЕ, в Евангелие от Луки, гл.6, стих 31: «И как хотите, чтобы с вами поступали люди, так и вы должны поступать с ними».

1.2. Концепция равновесности по Нэшу

В настоящее время, когда мир содрогается в ожидании обострения вооруженных конфликтов, Золотое правило становится как никогда, актуальным. Ибо Золотое правило – один из возможных способов избежать войн, кровопролитий. В самом деле, сейчас военная наука, в основном, базируется на концепции *равновесности по Нэшу* (РН) конфликтующих сторон (КС). Например, в математической модели конфликта трех сторон ($i = 1, 2, 3$)

$$\Gamma_3 = \langle \{1,2,3\}, \{\mathbf{X}_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x_1,x_2,x_3) = f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle,$$

(где каждая из КС выбирает свою стратегию $x_i \in \mathbf{X}_i$ ($i = 1, 2, 3$) с целью повысить оценку качества своего функционирования $f_i(x)$)

---

[1] «Тот, кто думает что может обойтись без мира, сильно обманывает себя; но тот, кто полагает, что мир не сможет обойтись без него, заблуждается еще больше». Франсуа де Ларошфуко (1613-1680) французский писатель, автор «Максимы и моральные размышления» (1665).

ситуация равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, x_2^e, x_3^e)$ определяется равенствами:

$$
\begin{aligned}
f_1(x^e) &= \max_{x_1 \in \mathbf{X}_1} f_1(x_1, x_2^e, x_3^e),\\
f_2(x^e) &= \max_{x_2 \in \mathbf{X}_2} f_2(x_1^e, x_2, x_3^e),\\
f_3(x^e) &= \max_{x_3 \in \mathbf{X}_3} f_3(x_1^e, x_2^e, x_3).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Ситуация равновесия по Нэшу $x^e \in \mathbf{X}$, определенная в (1.1), устойчива по отношению к отклонению отдельного игрока от своей стратегии, входящей в x^e. Одновременно, следуя x^e, каждая КС стремится лишь удовлетворить собственные «эгоистические амбиции», не думая о других. Это понятие равновесности предложил известный американский математик и экономист Джон Форбс Нэш в 1949 г. (тогда аспирант Принстонского университета), получивший через 45 лет, совместно с Джоном Харшаньи и Райнхардом Зельтоном, Нобелевскую премию за «фундаментальный анализ равновесий в теории некооперативных игр». Отметим два обстоятельства. Во-первых, благодаря своим исследованиям в области теории игр Д.Ф. Нэш, в конце прошлого века,становится одним из видных американских апологетов холодной войны, во-вторых, равновесие по Нэшу нашло столь широкое применение в экономике, социологии, военном деле, что начиная с 1994 по 2012 годы Нобелевский комитет присудил семь нобелевских премий за исследования во многом опирающиеся на концепцию равновесности по Нэшу. Однако именно упомянутый «эгоистический характер» РН не «прокладывает путь» к мирному решению конфликтов.

1.3. Равновесность по Бержу

Как раз «мирное» разрешение могло бы выполнить равновесие по Бержу (РБ). Это понятие появилось в России в 1994 г. в результате изучения книги Клода Бержа [15].

Ситуация равновесия по Бержу $x^B = (x_1^B, x_2^B, x_3^B)$ определяется равенствами:

$$
\begin{aligned}
f_1(x^B) &= \max_{(x_2, x_3) \in \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_3} f_1(x_1^B, x_2, x_3),\\
f_2(x^B) &= \max_{(x_1, x_3) \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_3} f_2(x_1, x_2^B, x_3),\\
f_3(x^B) &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2} f_1(x_1, x_2, x_3^B).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Отличие (1.2) от (1.1) в том, что в (1.1) каждая КС направляет все свои усилия, чтобы добиться как можно большего *своего* выигрыша (значения своей функции выигрыша). Антиподом (1.1) является (1.2), где каждая КС направляет все свои усилия, чтобы увеличить выигрыши остальных КС, «забывая о себе», о своих собственных интересах. Такой альтруистический подход свойственен родственным отношениям, имеет место в религиозных сообществах, элементы подобного альтруизма проявляются в благотворительности, спонсорской поддержке и т.д. Равновесие по Бержу также решает проблему Таккера в знаменитой игре «дилемма заключенного» (см. далее пример 2.3). Применение концепции равновесности по Бержу заведомо, в силу (1.2), исключает вооруженные столкновения, кровопролитные войны. В этом несомненное достоинство равновесия по Бержу.

Судьба равновесия по Бержу незавидна. Публикация в 1957 г. книги [15] вызвала резкую рецензию Мартина Шубика [24], где акцентировалось, что книге [15] «... никакого внимания не уделено приложению к экономике. ... книга мало интересна для экономистов». Скорее всего, именно такая рецензия, а также научный авторитет М. Шубика «отпугнули» от [15] западных специалистов по теории игр и экономике. В России же, после того как [15] была переведена на русский язык в 1961 году, изучение русского перевода (а также незнание рецензии М. Шубика!) как раз и привело к понятию «равновесия по Бержу», базирующемуся на подходящем изменении «равновесия по Нэшу». Отличие лишь в том, что устойчивость выигрышей здесь постулируется уже к отклонениям всех игроков, кроме того, кому «принадлежит» данная функция выигрыша (в определении равновесия по Нэшу «действия» (стратегии) отдельного игрока и всех остальных «меняются местами»). Следует заметить, что самого определения равновесности (по Бержу) в книге [15] нет, но оно «само напрашивается» и возникло в процессе ознакомления с результатами гл.1, §7, гл.5, §27 этой книги.

Итак, определение «равновесия по Бержу» появилось в [1,29] в 1994-1995 годах в статьях и диссертации Константина Семеновича Вайсмана (тогда аспиранта В.И. Жуковского). Это понятие сразу же было применено в [2,25-28] для бескоалиционных линейно–квадратичных позиционных игр при неопределенности. Скоропостижная (в 35 лет) смерть Константина Семеновича Вайсмана приостановила исследование равновесности по Бержу в России. Однако понятие «равновесия по Бержу» в то время было «вывезено из России» алжирскими учениками В.И. Жуковского Мухаммедом Раджефом [23] и Муссой Ларбани [21] и затем активно использовалось нашими западными коллегами (см. обзор [17], где насчитывается уже свыше 50 наименований, а также недавно опубликованный на Украине обзор [11, с. 53-56]). Как показали эти и последующие публикации (всего их более 100), большинство работ посвящено свойствам равновесия по Бержу, особенностям, модификациям этого понятия, связям с равновесием по Нэшу. Представляется, что в зарождающейся математической теории равновесия по Бержу близится этап становления строгой математической теории. На смену интенсивного накопления фактов приходит, вероятно, этап эволюционного внутреннего развития.

В настоящей статье выявлена внутренняя неустойчивость множества равновесий по Бержу. Чтобы «снять» этот негатив, предложен способ построения равновесия по Бержу одновременно максимального по Парето по отношению ко всем остальным таким равновесиям. Сам способ сводится к нахождению седловой точки вспомогательной антагонистической игры, эффективно конструируемой по исходной бескоалиционной. В качестве приложения устанавливается существование (такого улучшенного за счет паретовости) равновесной по Бержу ситуации в смешанных стратегиях при «привычных» в математической теории игр ограничениях, то есть при компактности множеств стратегий игроков и непрерывности их функций выигрыша.

Работа состоит из 6 частей. В первой части введены основные понятия и приведена история возникновения и развития концепции равновесия по Бержу. Во второй части рассмотрены свойства равновесия по Бержу и предложена его модификация – равновесие по Бержу–Парето. Проведено сравнение свойств равновесий по Бержу и по Нэшу. В третьей части приводятся достаточные условия существования равновесия по Бержу–Парето, основанные на существовании седловой точки в специально сконструированной свертке Гермейера. Далее, в части 4, рассматривается смешанное расширение бескоалиционной игры, для которого также определяется понятие равновесия по Бержу–Парето, на основании которого, в части 5, доказывается существование равновесия по Бержу–Парето в смешанных стратегиях. В шестой части работы, в качестве примера, предлагаемое равновесие построено в олигополии Курно с тремя игроками. Проведено его сравнение с равновесием по Нэшу и выделены ограничения на параметры модели, при которых в ситуации равновесия по Бержу игроки получают выигрыши, большие чем в ситуации равновесия по Нэшу.

