Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.3, с. 48–78

УДК 517.957+517.988+519.833.2+519.837
ББК 22.18

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ, СВЯЗАННОЙ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ: МОНОТОННЫЙ СЛУЧАЙ

Андрей В. Чернов*
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24
e-mail: chavnn@mail.ru

Данная работа продолжает исследования по проблеме достаточных условий существования равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. В отличие от предыдущей работы автора, опубликованной по этой теме, управления на этот раз могут явно входить в интегранты функционалов выигрышей. Кроме того, совершенно отличаются условия, предъявляемые к правым частям уравнений. Наконец, используется принципиально иной метод доказательства, основанный не на

---

* Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект №1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 №02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

выпуклости множеств достижимости, а на установлении выпуклого характера зависимости состояния от управления за счет выпуклости правой части по паре состояние–управление, а также за счет требований, обеспечивающих монотонность нелинейного разрешающего оператора. В качестве вспомогательных результатов, представляющих самостоятельный интерес, доказываются теоремы о сравнении решений полулинейных эллиптических уравнений и о непрерывном характере зависимости состояния от управления.

Ключевые слова: бескоалиционная игра со многими участниками, равновесие по Нэшу, полулинейные эллиптические уравнения.

1. Введение

Тема данной статьи относится к теории дифференциальных игр, связанных с уравнениями в частных производных. Отметим, что на данный момент эта теория еще не достаточно хорошо развита; по поводу антагонистического случая см. библиографию в [18]. Игры многих лиц, связанные с полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, изучались, в основном, лишь для эволюционного случая, см., например, [19, 20]. В работе [21] рассматривался неэволюционный случай, а именно, игра многих лиц, связанная с задачей Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения второго порядка типа стационарного уравнения диффузии-реакции. Уравнение диффузии-реакции (как нестационарное, так и стационарное) является математической моделью многих физико-химических процессов и явлений, см., например, [3,13,24]. Поэтому изучение игровых задач, связанных с такими уравнениями, достаточно актуально. Так, в работе [21] раздел 2 был полностью посвящен постановке одной из таких задач – задаче о нейтрализации токсина в крови больного. Но вместо нее аналогично можно рассмотреть задачу о нейтрализации промышленных стоков или продуктов жизнедеятельности вредоносных микроорганизмов в водоеме и т.д. Чтобы это понять, достаточно лишь вспомнить, что состояния уравнений – это концентрации веществ, участвующих в диффузии, а правые части – плотности их источников.

Данная работа продолжает исследования по проблеме достаточных условий существования равновесия по Нэшу в бескоалиционных играх многих лиц, связанных с эллиптическими полулинейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка, см. [21]. Метод [21] был основан на установлении выпуклости множеств достижимости управляемых уравнений. В свою очередь, для того, чтобы обеспечить такую выпуклость, приходилось предъявлять некоторые специфические требования к правым частям. На этот раз используется принципиально иной метод доказательства, основанный не на выпуклости множеств достижимости, а на установлении выпуклого характера зависимости состояния от управления за счет выпуклости правой части по паре состояние–управление, а также за счет довольно традиционных (см., например, [26]) требований, обеспечивающих монотонность нелинейного разрешающего оператора. Соответственно, совершенно отличаются условия, предъявляемые к правым частям уравнений. Кроме того, в отличие от [21], управления на этот раз могут явно входить в интегранты функционалов выигрышей. Отметим также, что в [21] речь шла об ε-равновесии при том, что управления игроков были достаточно произвольного вида. На этот раз речь идет о точном равновесии, но управления игроков предполагаются кусочно постоянными.

В качестве вспомогательных результатов, представляющих самостоятельный интерес, доказываются теоремы о сравнении решений полулинейных эллиптических уравнений и о непрерывном характере зависимости состояния от управления.

2. Формулировка основного результата

Пусть заданы: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $2 < q < \dfrac{2n}{n-2}$ (следовательно, $W_2^1(\Pi) \subset L_q(\Pi)$); $\gamma > 0$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}(\gamma)$ – класс всех матричных функций $A = A(.) = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in$ $\in L_\infty^{n\times n}(\Pi)$, $A(t)\xi \cdot \xi \geq \gamma|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, п.в. $t \in \Pi$; символ «$\cdot$» означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$; $b \in L_\infty^+(\Pi)$; $g \in L_2^+(\Pi)$; $\mathbb{M}$ – совокупность пар функций $\varphi(t,\xi) \leq \psi(t,\xi)$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных и не убывающих по $\xi \in \mathbb{R}$ и таких, что $\varphi\big(.,x(.)\big) \in L_2(\Pi)$, $\psi\big(.,x(.)\big) \in L_2(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$; $\varphi(.,0) \equiv 0$, $\psi(.,0) \equiv 0$ на Π.

Для $(\varphi,\psi) \in \mathbb{M}$, $\mathcal{D} \subset L_r^s(\Pi)$, $s \in \mathbb{N}$, $r > 2$, определим класс $\mathbb{F}(\varphi,\psi;\mathcal{D})$ всех функций $f(t,\xi,v) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, измеримых по

$t \in \Pi$, непрерывных по паре $(\xi; \upsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$, неубывающих по $\xi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\varphi(t,\xi) \le f\big(t,\xi,u(t)\big) \le \psi(t,\xi) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{D}.$$

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ – заданное число игроков, каждый из которых действует независимо в своих собственных интересах. Пусть, кроме того, заданы $A^{(j)} \in \mathcal{A}(\gamma_j)$, $b^{(j)} \in L_\infty^+(\Pi)$, $g^{(j)} \in L_\infty^+(\Pi)$, $(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}) \in \mathbb{M}$, $\mathcal{D}_j \subset L_r^s(\Pi)$, $f^{(j)} \in \mathbb{F}(\varphi^{(j)}, \psi^{(j)}; \mathcal{D}_j)$, $j = \overline{1,\nu}$. Для каждого индекса $j = \overline{1,\nu}$ будем считать, что j-й игрок путем выбора функции $u^{(j)} \in \mathcal{D}_j$ управляет однородной задачей Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения в дивергентной форме

$$\mathcal{L}^{(j)}[x](t) = g^{(j)}(t) - f^{(j)}\big(t, x(t), u^{(j)}(t)\big),\ t \in \Pi; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}^{(j)}[x] \equiv -\mathrm{div}\,\big(A^{(j)}\nabla x\big) + b^{(j)}x\,.$$

Набор управлений $\big\{u^{(j)}\big\}_{j=1}^{\nu}$ будем обозначать $\vec{u}$.

Таким образом, правая часть уравнения (2.1) записывается не в виде одной функции, а в виде разности двух функций. Это делается для того, чтобы определить далее минорантное и мажорантное уравнения (не зависящие от управлений), а решения этих уравнений использовать для поточечной оценки решений исходного уравнения – см. (2.3) далее. Здесь важно, что функции $\varphi(t,\xi)$, $\psi(t,\xi)$, входящие в правые части мажорантного и минорантного уравнений, должны удовлетворять условию $\varphi(.,0) \equiv 0$, $\psi(.,0) \equiv 0$. Именно этим условием и определяется такой специальный вид правой части уравнения (2.1).

Решение задачи (2.1) будем понимать в *обобщенном смысле* как функцию $x \in H_0^1(\Pi) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $y \in H_0^1(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B^{(j)}[x,y] = \int\limits_\Pi \big[g^{(j)}(t) - f^{(j)}\big(t, x(t), u(t)\big)\big]\, y(t)\, dt, \tag{2.2}$$

при $u = u^{(j)}$, где принято обозначение

$$B^{(j)}[x,y] \equiv \int\limits_\Pi \big[A^{(j)}\nabla x \cdot \nabla y + b^{(j)}xy\big]\, dt.$$

В разделе 4 будет показано, что при сделанных предположениях уравнение (2.1) для каждого управления $u^{(j)} \in \mathcal{D}_j$ имеет в точности одно решение $x = x^{(j)}$, удовлетворяющее оценке

$$0 \leq \widehat{x}^{(j)} \leq x^{(j)} \leq \widetilde{x}^{(j)}, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{x}^{(j)}$, $\widehat{x}^{(j)}$ – это соответственно решения минорантного и мажорантного уравнений (которые тоже существуют и единственны):

$$\mathcal{L}^{(j)}[x](t) = g^{(j)}(t) - \varphi^{(j)}\big(t, x(t)\big),\ t \in \Pi; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0;$$

$$\mathcal{L}^{(j)}[x](t) = g^{(j)}(t) - \psi^{(j)}\big(t, x(t)\big),\ t \in \Pi; \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0.$$

Пусть $\kappa \in \mathbb{N}$ – заданное число, причем множество Π представлено в виде дизъюнктного объединения $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\kappa} \Pi_k$. Такое представление будем обозначать π и называть *разбиением множества* Π. Пусть $\alpha^{(j)}, \beta^{(j)} \in \in \mathbb{R}^{s\kappa}$ – заданные векторы с компонентами

$$\alpha^{(j)} = \big\{\alpha_{11}^{(j)}, \ldots, \alpha_{1\kappa}^{(j)}; \ldots; \alpha_{s1}^{(j)}, \ldots, \alpha_{s\kappa}^{(j)}\big\};$$

$$\beta^{(j)} = \big\{\beta_{11}^{(j)}, \ldots, \beta_{1\kappa}^{(j)}; \ldots; \beta_{s1}^{(j)}, \ldots, \beta_{s\kappa}^{(j)}\big\};$$