2. Свойства равновесия по Бержу

2.1. Компактность множеств равновесия по Бержу

Итак будем рассматривать математическую модель конфликта в виде бескоалиционной игры $N \geqslant 2$ лиц, то есть в виде упорядоченной тройки

$$\Gamma = \langle \{\mathbb{N}\}, \{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle. \tag{2.1}$$

Здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$; каждый из N игроков, не объединяясь с другими в коалицию, выбирает свою стратегию (действие) $x_i \in \mathbf{X}_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (символ $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$ здесь и далее обозначает k-мерное евклидово действительное арифметическое пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы из k действительных чисел, записываемых в виде столбцов со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой); в результате такого выбора образуется *ситуация* $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \in \mathbf{X} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{X}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$, на множестве $\mathbf{X}$ определена функция выигрыша $f_i(x)$, численно оценивающая качество функционирования i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$; далее $(x\|z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$ и $f = (f_1, \ldots, f_N)$.

Ситуация $x^B = (x_1^B, \ldots, x_N^B) \in \mathbf{X}$ называется *ситуацией равновесия по Бержу* в игре (2.1), если

$$\max_{x\in\mathbf{X}} f_i(x\|x_i^B) = f_i(x^B) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2.2}$$

Свойство 2.1. *Если в игре* Γ *множества* $\mathbf{X}_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ (*то есть замкнуты и ограничены*), *а функции выигрыша непрерывны:* $f_i(\cdot) \in \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, *то множество* $\mathbf{X}^B$ *ситуаций равновесия по Бержу игры* Γ *образует компакт в* $\mathbf{X}$ (*может и пустой*), *также* $f(\mathbf{X}^B) \in \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Так как $\mathbf{X}^B \subseteq \mathbf{X}$ и $\mathbf{X} \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, то $\mathbf{X}^B$ ограничено. Если докажем, что $\mathbf{X}^B$ замкнуто, то из замкнутости и ограниченности $\mathbf{X}^B$ будет следовать $\mathbf{X}^B \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$. Доказательство замкнутости $\mathbf{X}^B$ проведем от противного. Предположим что для некоторой бесконечной последовательности $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $x^{(k)} \in \mathbf{X}^B$ существует подпоследовательность $\{x^{(k_r)}\}_{k=0}^{\infty}$ и ситуация $x^* \in \mathbf{X}$ такие, что, *во-первых,* $\lim\limits_{r\to\infty} x^{(k_r)} = x^*$ и, *во-вторых,* $x^* \notin \mathbf{X}^B$.

Последнее (не включение) означает, что имеется ситуация $\bar{x} \in \mathbf{X}$ и номер $j \in \mathbb{N}$, для которых $f_j(\bar{x}\|x_j^*) > f_j(x^*)$ (где $x^* = (x_1^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_N^*)$ и, напомним, $(\bar{x}\|x_j^*) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, x_j^*, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_N)$).

Вследствие непрерывности $f_j(\bar{x}\|x_j)$ и $f_j(x)$ по $x \in \mathbf{X}$ и предельного перехода $\lim\limits_{r\to\infty} x^{(k_r)} = x^*$ существует такое целое число $M > 0$, что при $r \geqslant M$ будет $f_j(\bar{x}\|x_j^{(k_r)}) > f_i(x^{(k_r)})$. Это строгое неравенство противоречит $f_j(x\|x_j^B) \leqslant f_j(x^B)$ $\forall x \in \mathbf{X}$. $\square$

Следствие 2.1. *Если при выполнении требований свойства* 2.1 *в игре* Γ *множество* $\mathbf{X}^B \neq \emptyset$, *то существует равновесная по Бержу ситуация, одновременно максимальная по Парето по отношению ко всем* $x^B \in \mathbf{X}^B$.

Действительно, вследствие компактности $\mathbf{X}^B$ и $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, а так же свойства 2.1 в N-критериальной задаче

$$\left\langle \mathbf{X}^B, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle$$

существует [13,с.149] максимальная по Парето альтернатива $x^B \in \mathbf{X}^B$, то есть при $\forall\, x \in \mathbf{X}^B$ несовместна система из N неравенств

$$f_i(x) \leqslant f_i(x^B) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое.

2.2. Внутренняя неустойчивость множества $\mathbf{X}^B$

Свойство 2.2. *Множество* $\mathbf{X}^B$ *ситуаций равновесия по Бержу может быть внутренне неустойчивым, то есть в игре* Γ *могут существовать две ситуации равновесия по Бержу* $x^{(1)}$ *и* $x^{(2)}$ *такие, что для всех* $i \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$f_i(x^{(1)}) > f_i(x^{(2)}).$$

Пример 2.1. Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц ($N = 2$)

$$\Gamma_2 = \langle\{1,2\},\{\mathbf{X}_i = [-1;+1]\}_{i=1,2},\{f_1(x) = -x_2^2 + 2x_1x_2, f_2(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2\}\rangle.$$

Здесь ситуации $x = (x_1, x_2) \in [-1;+1]^2$, множества стратегий $\mathbf{X}_i = [-1;+1]$ совпадают ($i = 1,2$), а ситуация равновесия по Бержу $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ для Γ_2 определяется (см. (2.2)) неравенствами

$$\begin{aligned}
&-x_2^2 + 2x_1^B x_2 \leqslant -(x_2^B)^2 + 2x_1^B x_2^B,\\
&-x_1^2 + 2x_1 x_2^B \leqslant -(x_1^B)^2 + 2x_1^B x_2^B \qquad \forall\, x_i \in [-1;+1] \ (i = 1,2),
\end{aligned}$$

или

$$-(x_2 - x_1^B)^2 \leqslant -(x_2^B - x_1^B)^2,\ -(x_1 - x_2^B)^2 \leqslant -(x_1^B - x_2^B)^2 \quad \forall x_1, x_2 \in [-1;+1].$$

Отсюда (рис.1.a) $x_1^B = x_2^B = \alpha \ \forall\, \alpha = \text{const} \in [-1;+1]$, и тогда $f_i^B = f_i(x^B) = \alpha^2 \ \forall\, \alpha = \text{const} \in [-1;+1]$ (рис.1.b).

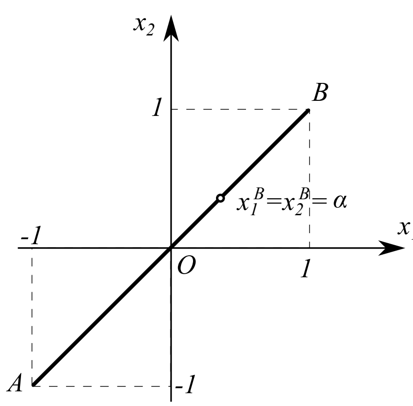

Рисунок 1.a
Множество ситуаций РБ

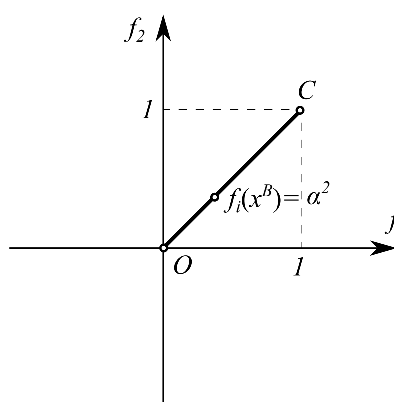

Рисунок 1.b
Множество выигрышей в ситуациях РБ

Итак получили, что, *во-первых*, ситуаций равновесия по Бержу может быть континуум (в примере 2.1 множество $\mathbf{X}^B = AB$ (см. рис. 1.a), *во-вторых*, это множество $\mathbf{X}^B$ внутренне неустойчиво, ибо $f_i(0,0) = 0 < f_i(1,1) = 1$ ($i = 1,2$) (см. рис. 1.b).