$\alpha^{(j)} \leq \beta^{(j)}$, $j = \overline{1, \nu}$. Для α, $\beta \in \mathbb{R}^{s\kappa}$ обозначим $\mathbb{V} = \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big)$ как совокупность всех функций $u \in L_r^s(\Pi)$, удовлетворяющих условиям:

$$u_i(t) \equiv w_{ik} \in [\alpha_{ik}; \beta_{ik}],\ t \in \Pi_j,\ i = \overline{1, s},\ k = \overline{1, \kappa}\,. \tag{2.4}$$

Положим $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big)$ – множество $(s\,\kappa)$-мерных векторов

$$w = \big\{w_{11}, \ldots, w_{1\kappa}; \ldots; w_{s1}, \ldots, w_{s\kappa}\big\}$$

со свойствами: $w_{ik} \in [\alpha_{ik}; \beta_{ik}]$, $i = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, \kappa}$. Формула (2.4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$. Аппроксимацию $v \in \mathbb{V}$, отвечающую вектору $w \in \mathbb{W}$, обозначим $v\{w\}$. Ясно, что множество $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big)$ представляет собой выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{R}^{s\kappa}$. Далее мы будем считать, что

$$\mathcal{D}_j = \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha^{(j)}; \beta^{(j)}]\big), \quad j = \overline{1, \nu}.$$

Таким образом, допустимые управления являются кусочно постоянными на заданном разбиении множества Π с заданными ограничениями снизу и сверху на каждом элементе разбиения. Выбор такого класса допустимых управлений не случаен. Дело в том, что, как показано в [23], при достаточно мелком разбиении множества независимых переменных для всякой измеримой функции из поточечно ограниченного множества можно подобрать кусочно постоянную функцию на соответствующей сетке так, что значение функционала на этой аппроксимации будет отличаться сколь угодно мало от значения функционала на исходном управлении. Поэтому такое сужение множества измеримых допустимых управлений является оправданным. Кроме того, его можно использовать и при реализации различных численных методов; см. по этому поводу замечание 2.2 и раздел 8.

Пусть задан набор функций $\Phi_j(t,\vec{\xi},\vec{v}) : \Pi\times\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{s\nu}\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,\nu}$, измеримых по $t\in\Pi$, непрерывных по $(\vec{\xi};\vec{v})\in\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{s\nu}$ и удовлетворяющих условиям:

$\mathbf{G}_1$) для всех $\vec{x}\in L_2^\nu(\Pi)$, $\vec{u}\in L_r^{s\nu}(\Pi)$ имеем: $\Phi_j\Big(.,\vec{x}(.),\vec{u}(.)\Big)\in L_1(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$;

$\mathbf{G}_2$) для каждого $j=\overline{1,\nu}$ функция

$$\Phi_j(t,\xi_1,\ldots,\xi_\nu;v_1,\ldots,v_\nu) : \Pi\times\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^{s\nu}\to\mathbb{R}$$

при п.в. $t\in\Pi$ вогнута по $(\xi_j;v_j)\in\Xi_j(t)\times\Upsilon_j(t)$ и не возрастает по $\xi_j\in\Xi_j(t)$, где приняты обозначения:

$$\Xi_j(t)=\big[\widehat{x}^{(j)}(t);\widetilde{x}^{(j)}(t)\big],\quad \Upsilon_j(t)=\big[\widetilde{u}^{(j)}(t);\widehat{u}^{(j)}(t)\big],$$

$$\widetilde{u}_i^{(j)}(t)=\alpha_{ik}^{(j)},\ \widehat{u}_i^{(j)}(t)=\beta_{ik}^{(j)},\ t\in\Pi_k,\ i=\overline{1,s},\ k=\overline{1,\kappa},\ j=\overline{1,\nu}.$$

Определим набор функционалов вида

$$J_j[\vec{u}]=\int\limits_\Pi \Phi_j\big(t,x^{(1)}[u^{(1)}](t),\ldots,x^{(\nu)}[u^{(\nu)}](t);u^{(1)}(t),\ldots,u^{(\nu)}(t)\big)\,dt,$$

$j=\overline{1,\nu}$, $\vec{u}\in\mathcal{D}=\prod\limits_{j=1}^{\nu}\mathcal{D}_j$.

Целью игры для j-го игрока будем считать максимизацию своего выигрыша, заданного функционалом $J_j[\vec{u}]$, $j=\overline{1,\nu}$. Допустимыми считаем лишь программные стратегии. В частности, стратегия первого игрока – это просто выбор управления $u^{(1)}\in\mathcal{D}_1$. Поставленную игру обозначим $\Gamma[\pi;\alpha,\beta]$. Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2.1. *Пусть дополнительно выполнены следующие предположения:*

Φ_1) *Для каждого* $j \in \overline{1,\nu}$ *существует функция* $\sigma_j \in L_q^+(\Pi)$ *такая, что* $\psi^{(j)}(.,\widetilde{x}^{(j)} - \sigma_j) \leq \varphi^{(j)}(.,\widehat{x}^{(j)})$.

Φ_2) *Для каждого* $j \in \overline{1,\nu}$ *функция* $f^{(j)}\big(t,\xi,u(t)\big)$ *вогнута по переменной* $\xi \in \Xi_j(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi$ *и всех* $u \in \mathcal{D}_j$.

Тогда игра $\Gamma[\pi;\alpha,\beta]$ *имеет ситуацию равновесия по Нэшу (значение игры и программные стратегии).*

Доказательство теоремы 2.1 см. в разделе 7.

Замечание 2.1. Для выполнения требования Φ_1) достаточно, чтобы $\psi^{(j)}(t,\xi) \to -\infty$ при п.в. $t \in \Pi$ и $\xi \to -\infty$. Таким образом, несмотря на несколько необычный вид, указанное требование не является слишком ограничительным. Существенное ограничение накладывает лишь требование $\mathbf{G}_2$). Тем не менее, как показывает следующий пример, вообще говоря, не трудно удовлетворить и этому требованию. Если сравнить этот пример с прикладным примером из [21], то понятно, что ему можно придать аналогичный практический смысл.

Пример 2.1. Пусть $\nu = 3$, $J_j[\vec{u}] = -I_j[\vec{u}]$, $x^{(j)} = x^{(j)}[u^{(j)}]$, $\alpha_{ji} > 0$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,3}$;

$$I_1 = \alpha_{11}\int\limits_{\Pi}\Big\{x^{(1)} - \Psi\big[x^{(2)},x^{(3)}\big]\Big\}^2 dt + \alpha_{12}\int\limits_{\Pi}\big(u^{(1)}\big)^2 dt;$$

$$I_2 = \alpha_{21}\int\limits_{\Pi}\Big\{x^{(2)} - x^{(1)}\Big\}^2 dt + \alpha_{22}\int\limits_{\Pi}\big(x^{(2)}\big)^2 dt;$$

$$I_3 = \alpha_{31}\int\limits_{\Pi}\Big\{x^{(3)} - x^{(1)} + x^{(2)}\Big\}^2 dt + \alpha_{32}\int\limits_{\Pi}\big(x^{(3)}\big)^2 dt.$$

Предположим, что выполнены условия

$$\max_{\xi\in\Xi_2(t),\eta\in\Xi_3(t)}\Psi[\xi,\eta] \leq \widehat{x}^{(1)}(t); \quad \widetilde{x}^{(1)}(t) \leq \widehat{x}^{(2)}(t),$$

а следовательно,

$$\widetilde{x}^{(1)}(t) \leq \widehat{x}^{(2)}(t) + \widehat{x}^{(3)}(t).$$

Тогда в силу (2.3) получаем, что

$$x^{(1)} \geq \Psi\big[x^{(2)}, x^{(3)}\big], \quad x^{(2)} \geq x^{(1)}, \quad x^{(3)} \geq x^{(1)} - x^{(2)},$$

следовательно, условие $\mathbf{G}_2$) выполнено. Выполнение условия $\mathbf{G}_1$) очевидно.

Замечание 2.2. Вопрос о том, как искать ситуацию равновесия по Нэшу в общем случае, должен быть темой отдельного исследования, поскольку этот вопрос далеко не простой. Что же касается антагонистического случая и гладкой зависимости функционала выигрыша от управляемых параметров (последнее требование можно обеспечить за счет соответствующих требований гладкости правых частей и интегрантов), то (поскольку при нашем подходе функционалы выигрышей представляют фактически функции многих переменных) тут можно использовать метод отсечений – см. раздел 8.

3. Сравнение решений эллиптических уравнений

Пусть выполнены предположения относительно области $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, сформулированные ранее в разделе 2. Там же см. определение класса $\mathcal{A}(\gamma)$ и предположения относительно констант. Пусть, кроме того, $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$; $b \in L_\infty^+(\Pi)$;

$$L[x] = -\mathrm{div}\,(A\nabla x) + bx.$$

Пусть функции $\varphi(t,\xi)$, $\psi(t,\xi)\,:\,\Pi\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ измеримы по $t\in\Pi$, непрерывны и не убывают по переменной $\xi\in\mathbb{R}$ и таковы, что $\varphi\big(.,x\big)$, $\psi\big(.,x\big)\in L_2(\Pi)$ для всех $x\in L_q(\Pi)$.