Отсюда следует, что игрокам в игре Γ нужно использовать не любую ситуацию равновесия по Бержу, а лишь ту, которая одновременно максимальна по Парето по отношению к остальным равновесным по Бержу ситуациям. Поэтому дальше будем применять

Определение 2.1. *Ситуацию* $x^* \in \mathbf{X}$ *назовем равновесной по Бержу–Парето* (*РБП*) *в* Γ, *если,*
во-первых, x^* *равновесна по Бержу в игре* Γ (x^* *удовлетворяет требованиям* (2.2)),
во-вторых, x^* *максимальна по Парето в* N*-критериальной задаче*

$$\Gamma_v = \langle \mathbf{X}^B, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

то есть, при любых ситуациях $x \in \mathbf{X}^B$ *несовместна система неравенств*

$$f_i(x) \geqslant f_i(x^*) \ \ (i \in \mathbb{N}),$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

В примере 2.1. ситуаций РБП две $x^{(1)} = (-1;-1)$ и $x^{(2)} = (+1;+1)$ с совпадающими выигрышами $f_i(x^{(1)}) = f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1, 2)$.

Замечание 2.1. Если $\mathbf{X}^B \neq \emptyset$ и $\mathbf{X}_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$, $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, то обоснованием определения 2.1 служит следствие 2.1, утверждающее, что при выполнении приведенных трех требований множество ситуаций РБП непусто.

Отметим, что и множество ситуаций равновесия по Нэшу в игре Γ так же внутренне неустойчиво (что подтверждает пример 2.1 с заменой $x_1 \leftrightarrow x_2$).

Далее будут предложены достаточные условия существования РБП, сводящиеся к нахождению седловой точки специальной антагонистической игры, эффективно конструируемой по исходной.

2.3. Отсутствие свойства индивидуальной рациональности у ситуации равновесия по Бержу

Другим негативным свойством равновесия по Бержу является
Свойство 2.3. *Ситуация равновесия по Бержу может не удовлетворять условиям индивидуальной рациональности* (в противоположность ситуации равновесия по Нэшу x^e в Γ_2 (в игре Γ при $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ при условиях $\mathbf{X}_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$ всегда для Γ_2 будет

$$f_1(x^e) \geqslant \max_{x_1\in\mathbf{X}_1}\min_{x_2\in\mathbf{X}_2} f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x^e) \geqslant \max_{x_2\in\mathbf{X}_2}\min_{x_1\in\mathbf{X}_1} f_2(x_1, x_2),$$

то есть выполняются условия индивидуальной рациональности)).

Пример 2.2. Рассмотрим бескоалиционную игру двух лиц

$$\Gamma_2' = \langle\{1,2\},\{\mathbf{X}_1 = (-\infty,+\infty), \mathbf{X}_2 = [-1,+1]\},\{f_1(x) = \\ = -4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, f_2(x) = -(x_1-1)^2 + 5\}\rangle,$$

здесь использовано $x = (x_1, x_2)$. Ситуация равновесия по Бержу $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ в игре Γ_2' определяется двумя равенствами

$$\max_{x_2\in\mathbf{X}_2} f_1(x_1^B, x_2) = f_1(x^B), \quad \max_{x_1\in\mathbf{X}_1} f_2(x_1, x_2^B) = f_2(x^B).$$

Второму из них удовлетворяет лишь одна стратегия $x_1^B = 1$. Вследствие сильной выпуклости $f_1(x)$ по x_2 (ибо $\frac{\partial^2 f_1(x_1^B,x_2)}{\partial x_2^2}|_{x_2} = 2 > 0$) максимум

$$f_1(x_1^B, x_2) = -4 + 2x_2 + x_2^2$$

достигается на границе $\mathbf{X}_2$, именно в точке $x_2^B = 1$. Итак в игре Γ_2' найдена $x^B = (1,1)$ – равновесная по Бержу ситуация, и тогда $f_1(x^B) = f_1(1,1) = -1$.

Найдем теперь $\max\limits_{x_1\in\mathbf{X}_1}\min\limits_{x_2\in\mathbf{X}_2} f_1(x_1,x_2)$ в два этапа. На *первом* построим скалярную функцию $x_2(x_1)$, реализующую *внутренний минимум*:

$$\min_{x_2\in\mathbf{X}_2} f_1(x_1,x_2) = f_1(x_1, x_2(x_1)) \quad \forall x_1 \in \mathbf{X}_1.$$

Вследствие сильной выпуклости $f_1(x_1,x_2)$ по x_2 здесь будет

$$\left.\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2(x_1)} = 2x_1 + 2x_2(x_1) = 0,$$

откуда $x_2(x_1) = -x_1$ и $f_1[x_1] = f_1(x_1, x_2(x_1)) = -5x_1^2$.

Во-втором этапе построим *внешний максимум*, то есть найдем

$$\max_{x_1\in\mathbf{X}_1} f_1[x_1] = \max_{x_1\in\mathbb{R}} f_1(x_1, x_2(x_1)) = \max_{x_1\in\mathbb{R}}[-5x_1^2] = 0.$$

Итак, получили

$$f_1(x^B) = -1 < 0 = \max_{x_1\in\mathbb{R}} f_1(x_1,x_2(x_1)) = \max_{x_1\in\mathbb{R}}\min_{x_2\in[-1,+1]} f_1(x_1,x_2),$$

что и устанавливает, что свойство индивидуальной рациональности для ситуации равновесия по Бержу может не выполняться.

Замечание 2.2. Условие индивидуальной рациональности – одно из требований «хорошего» решения как в бескоалиционной, так и в кооперативной игре, ибо «свой» максимин каждый игрок может «себе обеспечить» действуя самостоятельно (используя «свою» максиминную стратегию независимо от поведения остальных игроков). Однако в ряде приложений (особенно, когда математические модели представлены линейно–квадратичным вариантом игры) зачастую бывает, что максимин просто не существует. Именно подобные игры рассматривались в книгах [6, с.95-97,110-116,120; 8, с.124-131].

Если же максимины в игре (2.1) существуют, то К.С. Вайсман предложил включать свойство индивидуальной рациональности в определение равновесности по Бержу. Такие равновесия естественно называть *равновесием по Бержу–Вайсману*.

2.4. Игра двух лиц

Неантагонистический вариант. Рассматриваем частный случай игры (2.1), в котором участвуют лишь два игрока, то есть в Γ считаем $\mathbb{N} = \{1, 2\}$. Тогда ситуация равновесия по Бержу $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ определяется равенствами:

$$f_1(x^B) = \max_{x_2 \in \mathbf{X}_2} f_1(x_1^B, x_2), \quad f_2(x^B) = \max_{x_1 \in \mathbf{X}_1} f_2(x_1, x_2^B).$$

Напомним, что ситуация равновесия по Нэшу x^e для игры двух лиц задается условиями

$$f_1(x^e) = \max_{x_1 \in \mathbf{X}_1} f_1(x_1, x_2^e), \quad f_2(x^e) = \max_{x_2 \in \mathbf{X}_2} f_2(x_1^e, x_2).$$

Сравнивая эти два равенства, видно, что имеет место

Свойство 2.4. *Ситуация равновесия по Бержу в* (2.1) *при* $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ *совпадает с ситуацией равновесия по Нэшу, если оба игрока обменяются своими функциями выигрыша и потом будут применять при построении решения игры концепцию равновесности по Нэшу.*

Замечание 2.3. В связи со свойством 2.4, специальное исследование теоретических основ равновесности по Бержу игры (2.1) при $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ вряд ли целесообразно, ибо все результаты, касающиеся равновесия по Нэшу *в игре двух лиц*, автоматически переносятся на равновесие по Бержу (конечно, с учетом «обмена» функциями выигрыша в соответствии со свойством 2.4).

Приведем далее так же пример 2.3 матричной игры двух лиц, в которой выигрыш игроков *в ситуации равновесия по Бержу больше, чем в ситуации равновесия по Нэшу* (по «игровому смыслу» этот пример является аналогом игры «дилемма заключенных»).

Заметим также, что в игре (2.1) (при $\mathbb{N} = \{1, 2\}$), где $f_i(x) = x_1^T A_i x_1 + x_2^T B_i x_2$, стратегии первого игрока $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, второго $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, квадратные матрицы A_i, B_i постоянны, симметричны и соответствующих размерностей, а матрицы $A_1 > 0$, $B_1 < 0$, $A_2 < 0$, $B_2 > 0$ ($A > 0$ ($<$) означает определенную положительность (отрицательность) квадратичной формы $x^T A x$) ситуации равновесия по Нэшу не существует, а $(0_{n_1}, 0_{n_2})$ образует ситуацию равновесия по Бержу (здесь, напомним, 0_k означает нулевой k-вектор).