Будем рассматривать следующие два уравнения.

$$L[x](t) = -\varphi\big(t,x(t)\big) - \mathrm{div}\,\vec{Q}(t), \quad t\in\Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{3.1}$$

$$L[x](t) = -\psi\big(t,x(t)\big) - \mathrm{div}\,\vec{Q}(t), \quad t\in\Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{3.2}$$

Решения уравнений (3.1), (3.2) понимаем в обобщенном смысле как функцию $x\in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую соответствующему интегральному тождеству:

$$B[x,\omega] = -\int\limits_{\Pi}\varphi\big(t,x(t)\big)\,\omega(t)\,dt + \int\limits_{\Pi}\vec{Q}(t)\cdot\nabla\omega(t)\,dt, \tag{3.3}$$

$$B[x,\omega]=-\int\limits_{\Pi}\psi\big(t,x(t)\big)\,\omega(t)\,dt+\int\limits_{\Pi}\vec{Q}(t)\cdot\nabla\omega(t)\,dt, \tag{3.4}$$

для всех $\omega\in H_0^1(\Pi)$. Здесь

$$B[x,\omega]=\int\limits_{\Pi}\Big\{A\nabla x\cdot\nabla\omega+bx\omega\Big\}\,dt.$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 3.1. *Пусть $\varphi(t,\xi)\le\psi(t,\xi)$, $x\in H_0^1(\Pi)$ – решение уравнения (3.1), $y\in H_0^1(\Pi)$ – решение уравнения (3.2). Тогда $x(t)\ge y(t)$ для п.в. $t\in\Pi$.*

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Следующее утверждение известно как *принцип максимума* для эллиптических уравнений, см., например, [6, теорема 8.1], [9, глава 2, теорема 4.1].

Лемма 3.1. *Для любых $A\in\mathcal{A}(\gamma)$ и $b\in L_\infty^+(\Pi)$ имеем:*

1) *если $B[x,\omega]\ge 0$ $\forall\omega\in\mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega\ge 0$, то $\inf\limits_{\Pi}x\ge\inf\limits_{\partial\Pi}x^-$;*

2) *если $B[x,\omega]\le 0$ $\forall\omega\in\mathbf{C}_0^1(\Pi)$, $\omega\ge 0$, то $\sup\limits_{\Pi}x\le\sup\limits_{\partial\Pi}x^+$.*

Здесь $x^-=\min\{x,0\}$, $x^+=\max\{x,0\}$.

Лемма 3.2. *Пусть функция $g(t,x):\Pi\times\mathbb{R}^\nu\to\mathbb{R}$ такова, что $g\big(.,x_1(.),\ldots,x_\nu(.)\big)\in Z$ для всех $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,\nu}$, где $X_j=X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$, $Z=Z(\Pi)$ – лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1;+\infty)$; $X=X_1\times\ldots\times X_\nu$. Тогда оператор $G:X\to Z$, определяемый формулой $G[x]=g\big(.,x(.)\big)$, является непрерывным и ограниченным.*

Для $\nu=1$ лемма 3.2 доказана в [10, § I.2, теорема 2.1, с.31; теорема 2.2, с.35]. Ее справедливость для $\nu>1$ следует из анализа доказательств [10, § I.2, теорема 2.1, с.31; теорема 2.2, с.35].

Доказательство теоремы 3.1. Обозначим $p(t)=y(t)-x(t)$. Очевидно, что

$$\int\limits_{\Pi}A\nabla p\cdot\nabla\omega\,dt=-\int\limits_{\Pi}\Big[\psi\big(t,y(t)\big)-\varphi\big(t,x(t)\big)\Big]\,\omega(t)\,dt \tag{3.5}$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$. Поскольку пространство $\mathbf{C}^\infty(\overline{\Pi})$ всюду плотно в пространстве $W_2^1(\Pi) = H^1(\Pi)$, существуют последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\} \subset \mathbf{C}^\infty(\overline{\Pi})$ такие, что

$$\|x_k - x\|_{W_2^1} \to 0, \quad \|y_k - y\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Обозначим

$$p_k = y_k - x_k \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Pi}); \quad \|p_k - p\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty;$$

$\Pi_k = \Big\{ t \in \Pi: \ p_k(t) > 0 \Big\}$. Заметим, что множество Π_k открыто в силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции. Однако в общем случае множество Π_k может не быть связным. Обозначим Ω_k^α, $\alpha \in J$, – различные компоненты связности множества Π_k. Ясно, что каждая из них является ограниченной областью. Очевидно также, что

$$p_k\Big|_{\partial\Omega_k^\alpha} \equiv 0, \quad \alpha \in J; \quad p_k\Big|_{\partial\Pi_k} \equiv 0.$$

Обозначим $z_k^\alpha \in H_0^1(\Omega_k^\alpha)$ – функцию z, удовлетворяющую тождеству

$$\int\limits_{\Omega_k^\alpha} A\nabla z \cdot \nabla\omega \, dt = -\int\limits_{\Omega_k^\alpha} \Big[\psi\big(t, y_k(t)\big) - \varphi\big(t, x_k(t)\big)\Big]\, \omega(t)\, dt \tag{3.6}$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Omega_k^\alpha)$. Существование и единственность такой функции $z = z_k^\alpha$, $\alpha \in J$, доказывается стандартным образом на основе теоремы Лакса–Мильграма, см., например, [22]. Определим функцию $z_k \in H^1(\Pi)$ как продолжение функций z_k^α функцией p_k с множества $\Pi_k = \bigcup\limits_{\alpha \in J} \Omega_k^\alpha$ на множество Π. По построению,

$$z_k\Big|_{\partial\Omega_k^\alpha} = 0 = p_k\Big|_{\partial\Omega_k^\alpha}, \quad \alpha \in J.$$

Вспомним неравенство Пуанкаре–Фридрихса[1]. А именно, существует константа $C_\Pi = C(\operatorname{mes}\Pi)^{1/n}$, где $C > 0$ зависит лишь от n, такая, что для любой функции $\omega \in H_0^1(\Pi)$ справедлива оценка:

$$\|\omega\|_{L_2(\Pi)} \le C_\Pi \|\nabla\omega\|_{L_2^n(\Pi)}.$$

---

[1]Иногда его называют неравенством Фридрихса, иногда – неравенством Пуанкаре или вообще никак не называют, см., например, [11, § II.2, формула (2.14)], [6, § 7.8], [9, § 1.14].

Пользуясь этим неравенством, нетрудно сконструировать положительную константу σ_F такую, что

$$\|\nabla\omega\|_{L_2^n(\Pi)} \geq \sqrt{\sigma_F}\,\|\omega\|_{W_2^1(\Pi)} \quad \forall\omega \in H_0^1(\Pi). \tag{3.7}$$

Однако сделать это можно разными способами. Поскольку константа $\sigma_F > 0$ используется в дальнейших оценках, будем считать ее заданной. Пользуясь теперь определением класса $\mathcal{A}(\gamma) \ni A$, можем оценить:

$$\int\limits_\Pi A\nabla(z_k - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt \geq \gamma_1\,\|z_k - p_k\|^2_{W_2^1(\Pi)}, \quad \gamma_1 = \sigma_F\gamma.$$

Отсюда получаем:

$$\gamma_1\,\|z_k - p_k\|^2_{W_2^1(\Pi)} \leq \int\limits_\Pi A\nabla(z_k - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt =$$

$$= \sum_{\alpha\in J}\int\limits_{\Omega_k^\alpha} A\nabla(z_k - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt =$$

$$= \sum_{\alpha\in J}\left\{\int\limits_{\Omega_k^\alpha} A\nabla(z_k - p)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega_k^\alpha} A\nabla(p - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt\right\} =$$

$$= \sum_{\alpha\in J}\int\limits_{\Omega_k^\alpha} A\nabla z_k\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt - \int\limits_\Pi A\nabla p\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt +$$

$$+ \int\limits_\Pi A\nabla(p - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt = -\sum_{\alpha\in J}\int\limits_{\Omega_k^\alpha}\Big[\psi\big(.,y_k\big) - \varphi\big(.,x_k\big)\Big]\,(z_k - p_k)\,dt +$$

$$+ \int\limits_\Pi\Big[\psi\big(t,y(t)\big) - \varphi\big(t,x(t)\big)\Big]\,(z_k - p_k)\,dt + \int\limits_\Pi A\nabla(p - p_k)\cdot\nabla(z_k - p_k)\,dt =$$

$$= \int\limits_\Pi\Big[\psi\big(.,y\big) - \psi\big(.,y_k\big)\Big]\,(z_k - p_k)\,dt - \int\limits_\Pi\Big[\varphi\big(.,x\big) - \varphi\big(.,x_k\big)\Big]\,(z_k - p_k)\,dt +$$

$$+\int\limits_{\Pi} A\nabla(p-p_k)\cdot\nabla(z_k-p_k)\,dt.$$

Таким образом,

$$\gamma_1\,\|z_k-p_k\|^2_{W_2^1(\Pi)}\le\Big\{\big\|\psi(.,y_k)-\psi(.,y)\big\|_{L_2}+\big\|\varphi(.,x_k)-\varphi(.,x)\big\|_{L_2}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\|z_k-p_k\|_{L_2}+\|A\|_{L_\infty^{n\times n}}\,\|\nabla p-\nabla p_k\|_{L_2^n}\,\|\nabla z_k-\nabla p_k\|_{L_2^n},$$

откуда

$$\|z_k-p_k\|_{W_2^1(\Pi)}\le\frac{1}{\gamma_1}\Big\{\big\|\psi(.,y_k)-\psi(.,y)\big\|_{L_2}+\big\|\varphi(.,x_k)-\varphi(.,x)\big\|_{L_2}+$$

$$+\|A\|_{L_\infty^{n\times n}}\,\|p-p_k\|_{W_2^1}\Big\}.$$

Пользуясь леммой 3.2, заключаем, что $\|z_k-p_k\|_{W_2^1(\Pi)}\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда и $\|z_k-p_k\|_{L_2(\Pi)}\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$\|z_k-p\|_{L_2(\Pi)}\le\|z_k-p_k\|_{L_2(\Pi)}+\|p_k-p\|_{L_2(\Pi)}\to 0$$

при $k\to\infty$. Тогда [5, теорема VIII.6.1, с.224] имеет место сходимость по мере $z_k\xrightarrow{\mu}p$ на множестве Π. Согласно теореме Ф.Рисса [5, теорема VI.5.3, с.158], из сходимости по мере следует существование подпоследовательности, сходящейся почти всюду. Поэтому с точностью до перехода к подпоследовательности, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $z_k(t)\to p(t)$ для п.в. $t\in\Pi$. С другой стороны, по построению, $z_k=p_k(t)\le 0$ на множестве $\Pi\setminus\Pi_k$. Кроме того, учитывая, что $\Omega_k^\alpha\subset\Pi_k$, имеем: $p_k(t)=y_k(t)-x_k(t)\ge 0$, то есть $y_k(t)\ge x_k(t)$ на Ω_k^α. Используя монотонность функции $\psi(t,\xi)$ по $\xi\in\mathbb{R}$, получаем:

$$\psi\big(t,y_k(t)\big)\ge\psi\big(t,x_k(t)\big)\ge\varphi\big(t,x_k(t)\big),$$

следовательно,

$$\psi\big(t,y_k(t)\big)-\varphi\big(t,x_k(t)\big)\ge 0\quad\text{для п.в. } t\in\Omega_k^\alpha.$$

Тогда в силу (3.6) при $z=z_k^\alpha$ и леммы 3.1, $z_k^\alpha\le 0$ на Ω_k^α. Учитывая, что $z_k(t)=z_k^\alpha(t)$ при $t\in\Omega_k^\alpha$, $\Pi_k=\bigcup\limits_{\alpha\in J}\Omega_k^\alpha$, заключаем, что $z_k(t)\le 0$ для п.в. $t\in\Pi$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k\to\infty$, получаем: $p(t) = y(t) - x(t) \le 0$, то есть $y(t) \le x(t)$ для п.в. $t \in \Pi$. Теорема 3.1 доказана.

4. Разрешимость задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения

Пусть выполнены те же предположения относительно области $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, класса $\mathcal{A}(\gamma)$ и дифференциального оператора $L[x]$, что были сформулированы в начале предыдущего раздела; $2 < q < \dfrac{2n}{n-2}$; $\vec{Q} \in L_2^n(\Pi)$; $b \in L_\infty^+(\Pi)$; $g \in L_2(\Pi)$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t,\xi)$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна и не убывает по $\xi \in \mathbb{R}$ и такова, что $\varphi\big(.,x(.)\big) \in L_2(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$; $\varphi(.,0) \equiv 0$ на Π.

Будем рассматривать следующее уравнение.

$$L[x](t) = g(t) - \varphi\big(t,x(t)\big) - \operatorname{div}\vec{Q}(t), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \qquad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) понимаем в обобщенном смысле как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$B[x,\omega] = \int\limits_\Pi \Big[g(t) - \varphi\big(t,x(t)\big)\Big]\,\omega(t)\,dt + \int\limits_\Pi \vec{Q}(t)\cdot\nabla\omega(t)\,dt, \qquad (4.2)$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$, где билинейная форма $B[x,\omega]$ определяется так же, как в предыдущем разделе.

Докажем, что задача (4.1) имеет единственное решение. Воспользуемся классической теоремой Минти–Браудера, см., например, [27, sec.B]:

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ – монотонный, коэрцитивный, хеминепрерывный оператор. Тогда для всякого функционала $f \in \mathcal{H}^*$ существует решение $y \in \mathcal{H}$ уравнения $F[y] = f$. Множество решений для каждого $f \in \mathcal{H}^*$ ограничено, выпукло и замкнуто. Если F строго монотонный, то решение y определяется однозначно. Если же оператор F сильно монотонный, то обратный оператор $F^{-1} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ удовлетворяет условию Липшица.*

Для удобства читателя напомним формулировки основных понятий, используемых в лемме 4.1.

Оператор $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ называется *монотонным*, если

$$\big(F[y] - F[z], y - z\big)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall y, z \in \mathcal{H}.$$

Здесь по традиции, принятой в теории монотонных операторов, для элементов $f \in \mathcal{H}^*$, $y \in \mathcal{H}$ используется обозначение $(f, y)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} = f[y]$.

Оператор $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ называется *строго монотонным*, если

$$\big(F[y] - F[z], y - z\big)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} > 0 \quad \forall y, z \in \mathcal{H}, \quad y \neq z.$$

Если $\dfrac{\big(F[y], y\big)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}}}{\|y\|_{\mathcal{H}}} \to +\infty$ при $\|y\|_{\mathcal{H}} \to +\infty$, то оператор F называется *коэрцитивным*.

Оператор F называется *хеминепрерывным*, если функция

$$\Phi(t) = \big(F[y + tz], \omega\big)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}}, \quad t \in [0; 1],$$

непрерывна для любых фиксированных $y, z, \omega \in \mathcal{H}$. Ясно, что из непрерывности оператора F следует его хеминепрерывность.

Наконец, если существует константа $\beta > 0$ такая, что

$$\big(F[y] - F[z], y - z\big)_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} \geq \beta \, \|y - z\|^2_{\mathcal{H}} \quad \forall y, z \in \mathcal{H},$$

то говорят, что оператор F сильно монотонный.

Пусть теперь $\mathcal{H} = H^1_0(\Pi)$. Определим оператор $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ формулой:

$$F(x)[\omega] = B[x, \omega] + \int\limits_{\Pi} \varphi\big(t, x(t)\big)\, \omega(t)\, dt, \quad \omega \in \mathcal{H}.$$

Стандартным образом (см., например, [21]) доказывается, что билинейная форма $B[x, \omega]$ ограничена, то есть существует константа $\gamma_2 > 0$ такая, что

$$\big|B[x, \omega]\big| \leq \gamma_2 \, \|x\|_{\mathcal{H}} \, \|\omega\|_{\mathcal{H}}$$

для всех $x, \omega \in \mathcal{H}$. Кроме того, непосредственно из определения класса $\mathcal{A}(\gamma) \ni A$ и неравенства Пуанкаре–Фридрихса получаем оценку:

$$B[x, x] \geq \gamma \|\nabla x\|^2_{L^n_2} \geq \gamma_1 \, \|x\|^2_{\mathcal{H}}, \quad \gamma_1 = \sigma_F \, \gamma,$$

для всех $x \in \mathcal{H}$. Это означает, что билинейная форма $B[x,\omega]$ коэрцитивна. Из леммы 3.2 следует, что формула

$$G(x)[\omega] = \int\limits_{\Pi} \varphi\big(t, x(t)\big)\,\omega(t)\,dt, \quad x,\omega \in \mathcal{H},$$

определяет непрерывный и ограниченный оператор $G : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$. Отсюда ясно, что оператор $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ тоже является непрерывным.

Установим коэрцитивность оператора F. С этой целью выберем произвольно $x \in \mathcal{H}$ и обозначим

$$\Pi_- = \Big\{t \in \Pi :\ x(t) < 0\Big\}, \quad \Pi_+ = \Big\{t \in \Pi :\ x(t) \geq 0\Big\}.$$

Учитывая, что $\varphi(.,0) \equiv 0$, можем записать:

$$G(x)[x] = \int\limits_{\Pi_-} \Big[\varphi\big(.,x\big) - \varphi\big(.,0\big)\Big]_1 x\,dt + \int\limits_{\Pi_+} \Big[\varphi\big(.,x\big) - \varphi\big(.,0\big)\Big]_2 x\,dt.$$

В силу монотонности функции $\varphi(t,\xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}$ скобка $[\ldots]_1 \leq 0$ на множестве Π_-, тогда как скобка $[\ldots]_2 \geq 0$ на множестве Π_+. Отсюда получаем, что $G(x)[x] \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Тогда непосредственно из коэрцитивности билинейной формы $B[x,\omega]$ получаем коэрцитивность оператора F.