Пример 2.3. В этой биматричной игре первый игрок имеет две стратегии (выбор строк): первая (строка) и вторая (строка); стратегии второго игрока (выбор столбцов): первый столбец и второй столбец. Например, выбор ситуации $(1, 2)$ означает, что выигрыш первого игрока равен 4, а второго игрока – равен 7.

игрок 1

игрок 2		1-ая строка	2-ая строка
	1-ый столбец	Берж **6 6**	**4 7**
	2-ой столбец	**7 4**	Нэш **5 5**

Согласно приведенным выше определениям, в данной биматричной игре ситуация $(2, 2)$ равновесна по Нэшу, а $(1, 1)$ – равновесна по Бержу. Так как $6 > 5$, то *выигрыш обоих игроков в ситуации равновесия по Бержу строго больше выигрышей в ситуации равновесия* *по Нэшу.* Точно такой же результат имеет место в известной биматричной игре «дилемма заключенных». Заметим, что в [17] приведены примеры биматричных игр 2×2, в которых выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу больше, чем в равновесной по Бержу, и когда они равны.

Антагонистический вариант. Рассмотрим в заключение антагонистический вариант игры (2.1) возникающий в Γ при $\mathbb{N} = \{1, 2\}$ и $f_2(x) = -f_1(x) = f(x)$, то есть рассмотрим упорядоченную тройку

$$\Gamma_a = \langle \{1, 2\}, \{\mathbf{X}_i\}_{i=1,2}, f(x) \rangle \,.$$

Общепринятым решением Γ_a является седловая точка $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \in \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, которая в этом случае формализуется цепочкой неравенств

$$f(x_1^0, x_2) \leqslant f(x^0) \leqslant f(x_1, x_2^0) \quad \forall\, x_i \in \mathbf{X}_i \ (i = 1, 2). \tag{2.3}$$

Свойство 2.5. *Для антагонистического варианта Γ_a игры Γ ситуация равновесия по Бержу (x_1^B, x_2^B) совпадает с седловой точкой (x_1^0, x_2^0), определенной в (2.3).*

Доказательство сразу следует из неравенств

$$f_1(x_1^B, x_2) \leqslant f_1(x^B), \quad f_2(x_1, x_2^B) \leqslant f_2(x^B) \quad \forall\, x_i \in \mathbf{X}_i \ (i = 1, 2)$$

и тождества $f(x) = f_2(x) = -f_1(x)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$.

2.5. Сравнение ситуаций равновесия по Нэшу (РН) и по Бержу (РБ)

В таблице проведено сравнение основных свойств равновесий по Нэшу и Бержу.

Выводы:

Ситуация равновесия по Нэшу обладает тремя неоспоримыми *достоинствами*: она устойчива, совпадает с седловой точкой (содержит общепринятое в теории игр понятие как частный случай), удовлетворяет условию индивидуальной рациональности. Первые два достоинства имеют место и для ситуации равновесия по Бержу.

<table>
<tr><th>РН</th><th>РБ</th></tr>
<tr><td colspan="2">УСТОЙЧИВОСТЬ</td></tr>
<tr><td>по отношению к изменению стратегии только одного игрока, ибо из
$f_i(x_1^e,\ldots,x_{i-1}^e,x_i,x_{i+1}^e,\ldots,x_N^e)\leqslant f_i(x^e)$
$\forall x_i\in\mathbf{X}_i$ $(i\in\mathbb{N})$ следует, что выигрыш отклонившегося i-го игрока не больше его выигрыша в ситуации РН.</td><td>по отношению к изменению стратегий коалиции всех игроков, кроме i-го, ибо из
$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^B,x_{i+1},\ldots,x_N)\leqslant f_i(x^B)$
$\forall x_j\in\mathbf{X}_j$ $(j\in\mathbb{N}\backslash\{i\}, i\in\mathbb{N})$ следует, что выигрыш каждого i-го игрока при таком отклонении коалиции из оставшихся $N-1$ от ситуации РБ не больше его выигрыша в ситуации РБ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ (ИР)</td></tr>
<tr><td>Здесь и далее $x_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}=(x_1,\ldots,x_{i-1},\quad x_{i+1},\ldots,x_N)\in\mathbf{X}_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}=\prod\limits_{j\in\mathbb{N}\backslash\{i\}}\mathbf{X}_j$. Если $\exists\, x^e$ и $f_i^g=\max\limits_{x_i\in\mathbf{X}_i}\min\limits_{x_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}\in\mathbf{X}_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}}f(x\|x_i)=$ $=\min\limits_{x_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}\in\mathbf{X}_{\mathbb{N}\backslash\{i\}}}f_i(x\|x_i^g)$ $(i\in\mathbb{N})$, то будет $f_i(x^e)\geqslant f_i^g$ $(i\in\mathbb{N})$, то есть для РН свойство ИР выполнено.</td><td>Вообще говоря, не имеет места (см. свойство 2.3, пример 2.2 и замечание 2.2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ВНУТРЕННЯЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ</td></tr>
<tr><td>Множество РН внутренне неустойчиво (доказано в [7])</td><td>Множество РБ внутренне неустойчиво (свойство 2.2 и пример 2.1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы избежать этого недостатка как для РН, так и для РБ, добавляем требование паретовости по отношению к остальным ситуациям равновесия</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПОНЯТИЕ СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ (СТ) в игре
$\Gamma_a=\langle\{1,2\},\{\mathbf{X}_i\}_{i=1,2},\{f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)=-f_1(x_1,x_2)\}\rangle$
есть частный случай понятий как РН, так и РБ</td></tr>
<tr><td>Ситуация РН совпадает с СТ (x_1^e,x_2^e) вида $\max\limits_{x_1\in\mathbf{X}_1}f_1(x_1,x_2^e)==f_1(x_1^e,x_2^e)=\min\limits_{x_2\in\mathbf{X}_2}f_1(x_1^e,x_2)$</td><td>Ситуация РБ совпадает с СТ (x_1^B,x_2^B) вида $\max\limits_{x_2\in\mathbf{X}_2}f_1(x_1^B,x_2)=$ $=f_1(x_1^B,x_2^B)=\min\limits_{x_1\in\mathbf{X}_1}f_1(x_1,x_2^B)$</td></tr>
</table>

Одновременно, ситуации равновесия по Нэшу присущ и ряд негативных свойств: внутренняя неустойчивость множества РН и «эгоизм» (выражающийся в стремлении каждым игроком увеличить лишь «свой» выигрыш, ибо по определению $f_i(x^e) = \max\limits_{x_i \in \mathbf{X}_i} f_i(x^e \| x_i)$ $\forall i \in \mathbb{N}$).

Свойство внутренней неустойчивости присуще и множеству равновесий по Бержу. «Снимают» этот негатив добавлением требования паретовости равновесия как для РН, так и для РБ. «Эгоистическое начало» РН «снимается» альтруистической направленностью РБ («помогай другим, если хочешь добиться помощи от них»). В этом несомненное достоинство концепции РБ как способа *доброжелательного улаживания конфликта.*

3. Достаточные условия

3.1. Непрерывность функции максимума конечного числа непрерывных функций

Рассмотрим $N+1$ скалярных функций $\varphi_i(x,z) = f_i(x\|z_i) - f_i(z)$ $(i \in \mathbb{N})$ и $\varphi_{N+1}(x,z) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} [f_i(x) - f_i(z)]$, определенных на декартовом произведении $\mathbf{X} \times \mathbf{Z}$; здесь и далее ситуации $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{X} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$, а также $x_i, z_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{Z} = \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$, напомним, что $(x\|z_i) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

Лемма 3.1. *Если $N+1$ скалярных функций $\varphi_j(x,z)$ $(j=1,\ldots,N,N+1)$ непрерывны на $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$, а множества $\mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ (компакты), то и функция*

$$\varphi(x,z) = \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(z,z) \tag{3.1}$$

также непрерывна на $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$.

Доказательство даже более общего результата имеется во многих учебных пособиях по исследованию операций, например, в [12, с.54; 3, с.210], оно появилось даже в учебниках по выпуклому анализу [5, с.146]. Заметим также, что функция вида (3.1) называется *гермейеровской сверткой* функций $\varphi_j(x,z)$ $(j=1,\ldots,N,N+1)$.