Установим сильную монотонность оператора F. Выберем произвольно элементы $x, y \in \mathcal{H}$. Обозначим

$$Q_- = \Big\{t \in \Pi :\ x(t) < y(t)\Big\}, \quad Q_+ = \Big\{t \in \Pi :\ x(t) \geq y(t)\Big\}.$$

Рассмотрим

$$G(x)[x-y] - G(y)[x-y] = \int\limits_{Q_-} \Big[\varphi\big(t,x(t)\big) - \varphi\big(t,y(t)\big)\Big]_1 \Big\{x(t) - y(t)\Big\}_1 dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_+} \Big[\varphi\big(t,x(t)\big) - \varphi\big(t,y(t)\big)\Big]_2 \Big\{x(t) - y(t)\Big\}_2 dt.$$

В силу монотонности функции $\varphi(t,\xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}$ скобка $[\ldots]_1 \leq 0$ на множестве Q_-, и на нем же $\{\ldots\}_1 \leq 0$, тогда как скобка $[\ldots]_2 \geq 0$

на множестве Π_+, и на нем же $\{\ldots\}_2 \geq 0$. Стало быть, $G(x)[x-y] - G(y)[x-y] \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Отсюда

$$F(x)[x-y] - F(y)[x-y] \geq B[x-y, x-y] \geq \gamma_1 \|x-y\|^2_{\mathcal{H}},$$

что означает сильную монотонность оператора F.

Таким образом, пользуясь леммой 4.1, заключаем, что оператор F однозначно обратим на всем пространстве $\mathcal{H}^*$, причем обратный оператор F^{-1} удовлетворяет условию Липшица. Отсюда, в частности, следует, что задача (4.1) имеет единственное решение $x = F^{-1}[K]$, где $K \in \mathcal{H}^*$ – линейный, непрерывный функционал, определяемый формулой:

$$K[\omega] = \int\limits_{\Pi} \Big[g(t)\,\omega(t) + \vec{Q}(t) \cdot \nabla\omega(t) \Big]\, dt, \quad \omega \in \mathcal{H}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{Q} \equiv 0$. Задача (4.1) переписывается в виде

$$L[x](t) = g(t) - \varphi\big(t, x(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \tag{4.3}$$

Учитывая, что $\varphi(.,0) \equiv 0$, в случае $g \equiv 0$ задача имеет очевидное решение $x \equiv 0$. Предположим теперь, что $g \geq 0$. Используя теорему 3.1 и очевидную оценку

$$\varphi(t,\xi) - g(t) \leq \varphi(t,\xi) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

заключаем, что в этом случае решение задачи (4.3) подчиняется оценке: $x(t) \geq 0$ для п.в. $t \in \Pi$.

5. Выпуклость разрешающего оператора

Пусть выполнены те же предположения относительно области $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, класса $\mathcal{A}(\gamma)$ и дифференциального оператора $L[x]$, что были сформулированы в начале раздела 3; $2 < q < \dfrac{2n}{n-2}$; $b \in L^+_\infty(\Pi)$; $g \in L^+_2(\Pi)$. Пусть, кроме того, функции $\varphi(t,\xi) \leq \psi(t,\xi)$ измеримы по $t \in \Pi$, непрерывны и не убывают по $\xi \in \mathbb{R}$ и таковы, что $\varphi\big(.,x(.)\big) \in L_2(\Pi)$, $\psi\big(.,x(.)\big) \in L_2(\Pi)$ для всех $x \in L_q(\Pi)$; $\varphi(.,0) \equiv 0$, $\psi(.,0) \equiv 0$ на Π.

Пусть $\mathcal{D}$ – заданное выпуклое множество измеримых управляющих функций $u \in L_r^s(\Pi)$; $s \in \mathbb{N}$, $r > 2$. Определим класс $\mathbb{F}(\varphi, \psi)$ всех функций $f(t, \xi, \upsilon) : \Pi \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по паре $(\xi; \upsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$, неубывающих по $\xi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\varphi(t,\xi) \leq f\big(t, \xi, u(t)\big) \leq \psi(t,\xi) \quad \text{для п.в. } t \in \Pi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{D}.$$

Для $f \in \mathbb{F}(\varphi, \psi)$, $u \in \mathcal{D}$ будем рассматривать управляемое уравнение

$$L[x](t) = g(t) - f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \qquad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) понимаем в обобщенном смысле как функцию $x \in H_0^1(\Pi)$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$B[x, \omega] = \int\limits_{\Pi} \Big[g(t) - f\big(t, x(t), u(t)\big)\Big]\, \omega(t)\, dt, \qquad (5.2)$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$, где билинейная форма $B[x, \omega]$ определяется так же, как в разделе 3.

В соответствии с теоремой 3.1 следующие две задачи естественно назвать соответственно *мажорантной* и *минорантной* для задачи (5.1).

$$L[x](t) = g(t) - \varphi\big(t, x(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0; \qquad (5.3)$$

$$L[x](t) = g(t) - \psi\big(t, x(t)\big), \quad t \in \Pi, \quad x\Big|_{\partial\Pi} = 0. \qquad (5.4)$$

В соответствии с результатами, установленными в предыдущем разделе, все три задачи (5.1), (5.3), (5.4) имеют единственное решение, и притом неотрицательное. Обозначим $\widetilde{x}$ – решение задачи (5.3), $\widehat{x}$ – решение задачи (5.4), $x[u]$ – решение задачи (5.1). Согласно теореме 3.1, имеет место оценка:

$$0 \leq \widehat{x} \leq x[u] \leq \widetilde{x} \quad \forall u \in \mathcal{D}.$$

Теорема 5.1. *Пусть дополнительно выполнены следующие предположения.*

Ψ_1) *Существует* $\sigma_0 \in L_q^+(\Pi)$ *такая, что* $\psi(., \widetilde{x} - \sigma_0) \leq \varphi(., \widehat{x})$.

Ψ_2) *Функция* $f\big(t,\xi,u(t)\big)$ *вогнута по* $\xi \in \big[\widehat{x}(t);\widetilde{x}(t)\big]$ *для п.в.* $t \in \Pi$ *и всех* $u \in \mathcal{D}$.

Тогда отображение $x[u]$ *выпукло по* $u \in \mathcal{D}$.

Для доказательства теоремы 5.1 нам понадобится вспомогательное утверждение, представляющее собой одну из формулировок теоремы измеримого выбора. Обозначим $\mathbb{S}(\Pi)$ – пространство измеримых п.в. конечных функций на Π.

Лемма 5.1. *Пусть функция* $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^s$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathbb{R}^l$, *а функция* $\varphi(t) : \Pi \to \mathbb{R}^s$ *измерима. Пусть, кроме того, многозначное отображение* $Q(t) = \mathcal{Q}(t) \subset \mathbb{R}^l$, $t \in \Pi$, *измеримо*[2] *или хотя бы слабо измеримо, и для п.в.* $t \in \Pi$ *нашелся некоторый вектор* $y_t \in \mathcal{Q}(t)$ *такой, что* $\varphi(t) = \Phi(t, y_t)$. *Тогда существует функция* $\theta \in \mathbb{S}^l(\Pi)$, *принимающая значения в множестве* $\mathcal{Q}(t)$ *и такая, что для п.в.* $t \in \Pi$ *справедливо равенство:* $\Phi\big(t,\theta(t)\big) = \varphi(t)$.

Доказательство леммы 5.1 следует, например, непосредственно из [14, Дополнение, § Д1, следствие Д1.3.1, с.327].

Доказательство теоремы 5.1. Выберем произвольно управления $u_i \in \mathcal{D}$ и обозначим $x_i = x[u_i]$, $i = 0, 1$. Зафиксируем произвольно число $\lambda \in (0;1)$ и обозначим

$$u_\lambda = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_0, \quad x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0; \quad \mathcal{G}[\omega] = \int\limits_\Pi g(t)\,\omega(t)\,dt.$$

Согласно нашему определению решения задачи (5.1), имеют место тождества:

$$B[x_i,\omega] + \int\limits_\Pi f\big(t, x_i(t), u_i(t)\big)\,\omega(t)\,dt = \mathcal{G}[\omega] \quad \forall \omega \in H_0^1(\Pi);\ i = 0,1.$$

---

[2]Напомним, что для метрического пространства X многозначное отображение $Q : \Pi \to 2^X$ называется *измеримым*, если для любого замкнутого множества $S \subset X$ множество $Q^{-1}(S) = \big\{t \in \Pi : Q(t) \cap S \neq \emptyset\big\}$ измеримо. Если то же самое выполняется для любого открытого множества S, то отображение Q называется *слабо измеримым*. Вообще, для простоты можно считать, что $\mathcal{Q}(t) \equiv \overline{\Omega}$, где Ω – ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^l$, либо $\mathcal{Q}(t)$ множество вида $\Big\{v \in \mathbb{R}^l : \widetilde{u}(t) \le v \le \widehat{u}(t)\Big\}$, где функции $\widetilde{u}(t)$, $\widehat{u}(t)$ п.в. конечны и измеримы и т.п.

Домножая одно из них на λ, а другое – на $(1-\lambda)$ и складывая, получаем:

$$B[x_\lambda,\omega]+\int\limits_{\Pi}\Big[\lambda\, f\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)+(1-\lambda)\, f\big(t,x_0(t),u_0(t)\big)\Big]\,\omega(t)\,dt=\mathcal{G}[\omega]$$

для всех $\omega\in H_0^1(\Pi)$. Далее мы собираемся доказать, что существует функция $\sigma\in L_q^+(\Pi)$ такая, что для п.в. $t\in\Pi$ имеем:

$$\lambda\, f\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)+(1-\lambda)\, f\big(t,x_0(t),u_0(t)\big)=f\big(t,x_\lambda(t)-\sigma(t),u_\lambda(t)\big). \tag{5.5}$$

Ясно, что при выполнении (5.5) $x=x_\lambda$ является решением тождества

$$B[x,\omega]+\int\limits_{\Pi} f\big(t,x(t)-\sigma(t),u_\lambda(t)\big)\,\omega(t)\,dt=\mathcal{G}[\omega] \tag{5.6}$$

для всех $\omega\in H_0^1(\Pi)$.

Итак, докажем (5.5). Считая $t\in\Pi$ произвольно фиксированным, рассмотрим уравнение

$$\lambda\, f\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)+(1-\lambda)\, f\big(t,x_0(t),u_0(t)\big)=f\big(t,x_\lambda(t)-\sigma,u_\lambda(t)\big) \tag{5.7}$$

относительно неизвестного $\sigma\in\mathbb{R}_+$. Заметим, что в силу условия Ψ_2), при $\sigma=0$ имеем:

$$f\big(t,x_\lambda(t),u_\lambda(t)\big)\geq\lambda\, f\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)+(1-\lambda)\, f\big(t,x_0(t),u_0(t)\big). \tag{5.8}$$

С другой стороны, в силу определения класса $\mathbb{F}(\varphi,\psi)\ni f$ и монотонности функции ψ, а также оценки $\widehat{x}\leq x_i\leq\widetilde{x}$, $i=0,1$, можем оценить:

$$f\big(t,x_\lambda(t)-\sigma_0(t),u_\lambda(t)\big)\leq\psi\big(t,x_\lambda(t)-\sigma_0(t)\big)\leq\psi\big(t,\widetilde{x}(t)-\sigma_0(t)\big).$$

Теперь, пользуясь условием Ψ_1) и монотонностью функции φ, получаем:

$$f\big(t,x_\lambda(t)-\sigma_0(t),u_\lambda(t)\big)\leq\varphi\big(t,\widehat{x}(t)\big)=\lambda\,\varphi\big(t,\widehat{x}(t)\big)+(1-\lambda)\,\varphi\big(t,\widehat{x}(t)\big)\leq$$
$$\leq\lambda\,\varphi\big(t,x_1(t)\big)+(1-\lambda)\,\varphi\big(t,x_0(t)\big).$$

Отсюда, пользуясь определением класса $\mathbb{F}(\varphi,\psi)\ni f$, заключаем, что

$$f\big(t,x_\lambda(t)-\sigma_0(t),u_\lambda(t)\big)\le\lambda\, f\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)+(1-\lambda)\, f\big(t,x_0(t),u_0(t)\big). \tag{5.9}$$

В силу оценок (5.8) и (5.9), а также непрерывности функции $f(t,\xi,v)$ по $\xi\in\mathbb{R}$ и теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, делаем вывод, что существует точка $\sigma_t\in[0;\sigma_0(t)]$, являющаяся решением уравнения (5.7). Пользуясь наконец леммой 5.1, устанавливаем, что существует измеримая функция $\sigma(t)$, принимающая значения из отрезка $[0;\sigma_0(t)]$ и такая, что имеет место (5.5). Поскольку $\sigma_0\in L_q^+(\Pi)$, то в силу идеальности пространства $L_q(\Pi)$ ясно, что $\sigma\in L_q^+(\Pi)$. Таким образом, x_λ удовлетворяет тождеству (5.6). При этом в силу монотонности функции $f(t,\xi,v)$ по $\xi\in\mathbb{R}$ имеем:

$$f\big(t,\xi-\sigma(t),u_\lambda(t)\big)\le f\big(t,\xi,u_\lambda(t)\big)\quad \text{для п.в. } t\in\Pi,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}.$$

Тогда, согласно теореме 3.1, справедлива оценка:

$$x[u_\lambda]\le x_\lambda=\lambda x[u_1]+(1-\lambda)x[u_0]\quad \forall\lambda\in(0;1).$$

Это означает, что отображение $x[u]$ выпукло по $u\in\mathcal{D}$. Теорема 5.1 доказана.

6. Непрерывность разрешающего оператора

Пусть выполнены предположения, сформулированные в начале предыдущего раздела[3]; $f\in\mathbb{F}(\varphi,\psi)$, $u\in\mathcal{D}$. Будем рассматривать задачу (5.1).

Теорема 6.1. *Пусть множество $\mathcal{D}$ поточечно ограничено, то есть существует функция $u_*\in L_r^+(\Pi)$ такая, что $|u|\le u_*$ для всех $u\in\mathcal{D}$. Тогда оператор $x[u]$ непрерывен на множестве $\mathcal{D}$.*

Для доказательства теоремы 6.1 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Первое из них – это один из вариантов теоремы измеримого выбора.

Лемма 6.1. *Пусть $a(.),b(.)\in\mathbb{S}^l(\Pi)$ – измеримые на Π l-вектор-функции, $a(t)\le b(t)$ для п.в. $t\in\Pi$, а функция $\Phi(t,y):\Pi\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$*

---

[3]Условие неотрицательности $g(t)\ge 0$ для п.в. $t\in\Pi$ здесь не требуется.

измерима по $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathbb{R}^l$*. Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y\in[a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$$

измерима на Π*. Более того, существует функция*

$$\theta \in M[a;b] \equiv \Big\{ y \in \mathbb{S}^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)] \Big\}$$

такая, что для п.в. $t \in \Pi$ *справедливо равенство:* $\Phi\big(t,\theta(t)\big) = \varphi(t)$*.*

Доказательство леммы 6.1 следует, например, непосредственно из [14, предложение Д1.2, с.326, и теорема Д1.4, с.327].

Следующее утверждение известно как теорема Скорца–Драгони, см., например, [17, с.234].

Лемма 6.2. *Пусть* $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ *– ограниченное измеримое по Лебегу множество; функция* $Q(t,p) : \Pi \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $p \in \mathbb{R}^m$*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует компакт* $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$*:* $\mathrm{mes}\,\big(\Pi \setminus \Pi_\varepsilon\big) < \varepsilon$*, и на множестве* $\Pi_\varepsilon \times \mathbb{R}^m$ *функция* $Q(t,p)$ *непрерывна. При этом систему множеств* Π_ε *можно считать расширяющейся при* $\varepsilon \to +0$*.*

Доказательство теоремы 6.1. Выберем произвольно управления $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u \in \mathcal{D}$. Отвечающие им решения задачи (5.1) будем обозначать соответственно $x_0 = x[u_0]$, $x = x[u_0 + \Delta u]$. Обозначим $p = x - x_0$. Согласно нашему определению решения задачи (5.1), $p \in H_0^1(\Pi)$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$B[p,\omega] = -\int\limits_\Pi \big[f(.,x_0{+}p,u_0{+}\Delta u) - f(.,x_0,u_0)\big](t)\omega(t)\,dt \quad \forall \omega \in H_0^1(\Pi).$$

Иначе говоря, для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$ имеем:

$$B[p,\omega] + \int\limits_\Pi f_0\big(.,p\big)\,\omega\,dt = -\int\limits_\Pi \big[f(.,x_0{+}p,u_0{+}\Delta u) - f(.,x_0{+}p,u_0)\big]\,\omega\,dt,$$

где принято обозначение

$$f_0(t,p) = f(.,x_0+p,u_0) - f(.,x_0,u_0).$$

Согласно результатам, установленным ранее в разделе 4, оператор $F : \mathcal{H} = H_0^1(\Pi) \to \mathcal{H}^*$, определяемый формулой

$$F[p](\omega) = B[p, \omega] + \int\limits_{\Pi} f_0\big(t, p(t)\big)\, \omega(t)\, dt,$$

однозначно обратим на всем пространстве $\mathcal{H}^*$, причем обратный оператор F^{-1} удовлетворяет условию Липшица. Таким образом, существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|p\|_{\mathcal{H}} \leq C \left\| f(., x_0 + p, u_0 + \Delta u) - f(., x_0 + p, u_0) \right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что

$$\left\| f(., x, u_0 + \Delta u) - f(., x, u_0) \right\|_{L_2(\Pi)} \to 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta u\|_{L_r^s(\Pi)} \to 0 \tag{6.1}$$

равномерно по $x \in \Xi$, где

$$\Xi = \Big\{ x[v] : \quad v \in \mathcal{D} \Big\}$$

– трубка достижимости управляемой задачи (5.1). Как уже было отмечено в предыдущем разделе, имеет место оценка $\widehat{x} \leq x \leq \widetilde{x}$ для всех $x \in \Xi$.