3.2. Достаточные условия равновесности по Бержу: сведение к построению седловой точки

Итак, по функциям выигрыша $f_i(x)$ игры (2.1) построим гермейеровскую свертку

$$\varphi(x,z)=\max\left\{[f_i(x\|z_i)-f_i(z)\ (i\in\mathbb{N})],\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)-\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(z)\right)\right\}, \quad (3.2)$$

заданную на $\mathbf{X}\times(\mathbf{Z}=\mathbf{X})$.

Седловая точка $(x^0,z^B)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$ скалярной функции $\varphi(x,z)$ в антагонистической игре

$$\Gamma^a=\langle\mathbf{X},\mathbf{Z}=\mathbf{X},\varphi(x,z)\rangle$$

определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x,z^B)\leqslant\varphi(x^0,z^B)\leqslant\varphi(x^0,z)\quad\forall\, x,z\in\mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. *Если в антагонистической игре* Γ^a *существует седловая точка* (x^0,z^B)*, то минимаксная стратегия* z^B *является равновесной по Бержу–Парето ситуацией в бескоалиционной игре* (2.1).

Доказательство. Из первого неравенства в (3.3) при $z=x^0$, с учетом (3.2), получаем $\varphi(x^0,x^0)=0$. Тогда (согласно (3.3) по транзитивности) имеем при всех $x\in\mathbf{X}$

$$\varphi(x,z^B)=\max\left\{(f_i(x\|z_i^B)-f_i(z^B))\ (i\in\mathbb{N}),\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)-\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(z^B)\right)\right\}\leqslant 0.$$

Отсюда при каждом $i\in\mathbb{N}$ будет для всех $x\in\mathbf{X}$

$$f_i(x\|z_i^B)-f_i(z^B)\leqslant 0,\quad \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(z^B),$$

и тогда при всех $x\in\mathbf{X}$ имеем

$$f_i(x\|z_i^B)\leqslant f_i(z^B),\ i\in\mathbb{N},\quad \max_{x\in\mathbf{X}^B}\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(x)=\sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(z^B). \quad (3.4)$$

Выполнение первых N неравенств из (3.4) (при всех $x \in \mathbf{X}$) означает, что ситуация $x^B = z^B$ удовлетворяет требованиям (2.2) равновесности по Бержу в игре Γ, последнее равенство в (3.4) при $x \in \mathbf{X}^B$ (множеству равновесных по Бержу ситуаций) является [13, с.71] достаточным, чтобы $x^B = z^B$ было максимальным по Парето в N-критериальной задаче $\langle \mathbf{X}^B, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$. Тогда, согласно определению 2.1, найденная в результате ситуация $z^B \in \mathbf{X}$ будет равновесной по Бержу–Парето в игре (2.1). $\square$

Замечание 3.1. Из теоремы 3.1 получаем следующий способ построения равновесной по Бержу–Парето ситуации в бескоалиционной игре (2.1):

во-первых, построить по формулам из (3.2) функцию $\varphi(x, z)$,
во-вторых, найти седловую точку (x^0, z^B) функции $\varphi(x, z)$ (удовлетворяет цепочке неравенств из (3.3)).

Тогда найденная ситуация $z^B \in \mathbf{X}$ как раз и будет равновесной по Бержу–Парето в игре (2.1).

4. Смешанное расширение бескоалиционной игры

4.1. Смешанные стратегии, ситуации, смешанное расширение

Рассматриваем теперь бескоалиционную игру N лиц (2.1) и на каждом компакте $\mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ – множество подмножеств $\mathbf{X}_i$ таких, что $\mathbf{X}_i \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$, причем $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ замкнута относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$, кроме того, $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ является минимальной σ-алгеброй, которая содержит все замкнутые подмножества компакта $\mathbf{X}_i$.

В случае, когда ситуаций x^B, удовлетворяющих условию равновесности по Бержу–Парето (определение 2.1), не существует в классе чистых стратегий $x_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, будем, следуя подходу Эмиля Бореля [16], Джона фон Неймана [22], Джона Нэша [19,20] и их последователей, расширять множество $\mathbf{X}_i$ чистых стратегий x_i до смешанных. Затем установим существование (соответствующим образом формализованных в смешанных стратегиях) ситуаций игры 2.1, отвечающих требованию равновесности по Бержу–Парето (аналог определения 2.1).

Итак, построим борелевские σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ на каждом из компактов $\mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ и борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ для множества ситуаций $\mathbf{X} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_i$, предполагая, что $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ содержит все декартовы произведения элементов борелевских σ-алгебр $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Согласно математической теории игр, *смешанную стратегию* i-го игрока $\nu_i(\cdot)$ будем отождествлять с *вероятностной мерой на компакте* $\mathbf{X}_i$. По определению [10, с.271] и обозначениям [9,с.284] вероятностная мера есть *неотрицательная* скалярная функция $\nu_i(\cdot)$, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ подмножеств компакта $\mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ и удовлетворяющая двум условиям:

1) $\nu_i(\bigcup\limits_k Q_k^{(i)}) = \bigcup\limits_k \nu_i(Q_k^{(i)})$ для любой последовательности $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ попарно не пересекающихся элементов из $\mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$ (свойство *счетной аддитивности функции* $\nu_i(\cdot)$);

2) $\nu_i(\mathbf{X}_i) = 1$ (*свойство нормированности*) и поэтому $\nu_i(Q^{(i)}) \leqslant 1$ для всех $Q^{(i)} \in \mathcal{B}(\mathbf{X}_i)$.

Обозначим через $\{\nu_i\}$ множество смешанных стратегий i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$.

Отметим также, что меры–произведения $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_N(dx_N)$, понимаемые в соответствии с известными определениями из [10, с.370] (и обозначениями из [9, с.123]), являются вероятностными мерами на множестве ситуаций $\mathbf{X}$. Множество таких вероятностных мер (ситуаций) обозначим через $\{\nu\}$. Заметим еще раз, что при построении меры–произведения $\nu(dx)$ в качестве σ-алгебры подмножеств множества $\mathbf{X}_1 \times \ldots \times \mathbf{X}_N = \mathbf{X}$ выбирается наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{X})$, содержащая все декартовы произведения $Q^{(1)} \times \ldots \times Q^{(N)}$, где $Q^{(i)} \in \mathcal{B}(\mathbf{X_i})$ $(i \in \mathbb{N})$. Из известных свойств вероятностных мер [4, с.288; 10, с.254] вытекает, что множества всех возможных мер $\nu_i(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ и $\nu(dx)$ являются *слабо замкнутыми и слабо компактными в себе* ([10, с.212,254; 14, с.48,49]). Это означает, например для $\{\nu\}$, что из всякой бесконечной последовательности $\{\nu^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ можно выделить подпоследовательность $\{\nu^{(k_j)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, которая будет *сходится слабо* к мере $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. Иначе говоря, для любой непрерывной на $\mathbf{X}$ скалярной функции $\varphi(x)$ будет

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_{\mathbf{X}} \varphi(x)\nu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_{\mathbf{X}} \varphi(x)\nu^{(o)}(dx)$$

и $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. С учетом непрерывности $\varphi(x)$ интегралы $\int\limits_{\mathbf{X}} \varphi(x)\nu(dx)$ (математические ожидания) определены; по теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbf{X}} \varphi(x)\nu(dx) = \int\limits_{\mathbf{X_1}} \ldots \int\limits_{\mathbf{X_N}} \varphi(x)\nu_N(dx_N)\ldots\nu_1(dx_1),$$

причем порядок интегрирования можно менять местами.