Выберем произвольно последовательность $u_k \in \mathcal{D}$, $u_k \to u_0$, то есть $\Delta u_k = u_k - u_0 \to 0$ в норме $L_r^s(\Pi)$ при $k \to \infty$. Докажем, что

$$\sup_{x \in \Xi} \left\| f(., x, u_0 + \Delta u_k) - f(., x, u_0) \right\|_{L_2(\Pi)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{6.2}$$

Это будет означать, что выполнено (6.1).

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$. Примем обозначения

$$\overline{z}(t) = 2 \max \Big\{ \big| f(t, \xi, v) \big| : \quad \widehat{x}(t) \leq \xi \leq \widetilde{x}(t),\ |v| \leq u_*(t) \Big\};$$

$x_* = \max\big\{ |\widehat{x}|, |\widetilde{x}| \big\}$. Согласно лемме 6.1, найдутся функции $\overline{y} \in L_q(\Pi)$, $\overline{v} \in L_r(\Pi)$ такие, что

$$\widehat{x} \leq \overline{y} \leq \widetilde{x}, \quad |\overline{v}| \leq u_*, \quad \overline{z} = 2 \left| f(., \overline{y}, \overline{v}) \right|.$$

Отсюда, согласно определению класса $\mathbb{F}(\varphi, \psi)$, получаем, что $\overline{z} \in L_2(\Pi)$.

Согласно лемме 6.2, а также абсолютной непрерывности интеграла Лебега, найдется компакт $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$ такой, что

$$\int\limits_{\Pi\setminus\Pi_\varepsilon} \overline{z}^2(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4},$$

и на $\Pi_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s$ функция $f(t,\xi,u_0(t)+v)$ непрерывна, $t \in \Pi_\varepsilon$, $\xi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^s$.

Для $\nu \in \mathbb{N}$ обозначим $Q_\nu = \Big\{t \in \Pi : \ x_*(t) < \nu\Big\}$. Ясно, что система множеств $\{Q_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ упорядочена по вложению и при этом $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu = \Pi$. Поэтому $\operatorname{mes}(\Pi \setminus Q_\nu) \to 0$ при $\nu \to \infty$. Отсюда и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется номер $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Pi\setminus Q_\nu} \overline{z}^2(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $\nu \geq \nu_\varepsilon$.

По построению, функция $f(t,\xi,u_0(t)+v)$ непрерывна на компакте $\Pi_\varepsilon \times [-\nu_\varepsilon;\nu_\varepsilon] \times [-1;1]$. А согласно теореме Кантора [16, теорема 4.5.6, с.276], и равномерно непрерывна на нем. Поэтому найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Big|f(t,\xi,u_0(t)+v) - f(t,\xi,u_0(t))\Big| < \frac{\varepsilon}{4\operatorname{mes}\Pi}$$

для всех $t \in \Pi_\varepsilon$, $\xi \in [-\nu_\varepsilon;\nu_\varepsilon]$, $v \in [-1;1]$, $|v| \leq \delta(\varepsilon)$. Далее, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\delta(\varepsilon) < 1$. Определим множество

$$\Pi_{k,\varepsilon} = \Big\{t \in \Pi : \quad |\Delta u_k(t)| < \delta(\varepsilon)\Big\}.$$

Поскольку $\|\Delta u_k\|_{L_r^s} \to 0$ при $k \to \infty$, то имеет место сходимость по мере: $|\Delta u_k| \xrightarrow{\mu} 0$ при $k \to \infty$, см., например, [5, теорема VIII.6.1, с.224]. Следовательно, $\operatorname{mes}(\Pi \setminus \Pi_{k,\varepsilon}) \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется номер $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\Pi\setminus\Pi_{k,\varepsilon}} \overline{z}^2(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $k \geq k_\varepsilon$.

Обозначим $Q_{k,\epsilon} = Q_{\nu_\varepsilon} \cap \Pi_\varepsilon \cap \Pi_{k,\epsilon}$. Заметим, что $|x| \leq x_*$ для всех $x \in \Xi$. Поэтому, в силу произведенных построений, получаем:

$$\sup_{x\in\Xi} \int\limits_{\Pi\setminus Q_{k,\varepsilon}} \Big|f(t,x,u_0+\Delta u_k) - f(t,x,u_0)\Big|^2 dt \leq \int\limits_{\Pi\setminus Q_{k,\varepsilon}} \overline{z}^2(t)\,dt < \frac{3}{4}\,\varepsilon;$$

$$\sup_{x\in\Xi} \int\limits_{Q_{k,\varepsilon}} \Big|f(t,x,u_0+\Delta u_k) - f(t,x,u_0)\Big|^2 dt \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $k \geq k_\varepsilon$. Таким образом,

$$\sup_{x\in\Xi} \int\limits_{\Pi} \Big|f(t,x,u_0+\Delta u_k) - f(t,x,u_0)\Big|^2 dt < \varepsilon$$

для всех $k \geq k_\varepsilon$. Это означает, что выполнено (6.2). Теорема 6.1 доказана.

7. Доказательство основного результата

Лемма 7.1. *Пусть заданы векторы α, $\beta \in \mathbb{R}^{s\kappa}$, $\overline{w} \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$ и последовательность векторов $\{w[\ell]\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha;\beta]\big)$, $w[\ell] \to \overline{w}$ при $\ell \to \infty$. Тогда $\|v\{w[\ell]\} - v\{\overline{w}\}\|_{L_r^s} \to 0$ при $\ell \to \infty$.*

Доказательство. Действительно,

$$\|v\{w[\ell]\} - v\{\overline{w}\}\|_{L_r^s}^r = \sum_{k=1}^{\kappa} \int\limits_{\Pi_k} \big|w_{\cdot,k}[\ell] - \overline{w}_{\cdot,k}\big|^r dt \leq \operatorname{mes}\Pi \sum_{k=1}^{\kappa} \big|w_{\cdot,k}[\ell] - \overline{w}_{\cdot,k}\big|^r,$$

откуда ясно, что $\|v\{w[\ell]\} - v\{\overline{w}\}\|_{L_r^s} \to 0$ при $\ell \to \infty$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. В силу условий Φ_1), Φ_2) применима теорема 5.1, откуда получаем, что оператор $x^{(j)} = x^{(j)}[u]$ является выпуклым на множестве $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$. Поскольку множество $\mathcal{D}_j$ является поточечно ограниченным, применима также теорема 6.1, откуда получаем, что оператор $x^{(j)} = x^{(j)}[u]$ является непрерывным, а в силу (2.3) и ограниченным на множестве $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$. Отсюда и из условий $\mathbf{G}_1$), $\mathbf{G}_2$), а также леммы 3.2 получаем, что каждый из функционалов $J_j[\vec{u}]$ является ограниченным и непрерывным на множестве $\mathcal{D}$, а кроме того, вогнутым по «своей» переменной $u^{(j)} \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$.

Как уже было указано во введении, существует взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\mathcal{D}_j = \mathbb{V}\big(\pi, s, [\alpha^{(j)}; \beta^{(j)}]\big) \quad \text{и} \quad \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha^{(j)}; \beta^{(j)}]\big);$$

и ясно, что второе из них является выпуклым компактом, $j = \overline{1,\nu}$. Согласно лемме 7.1, функция $J_j\{w\} = J_j[v\{w\}]$, $j = \overline{1,\nu}$, непрерывна на выпуклом компакте $\mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big)$. Кроме того, поскольку функционал $J_j[u]$ является вогнутым по $u^{(j)} \in \mathcal{D}_j$, ясно, что функция $J_j\{w\}$ является вогнутой по $w^{(j)}$, $j = \overline{1,\nu}$. Тогда, опираясь стандартным образом (см., например, [4, приложение 2]) на теорему Какутани [8, теорема XVI.5.1, с.638], нетрудно доказать существование вектора

$$\overline{w} \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big) = \prod_{j=1}^{\nu} \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha^{(j)}; \beta^{(j)}]\big)$$

такого, что

$$J_j(u = v\{\overline{w}\}) \geq J_j(u^{(i)} = v^{(i)}\{\overline{w}[i]\}, \, i \neq j; u^{(j)} = v^{(j)}\{w^{(j)}\}), \quad j = \overline{1,\nu},$$

для всех $w \in \mathbb{W}\big(\pi, s, [\alpha; \beta]\big)$. Обозначим $\overline{u} = v\{\overline{w}\} \in \mathcal{D}$. Тогда

$$J_j[\overline{u}] \geq J_j[\overline{u}^{(i)}, \, i \neq j; u^{(j)} = v^{(j)}], \quad j = \overline{1,\nu},$$

для всех $v \in \mathcal{D}$. Теорема 2.1 доказана.