Игре (2.1) в чистых стратегиях поставим в соответствие *ее смешанное расширение*

$$\langle \mathbb{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\nu] = \int\limits_{\mathbf{X}} f_i[x]\nu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{4.1}$$

где, как и в (2.1), $\mathbb{N}$ есть множество порядковых номеров игроков, $\{\nu_i\}$ – множество смешанных стратегий $\nu_i(\cdot)$ игрока i; в игре (4.1) каждый из участников конфликта $i \in \mathbb{N}$ выбирает свою смешанную стратегию $\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$, в результате образуется ситуация в смешанных стратегиях $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$; на множестве $\{\nu\}$ определена функция выигрыша каждого i-го игрока (математическое ожидание)

$$f_i[\nu] = \int\limits_{\mathbf{X}} f_i[x]\nu(dx).$$

Для игры (4.1) аналогом понятия ситуации x^* равновесной по Бержу–Парето (то есть удовлетворяющей требованиям определения 2.1) будет

Определение 4.1. *Ситуацию в смешанных стратегиях* $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ *назовем равновесной по Бержу–Парето в смешанном расширении игры* (4.1) (*или равновесной по Бержу–Парето ситуацией в смешанных стратегиях для игры* (2.1)) *если, во-первых, ситуация* $\nu^*(\cdot)$ *равновесна по Бержу для игры* (4.1), *то есть*

$$\max_{\nu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\cdot)\in\{\nu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}\}} f_i(\nu\|\nu_i^*) = f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{4.2}$$

во-вторых, $\nu^*(\cdot)$ *максимальна по Парето в* N*-критериальной задаче*

$$\langle \{\nu^B\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

то есть при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu^B\}$ *несовместна система неравенств*

$$f_i(\nu) \geqslant f_i(\nu^*) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое;

здесь и далее
$\nu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(dx_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}) = \nu_1(dx_1)\dots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_{i+1}(dx_{i+1})\dots\nu_N(dx_N)$,
$(\nu\|\nu_i^*) = (\nu_1(dx_1)\dots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_i^*(dx_i)\nu_{i+1}(dx_{i+1})\dots\nu_N(dx_N))$,
$\nu^*(dx) = \nu_1^*(dx_1)\dots\nu_N^*(dx_N)$, $\{\nu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}\} = \{\nu_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\cdot)\}$; кроме того обозначаем далее $\{\nu^B(\cdot)\}$ – множество равновесных по Бержу ситуаций $\nu^B(\cdot)$, то есть удовлетворяющих (4.2), где ν^* заменена на ν^B. Множество ситуаций в смешанных стратегиях игры (2.1), определяемых двумя требованиями определения 4.1, обозначим через $\{\nu^*\}$.

Очевидно следующее достаточное условие максимальности по Парето; оно составляет содержание следующего утверждения.

Замечание 4.1. Смешанная ситуация $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ максимальна по Парето в $\tilde{\Gamma}_v = \langle\{\nu^B\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, если

$$\max_{\nu(\cdot)\in\{\nu^B\}} \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(\nu) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(\nu^*).$$

4.2. Вспомогательные сведения

Утверждение 4.1. *Пусть в игре* (2.1) *множества* $\mathbf{X}_i$ *суть компакты, функции выигрыша* $f_i(x)$ *непрерывны на* $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \dots \times \mathbf{X}_N$ *и непусто множество равновесных по Бержу ситуаций в смешанных стратегиях* $\{\nu^B\}$ (*удовлетворяющих* (4.2) *с заменой* ν^* *на* ν^B).

Тогда $\{\nu^B\}$ *будет слабо компактным в себе подмножеством множества ситуаций* $\{\nu\}$ *игры* (4.1) (*в смешанных стратегиях*).

Доказательство. Чтобы установить слабую компактность в себе множества $\{\nu^B\}$, возьмем произвольную непрерывную на компакте $\mathbf{X}$ скалярную функцию $\psi(x)$ и бесконечную последовательность ситуаций

$$\nu^{(k)}(\cdot) \in \{\nu^B\} \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{4.3}$$

игры (4.1) в смешанных стратегиях. Из включения (4.3) (и поэтому из $\{\nu^B\} \subset \{\nu\}$) следует, что $\{\nu^{(k)}(\cdot)\} \subset \{\nu\}$. Как упомянуто выше, множество $\{\nu\}$ слабо компактно в себе, поэтому существует подпоследовательность $\{\nu^{(k_j)}(\cdot)\}$ и мера $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbf{X}} \psi(x)\nu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_{\mathbf{X}} \psi(x)\nu^{(0)}(dx).$$

Установим, что $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu^B(\cdot)\}$ *от противного*, предположив, что $\nu^{(0)}(\cdot)$ не принадлежит $\{\nu^B\}$. Тогда, для «достаточно больших» j найдутся «свой» номер $i \in \mathbb{N}$ и ситуация $\bar{\nu}(\cdot) \in \{\nu\}$, для которых

$$f_i[\bar{\nu}\|\nu_i^{(k_j)}] > f_i[\nu^{(k_j)}],$$

что противоречит включению $\{\nu^{(k_j)}(\cdot)\} \in \{\nu^B\}$.

Таким образом, установлена слабая компактность в себе множества ситуаций в смешанных стратегиях $\{\nu^B\}$ игры (4.1), удовлетворяющих условию (4.2). □

Следствие 4.1. *Аналогично доказывается компактность* (*замкнутость и ограниченность*) *в критериальном пространстве* $\mathbb{R}^N$ *множества*

$$f[\{\nu^B\}] = \bigcup_{\nu(\cdot)\in\{\nu^B\}} f[\nu],$$

где N*-вектор* $f = (f_1, \ldots, f_N)$.

Утверждение 4.2. *Если в игре* (4.1) *множества* $\mathbf{X}_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$*, то для функции*

$$\varphi(x,z) = \max_{r=1,\ldots,N,N+1} \varphi_r(x,z) \tag{4.4}$$

имеет место неравенство

$$\max_{r=1,\ldots,N,N+1} \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{r=1,\ldots,N,N+1} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \tag{4.5}$$

при любых $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$*; здесь, напомним,*

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x,z) = f_i(x\|z_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),\\ &\varphi_{N+1}(x,z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} [f_i(x) - f_i(z)]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказательство. В самом деле, из (4.4) для каждого $x, z \in \mathbf{X}$ следует $N+1$ неравенство

$$\varphi_r(x,z) \leqslant \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z) \quad (r = 1,\ldots,N,N+1).$$

Интегрируя затем обе части этих неравенств с произвольной мерой–произведением $\mu(dx)\nu(dz)$ в качестве интегрируемой меры, получаем

$$\varphi_r(\mu,\nu) = \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu(dz)$$

при всех $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ и каждом $r = 1,\ldots,N,N+1$. Поэтому и

$$\max_{r=1,\ldots,N,N+1} \varphi_r(\mu,\nu) = \max_{r=1,\ldots,N,N+1} \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_r(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \quad \forall\, \mu(\cdot) \in \{\nu\},\ \nu(\cdot) \in \{\nu\},$$

что и доказывает (4.5). □

Замечание 4.2. Фактически (4.5) является обобщением известного свойства операции максимума: максимум суммы не больше суммы максимумов.

5. Теорема существования

Теорема 5.1. *Если в игре* (2.1) *множества* $\mathbf{X}_i \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, *то в этой игре существует равновесная по Бержу–Парето ситуация в смешанных стратегиях.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma^a = \langle\, \{1,2\}, \{\mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}\}, \varphi(x,z)\, \rangle.$$

В игре Γ^a множество $\mathbf{X}$ стратегий x первого (максимизирующего $\varphi(x,z)$) игрока совпадает с множеством ситуаций игры (2.1), множество $\mathbf{Z}$ стратегий z второго (минимизирующего $\varphi(x,z)$) совпадает с тем же $\mathbf{X}$. Одним из решений Γ^a является *седловая точка* $(x^0, z^B) \in \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$, именно, для нее при всех $x \in \mathbf{X}$ и каждом $z \in \mathbf{X}$ имеет место цепочка неравенств

$$\varphi(x, z^B) \leqslant \varphi(x^0, z^B) \leqslant \varphi(x^0, z).$$

Теперь игре Γ^a поставим в соответствие ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}^a = \langle \, \{1, 2\}, \{\mu\}, \{\nu\}, \varphi(\mu, \nu) \, \rangle,$$

где $\{\nu\}$ – множество смешанных стратегий $\nu(\cdot)$ второго, а $\{\mu\} = \{\nu\}$ – множество смешанных стратегий $\mu(\cdot)$ первого игрока, функция выигрыша первого (математическое ожидание)

$$\varphi(\mu, \nu) = \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi(x, y)\mu(dx)\nu(dz).$$

Решением игры $\tilde{\Gamma}^a$ (смешанного расширения Γ^a) также будет *седловая точка* (μ^0, ν^*), определяемая двумя последовательными неравенствами

$$\varphi(\mu, \nu^*) \leqslant \varphi(\mu^0, \nu^*) \leqslant \varphi(\mu^0, \nu) \tag{5.1}$$

при любых $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Эту пару (μ^0, ν^*) иногда называют *решением игры* Γ^a *в смешанных стратегиях.*

В 1952 г. Ирвинг Гликсберг установил [18] теорему существования равновесной по Нэшу ситуации бескоалиционной игры $N \geqslant 2$ лиц в смешанных стратегиях, откуда (для частного случая – антагонистической игры Γ^a) следует утверждение: пусть в игре Γ^a множество $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ суть непустой компакт, а функция выигрыша первого игрока $\varphi(x, z)$ непрерывна на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ (у нас непрерывность $\varphi(x, z)$ – в лемме 3.1) Тогда для игры Γ^a существует решение (μ^0, ν^*), определяемое в (5.1), то есть существует седловая точка в смешанных стратегиях.