8. О методе отсечений для поиска седловых точек вогнуто-выпуклых функций

Прежде всего, напомним идею *метода отсечений*[4] для минимизации выпуклых дифференцируемых функций многих переменных [12]. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, $f : X \to \mathbb{R}$ – выпуклая дифференцируемая функция. Пусть $\overline{x} \in X$ – точка минимума функции f, $x_k \in X$ – текущая точка. Ясно, что

$$0 \geq f(\overline{x}) - f(x_k) \geq \big(\nabla f(x_k), \overline{x} - x_k\big).$$

Таким образом, множество всех $x \in X$, для которых

$$\big(\nabla f(x_k), x - x_k\big) > 0,$$

---

[4]Для лучшего понимания идеи метода можно было бы назвать его методом пространственной дихотомии.

можно выбросить из рассмотрения, то есть отсечь и перейти к более узкому выпуклому компакту, содержащему точку минимума. Для того, чтобы отсечение было эффективным, в качестве текущей точки обычно выбирают центр тяжести (геометрический центр) текущего множества, либо (при практической реализации) вписанного или описанного около него шара, эллипсоида или многогранника (симплекса). В результате метод обретает геометрическую скорость сходимости, что делает его весьма эффективным. Существуют обобщения этого метода и на недифференцируемые выпуклые функции, см., например, [25]. Следует упомянуть, что и по сей день метод продолжает развиваться в различных направлениях, и в частности, в направлении повышения эффективности процедуры поиска центра тяжести текущего множества, см., например, [1,2,15].

Далее мы представим некоторые соображения, которые позволяют распространить метод отсечений и на задачи поиска седловых точек вогнуто-выпуклых функций многих переменных. Итак, пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ – выпуклые компакты, $f(x,y) : X \times Y \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, вогнутая по $x \in X$ и выпуклая по $y \in Y$. Такая функция, как известно, обладает седловой точкой $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ (дифференцируемости для этого не требуется, достаточно непрерывности), см., например, [7, теорема 1.5.6, с.44].

Определим функцию

$$\varphi(y) = f\big(M(y), y\big) = \max_{x \in X} f(x,y),$$

где

$$M(y) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} f(x,y).$$

Справедлива следующая теорема Данскина–Демьянова, см., например, [7, теорема 1.5.3, с.42].

Лемма 8.1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна вместе с производной $f'_y(x,y)$ на $X \times \operatorname{int} Y$. Тогда $\varphi(y)$ имеет в любой точке $y \in \operatorname{int} Y$ производную по любому направлению $h \in \mathbb{R}^m$, $|h| = 1$, причем*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \max_{x \in M(y)} \big(f'_y(x,y), h\big). \tag{8.1}$$

Отметим, что о выпуклости-вогнутости в лемме 8.1 речь не идет. С другой стороны, при наших предположениях функция $\varphi(y)$ будет выпуклой [7, теорема 1.5.2, с.41], а выпуклая функция имеет конечную или равную $-\infty$ производную по любому возможному направлению. Тем не менее, в соответствии с леммой 8.1 будем предполагать, что $\operatorname{int} Y \neq \emptyset$ и существует непрерывная производная $f'_y(x,y)$, поскольку нам понадобится формула (8.1).

Предположим, что $\forall y_k \in \operatorname{int} Y$ мы умеем находить хотя бы одну точку $x(y_k) \in M(y_k)$ – это можно сделать методом отсечений, поскольку функция $-f(x,y_k)$ выпукла на X. Кроме того, ясно, что если $(\overline{x},\overline{y})$ – седловая точка функции $f(x,y)$, то и точка $\big(x(\overline{y}),\overline{y}\big)$ тоже седловая, причем $\overline{y}$ можно найти как точку минимума функции $\varphi(y)$. Таким образом, задача сводится к отысканию точки минимума функции $\varphi(y)$. Но функция $\varphi(y)$ тоже является выпуклой, поэтому и ее можно минимизировать методом отсечений. Проблема тут лишь с вычислением градиента этой функции. Но проблема снимается с помощью леммы 8.1. Сделать это можно следующим образом.

Для текущей точки $y_k \in \operatorname{int} Y$ находим $x(y_k)$ и вычисляем производную $f'_y\big(x(y_k),y_k\big)$. Поскольку $\overline{y}$ – точка минимума функции $\varphi(y)$, то она же является и точкой минимума вдоль направления $h=\overline{y}-y_k$, а стало быть,

$$\frac{\partial\varphi(y_k)}{\partial h} = \max_{x\in M(y_k)} \big(f'_y(x,y_k),\overline{y}-y_k\big) \le 0,$$

так как

$$0 \ge \varphi(\overline{y})-\varphi(y_k) \ge \frac{\partial\varphi(y_k)}{\partial h}.$$

Но в таком случае

$$\Big(f'_y\big(x(y_k),y_k\big),\overline{y}-y_k\Big) \le \max_{x\in M(y_k)} \big(f'_y(x,y_k),\overline{y}-y_k\big) \le 0.$$

Следовательно, все точки $y\in Y$, для которых

$$\Big(f'_y\big(x(y_k),y_k\big),y-y_k\Big) > 0,$$

можно отсечь, так как среди них нет искомой точки $\overline{y}$. Остается отметить, что в случае

$$\Big(f'_y\big(x(y_k),y_k\big),y-y_k\Big) \ge 0 \quad \forall y\in Y$$

у нас получится и $\dfrac{\partial\varphi(y_k)}{\partial h} \ge 0$ по любому возможному направлению h в силу формулы (8.1), а это будет означать, что $y_k=\overline{y}$.

Замечание 8.1. В [7, глава II, § 6] можно найти другие численные методы отыскания седловых точек функций многих переменных (включая необходимое теоретическое обоснование). В [7, глава VI, § 8] описывается их применение к численному решению дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болдырев В.И. *Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления* // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2004. № 1. С. 28–123.

2. Бузинов А.А. *Методы отсечений в линейном оптимальном быстродействии.* Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ярославль: ЯрГУ, 2000. М.: Наука, 1985.

3. Воробьев А.Х. *Диффузионные задачи в химической кинетике.* М.: МГУ, 2003.

4. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков.* М.: Наука, 1985.

5. Вулих Б.З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1965.

6. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989.

7. Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* М.: Наука, 1982.

8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1984.

9. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. *Уравнения математической физики. Дополнительные главы.* Казань: КГУ, 2012.

10. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: ГИТТЛ, 1956.

11. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973.

12. Левин А.Ю. *Об одном алгоритме минимизации выпуклых функций* // Докл. АН СССР. 1965. Т.160. № 6. С. 1244–1247.

13. Лобанов А.И. *Математические модели биологических систем, описываемые уравнениями «реакция-диффузия» и «реакция-диффузия-конвекция». Дис. ... докт. ф.-м. н.*. М.: МФТИ, 2001.

14. Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* М.: Наука, 1988.

15. Ненахов Э.И. *Об одном алгоритме отыскания решений системы линейных неравенств* // Теорія оптимальних рішень. 2005. № 4. С. 42–48.

16. Пугачев В.С. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Изд-во МАИ, 1996.

17. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М.: Мир, 1979.

18. Чернов А.В. *О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве* // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.

19. Чернов А.В. *Об ε-равновесии в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками* // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С.316-328.

20. Чернов А.В. *Об одном подходе к построению ε-равновесия в бескоалиционных играх, связанных с уравнениями математической физики, управляемых многими игроками* // Матем. теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. Вып. 1. С. 104–123.

21. Чернов А.В. *О существовании ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с эллиптическими уравнениями, управляемыми многими игроками* // Матем. теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6. Вып. 1. С. 91–115.

22. Чернов А.В. *О сходимости метода условного градиента в задаче оптимизации эллиптического уравнения* // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 213–228.

23. Чернов А.В. *О кусочно постоянной аппроксимации в распределенных задачах оптимизации* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 264–279.

24. Чуличков А.Л., Николаев А.В., Лобанов А.И., Гурия Г.Т. *Пороговая активация свертывания крови и рост тромба в условиях кровотока. Теоретический анализ* // Матем. моделирование. 2000. Т.12. № 3. С.75-96.

25. Шор Н.З. *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1979.

26. Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications.* Providence, R.I.: American mathematical society, 2010.

27. Zeidler E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* II. N.Y.: Springer, 1990.

ON EXISTENCE OF THE NASH EQUILIBRIUM IN A DIFFERENTIAL GAME ASSOCIATED WITH ELLIPTIC EQUATIONS: THE MONOTONE CASE

Andrey V. Chernov, Nizhnii Novgorod State University; Nizhnii Novgorod State Technical University, Cand.Sc., associate professor (chavnn@mail.ru).

Abstract: This work continues investigations concerning the problem of conditions sufficient for existence of the Nash equilibrium in noncooperative n-person games associated with semilinear elliptic partial differential equations of the second order. Unlike the previous author's paper having been published on this subject, now the controls may be present explicitly in integrands of the cost functionals. Moreover, the requirements to right-hand sides of equations are distinguished. Lastly, now it is used another on principle method of proving which is based (rather than on the convexity of reachable sets) on establishing convex character of dependence of the state on the control for each equation at the expense of convexity of the right-hand side with respect to the pair state–control and also of the requirements providing with the monotonicity of the nonlinear resolving operator. As an auxiliary results of a specific interest we prove theorems concerning comparison of solutions to semilinear elliptic equations and continuous character of dependence of the state on the control.

Keywords: noncooperative n-person game, Nash equilibrium, semilinear elliptic PDEs of the second order.