С учетом (4.4) неравенства (5.1) примут вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x, z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x, z)\mu^0(dx)\nu^*(dz) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x, z)\mu^0(dx)\nu(dz)\end{gathered} \tag{5.2}$$

при всех $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. Положив в

$$\varphi(\mu^0, \nu) = \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)\mu^0(dx)\nu(dz)$$

меру $\nu_i(dz_i) = \mu_i^0(dx_i)$ $(i \in \mathbb{N})$ и тогда $\nu(dz) = \mu^0(dx)$, получаем, с учетом (4.6), что $\varphi(\mu^0, \mu^0) = 0$. Аналогично приходим к $\varphi(\nu^*, \nu^*) = 0$ и тогда из (5.1) имеем

$$\varphi(\mu^0, \nu^*) = 0. \tag{5.3}$$

Из $\varphi(\mu^0, \mu^0) = 0$ и цепочки неравенств (5.1) (по транзитивности) приходим к

$$\varphi(\mu, \nu^*) = \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall\, \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Согласно утверждению 4.2 отсюда получаем

$$0 \geqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \geqslant \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz).$$

Поэтому для всех $j = 1, \ldots, N, N+1$ будет

$$\int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_j(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) \leqslant 0 \quad \forall\, \mu(\cdot) \in \{\nu\}. \tag{5.4}$$

Выделим два случая.

I случай $(j = 1, \ldots, N)$ Здесь согласно (5.4), (4.6) и нормированности $\nu(\cdot)$ приходим к

$$0 \geqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} [f_i(x\|z_i) - f_i(z)]\mu(dx)\nu^*(dz) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}_i} f_i(x\|z_i)\mu(dx)\nu_i^*(dz) - \int\limits_{\mathbf{X}} f_i(z)\mu(dz) \cdot \int\limits_{\mathbf{X}} \nu^*(dz) =$$

$$= f_i(\mu\|\nu_i^*) - f_i(\nu^*) \quad \forall\, \mu(\cdot) \in \{\nu\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Согласно определению 4.1 тогда $\nu^*(\cdot)$ – ситуация равновесия по Бержу в смешанных стратегиях для игры (2.1).

II случай ($j = N+1$) Опять–таки из (5.4), (4.6) и нормированности мер $\nu(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$, приходим к

$$0 \geqslant \int\limits_{\mathbf{X}\times\mathbf{X}} \left[\sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z)\right]\mu(dx)\nu^*(dz) = \int\limits_{\mathbf{X}} \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x)\mu(dx)\cdot\int\limits_{\mathbf{X}}\nu^*(dz) -$$

$$-\int\limits_{\mathbf{X}}\mu(dx)\int\limits_{\mathbf{X}}\sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z)\nu^*(dz) = \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(\mu) - \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(\nu^*) \quad \forall\, \mu(\cdot)\in\{\nu^B\}.$$

По замечанию 4.1 ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)\in\{\nu\}$ игры (2.1) будет максимальна по Парето в задаче

$$\tilde{\Gamma}_v = \langle\{\nu^B\}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Таким образом, для ситуации в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ игры (2.1) установлена ее равновесность по Бержу и одновременно максимальность по Парето. Следовательно, в силу определения 4.1, ситуация в смешанных стратегиях $\nu^*(\cdot)$ будет Бержа–Парето равновесной в игре (2.1). $\square$

6. Равновесие по Бержу в олигополии Курно

Далее покажем, что и в моделях экономики существуют случаи, когда следуя концепции равновесия по Бержу, игроки могут обеспечить себе выигрыши большие, чем в ситуации равновесия по Нэшу.

В качестве примера рассмотрим модель олигополии Курно. А именно, рынок однородного продукта, на котором взаимодействуют три игрока – производителя. Объем выпущенной ими за некоторый (заданный априори) промежуток времени продукции обозначим через q_1, q_2 и q_3 соответственно. При этом каждый из игроков не может поставить на рынок товар в количестве меньшем чем $\alpha > 0$ и большем чем β. То есть выполнены неравенства

$$\alpha \leqslant q_i \leqslant \beta \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6.1}$$

Издержки производства i-го игрока ($i = 1, 2, 3$) предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной им продукции q_i и могут быть представлены в виде $cq_i + d$, здесь c и d соответственно переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным – аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\bar{q} = q_1 + q_2 + q_3$ поступившего на продажу товара. Цену товара представляем в виде $p(\bar{q}) = a - b\bar{q}$, где $a = const > 0$ – начальная цена товара, а постоянный положительный коэффициент эластичности $b > 0$ показывает, на сколько «падает» цена при поступлении в продажу единицы продукции. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Пусть каждый из производителей продает все, что он производит, тогда выручка i-ого игрока ($i = 1, 2, 3$) будет

$$p(\bar{q})q_i = (a - b\bar{q})q_i = [a - b(q_1 + q_2 + q_3)]\, q_i,$$

а его *прибыль* (выручка за вычетом издержек) составит (естественно $a > 0$, $b > 0$)

$$\pi_i(q_1, q_2, q_3) = [a - b(q_1 + q_2 + q_3)]\, q_i - (cq_i + d). \tag{6.2}$$

Предполагается также, что определяя свой объем производства, руководство каждой фирмы – производителя ориентируется на «рациональное» поведение своих конкурентов.

Математическая модель рассмотренного взаимодействия представляет собой бескоалиционную игру трех лиц

$$\langle \{1, 2, 3\}, \{\mathbf{Q}_i = [\alpha; \beta]\}_{i=1,2,3}, \{\pi_i(q_1, q_2, q_3) \div (6.2)\}_{i=1,2,3} \rangle. \tag{6.3}$$

Здесь 1,2,3 – порядковые номера игроков, $\mathbf{Q}_i = [\alpha; \beta]$ – множество стратегий игрока i ($i = 1, 2, 3$), а функция выигрыша i-го игрока $\pi_i(q_1, q_2, q_3)$ определена в (6.2).

Ситуация равновесия по Бержу $q^B = (q_1^B, q_2^B, q_3^B)$ в игре (6.3) определяется системой неравенств

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1^B, q_2, q_3) &\leqslant \pi_1(q^B) \quad \forall (q_2, q_3) \in \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_3,\\
\pi_2(q_1, q_2^B, q_3) &\leqslant \pi_2(q^B) \quad \forall (q_1, q_3) \in \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_3,\\
\pi_3(q_1, q_2, q_3^B) &\leqslant \pi_3(q^B) \quad \forall (q_1, q_2) \in \mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2.
\end{aligned}$$

Легко заметить, что в силу (6.2), ситуацией равновесия по Бержу будет $q^B = (\alpha, \alpha, \alpha)$, при этом равновесные по Бержу выигрыши π_i^B $(i = 1, 2, 3)$ составят

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = [a - 3b \cdot \alpha] \cdot \alpha - (c\alpha + d) = \alpha[a - c - 3b\alpha] - d.$$

Определим теперь равновесные по Нэшу в (6.3) выигрыши.

Утверждение 6.1. *Если в игре* (6.3) *имеет место условие*

$$\alpha < \frac{a-c}{4b} < \beta, \tag{6.4}$$

то ситуация равновесия по Нэшу будет

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, q_3^e) = \left(\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}\right).$$

Доказательство. Ситуация равновесия по Нэшу в (6.3) определяется системой равенств

$$\begin{aligned}
\pi_1(q^e) &= \max_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \pi_1(q_1, q_2^e, q_3^e) = \max_{q_1 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1 + q_2^e + q_3^e)]q_1 - (cq_1 + d)\},\\
\pi_2(q^e) &= \max_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \pi_2(q_1^e, q_2, q_3^e) = \max_{q_2 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2 + q_3^e)]q_2 - (cq_2 + d)\},\\
\pi_3(q^e) &= \max_{q_3 \in [\alpha;\beta]} \pi_3(q_1^e, q_2^e, q_3) = \max_{q_3 \in [\alpha;\beta]} \{[a - b(q_1^e + q_2^e + q_3)]q_3 - (cq_3 + d)\}.
\end{aligned}$$

Максимум функции $\pi_1(q_1, q_2^e, q_3^e)$ по переменной q_1 достигается при

$$\begin{aligned}
&\left.\tfrac{\partial \pi_1(q_1, q_2^e, q_3^e)}{\partial q_1}\right|_{q_1 = q_1^e} = [a - 2bq_1 - b(q_2^e + q_3^e) - c|_{q_1 = q_1^e} = 0,\\
&\left.\tfrac{\partial^2 \pi_1(q_1, q_2^e, q_3^e)}{\partial q_1^2}\right|_{q_1 = q_1^e} = -2b < 0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Второе неравенство из (6.5) имеет место, поскольку коэффициент эластичности $b > 0$, а из первого равенства и аналогичных ему для $i = 2, 3$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}
2q_1^e + q_2^e + q_3^e = \frac{a-c}{b}\\
q_1^e + 2q_2^e + q_3^e = \frac{a-c}{b}\\
q_1^e + q_2^e + 2q_3^e = \frac{a-c}{b}
\end{cases},$$

решением которой будет

$$q^e = (q_1^e, q_2^e, q_3^e) = \left(\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}\right).$$

При выполнении условия (6.4) найденные q_i^e $(i = 1, 2, 3)$ доставляет максимальное значение функций $\pi_i(q_i)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$, а следовательно являются равновесными по Нэшу стратегиями в игре (6.3). $\square$

Утверждение 6.2. *Если в олигополии Курно* (6.3) *выполнено условие*

$$\frac{a-c}{12b} < \alpha < \frac{a-c}{4b} < \beta, \tag{6.6}$$

то

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) > \pi_i^e = \pi_i(q^e) \quad (i = 1, 2, 3),$$

то есть ситуация равновесия по Бержу приносит каждому игроку выигрыш, больший чем в ситуации равновесия по Нэшу.

Доказательство. Для каждого игрока i $(i = 1, 2, 3)$ равновесный по Бержу выигрыш составит

$$\pi_i^B = \pi_i(q^B) = \alpha[a - c - 3b\alpha] - d.$$

При этом его выигрыш в ситуации равновесия по Нэшу (с учетом двух правых неравенств из (6.6)) будет

$$\begin{gathered}\pi_i^e = \pi_i(q^e) = \left[a - 3b\tfrac{a-c}{4b}\right]\tfrac{a-c}{4b} - \left(c\tfrac{a-c}{4b} + d\right) = \\ = (a-c)\tfrac{a-c}{4b} - 3b\left(\tfrac{a-c}{4b}\right)^2 - d = \tfrac{(a-c)^2}{4b}\cdot\left(1 - \tfrac{3}{4}\right) - d = \\ = \tfrac{(a-c)^2}{16b} - d.\end{gathered}$$

Разность выигрышей каждого i-го игрока в ситуациях равновесия по Бержу и по Нэшу

$$\begin{gathered}\pi_i^B - \pi_i^e = \tfrac{(a-c)^2}{16b} - d - (\alpha[a - c - 3b\alpha] - d) = \\ = 3b\alpha^2 - (a-c)\alpha + \tfrac{(a-c)^2}{16b} = \left(\alpha - \tfrac{a-c}{4b}\right)\cdot\left(\alpha - \tfrac{a-c}{12b}\right).\end{gathered}$$

Отсюда, с учетом (6.6), получим $\pi_i^B - \pi_i^e > 0$, что и означает

$$\pi_i^B > \pi_i^e.$$

$\square$

Замечание 6.1. Утверждение 6.2 может быть обобщено и на случай олигополии Курно, в которой число игроков $N > 3$.

7. Заключение

В статье была рассмотрена мало известная концепция равновесия по Бержу как принцип оптимальности в бескоалиционной игре в нормальной форме. Рассмотрено введение дополнительного требования к равновесию по Бержу: Парето-оптимальности. Другая модификация равновесия по Бержу – учет условия индивидуальной рациональности (равновесие Бержа–Вайсмана). Следующим шагом в развитии этой концепции может послужить совмещение этих понятий. Такая конструкция может быть названа «дележами Бержа».

Еще одним направлением для продолжения исследований является распространение предложенной концепции на динамические игры. Динамический вариант будет предложен читателям во второй статье цикла.

Надеемся, что предложенная работа пробудит интерес к равновесию по Бержу и вовлечет новых исследователей в «орбиту» предлагаемой концепции.

Авторы благодарят рецензента за полезные и конструктивные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу: Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат.наук.* СПбГУ, 1995.

2. Вайсман К.С. *Равновесие по Бержу* / В кн.: Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно–квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова думка, 1994. С. 119–143.

3. Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. *Исследование операций.* М.: Издательский центр «Академия», 2008.

4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Т.I.* М.: ИЛ, 1962.

5. Дмитрук А.В. *Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс.* М.: МАКС–ПРЕСС, 2012.

6. Жуковский В.И. *Кооперативные игры при неопределенности и их приложения.* Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2010.

7. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т.5. № 1. С. 27–44.

8. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно–квадратичные дифференциальные игры.* Киев: Наукова думка, 1994.

9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1985.

10. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1969.

11. Мащенко С.О. *Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие* // Журнал обчисловальной та прикладноi математики. 2012. № 1(107). С. 40–65.

12. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* М.: Высшая школа, 1986.

13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето–оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

14. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИЛ, 1962.

15. Berge C. *Théorie générale des jeux á n personnes games.* Paris: Gauthier Villars, 1957. (Рус. пер. Берж К. *Общая теория игр нескольких лиц.* М.: Физматгиз, 1961).

16. Borel E. *Sur les systémes de formes linéaires a déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu* // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. 1927. V. 184. P. 52–53.

17. Colman A.M., Körner T.W., Musy O. and Tazdait T. *Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria* // Journal of Mathematical Psychology. 2011. V. 55. N 2. pp. 166-175.

18. Glicksberg I.L. *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points* // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. N 1. P. 170–174.

19. Nash J.F. *Equilibrium points in N-person games* // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48–49.

20. Nash J.F. *Non-cooperative games* // Ann. Math. 1951. V. 54. P. 286–
–295.

21. Nessah R., Larbani M., Tazdait T. *A note on Berge equilibrium* // Applied Mathematics Letters. 2007. V. 20. N 8. P. 926–932.

22. Von Neumann J. *Zur Theorie der Gesellschaftspiele* // Math. Ann. 1928. V. 100. N 1. P. 295–320.

23. Radjef M.S. *Sur l'existenced'un èquilibre de Berge pour un jeu diffèrentiel a n porsonnes.* // Cahiers Mathèmatiques de l'Universitè d'Oran. 1998. N 1. P. 89–93.

24. Shubik M. *Review of C. Berge «General theory of n-person games»* // Econometrica. 1961. V. 29. N 4. P. 821.

25. Vaisman K.S. *About differential game under uncertainty* // Abstr. of Third Intern. Workshop «Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization». St.-Petersburg. 1995. P. 45–48.

26. Vaisman K.S. *The Berge equilibrium for linear–quadratic differential game* // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts. The 3-d Intern. Workshop. Orekhovo-Zuevo, Russia, 1994. P. 96.

27. Vaisman K.S., Zhukovskiy V.I. *The Berge equilibrium under uncertainty* // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts. The 3-d Intern. Workshop. Orekhovo-Zuevo, Russia, 1994. P. 97–98.

28. Zhukovskiy V.I., Molostvov V.S., Vaisman K.S. *Non-cooperative games under uncertainty* // Game Theory and Application. 1997. V. 3. P. 189–222.

29. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E., Vaisman K.S. *The Berge equilibrium.* Preprint. Tbilisi: Institute of control systems, 1994.

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF THE GOLDEN RULE. I. STATIC VARIANT

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc. (kudrkn@gmail.com).

Abstract: The Berge equilibrium concept was suggested by Russian mathematician K. Vaisman in 1994. In the presented paper, we offer to use this concept as a mathematical model of the Golden Rule. The Berge–Pareto equilibrium is formalized, sufficient conditions for the existence of the equilibrium are found. For mixed strategies, the existence of the equilibrium is proved.

Keywords: non-cooperative game, Berge equilibrium, Pareto maximum.