Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.3, с. 79–111

УДК 519.711.7
ББК 22.1

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОБРАЩЕНИЯ К 2-СЕРВЕРНОЙ СИСТЕМЕ С ПОТЕРЯМИ И СЛУЧАЙНЫМ ДОСТУПОМ

Юлия В. Чиркова*
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: julia@krc.karelia.ru

В работе исследуется 2-серверная система обслуживания с потерями, которая принимает запросы на интервале времени $[0, T]$. Пользователи отправляют свои запросы в систему, которая случайным образом с известной пользователям вероятностью перенаправляет их на один из двух серверов. Для данной системы рассматривается некооперативная игра, в которой стратегией игрока является момент времени обращения к системе обслуживания и выигрышем является вероятность, что его запрос получит обслуживание. В качестве критерия оптимальности используется симметричное равновесие по Нэшу. Для данной игры рассматриваются две модели. В первой число игроков фиксировано, во второй является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Для обоих случаев доказано существование единственного симметричного равновесия и проведены численные эксперименты для сравнения равновесий при различных значениях параметров модели.

* Работа выполняется в рамках проекта «Задачи оптимального распределения ресурсов и защиты информации в высокопроизводительных вычислительных системах и сетях» по программе фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», а также поддержана грантами РФФИ №13-01-00033_а и РГНФ №15-02-00352.

Ключевые слова: система обслуживания, оптимальные поступления, равновесие по Нэшу.

1. Введение

С развитием информационных технологий активно разрабатывается теория очередей (queueing theory) в применении к анализу работы вычислительных сетей. Один из классов задач данного направления связан с управлением загруженностью множества серверов, которые рассматриваются как система массового обслуживания, обрабатывающая поток пользовательских заявок. В зависимости от назначения и условий работы система может обрабатывать одновременно один или несколько запросов на обслуживание, может иметь одну или несколько очередей, или же терять запросы в случае занятости системы. Теоретико-игровой подход позволяет рассматривать такую задачу как игру, в которой участники действуют эгоистично и могут достигать некоторого равновесного состояния, когда никому не выгодно отклоняться от выбранной стратегии. В работах [1, 9, 10, 14, 15] исследуются модели, в которых дисциплина поступления запросов в систему определяется стратегиями игроков, при этом в [1, 14, 15] игроки стремятся максимизировать вероятность получения обслуживания, а в [9, 10] критерием оптимальности является минимизация времени ожидания запросов в очереди на обслуживание. В моделях [3, 4, 6, 7] дисциплина поступления запросов задается сверху, а в качестве стратегии рассматривается схема выбора одной из очередей. В работах [5, 8] рассматриваются модели, в которых пользователь, зная длину очереди на обслуживание на мощном сервере общего доступа, решает, отправлять ли свою запрос в очередь или выполнить его на своей рабочей станции, стремясь минимизировать временные затраты.

Данная работа представляет вероятностное расширение безбуферного варианта модели, исследуемой в работах [14, 15]. На заданном временном интервале в систему поступают запросы и принимаются на обслуживание при наличии свободных мест. В системе имеется два обслуживающих сервера с идентичной функциональностью и, возможно, различной производительностью. Когда пользователь обращается к системе, он случайным образом перенаправляется на один из серверов, на котором запрос либо принимается на обслуживание, либо теряется. Примером организации случайного доступа в Internet является использование циклического алгоритма (round robin [11, 12]) в DNS-системе для распределения нагрузки между несколькими серверами, которые предоставляют некоторый Web-сервис. В этом случае разные пользователи получают разные IP адреса при обращении к домену. В простейшем случае IP адреса выдаются по очереди (сначала первый, потом — второй и т.п.), в более общем каждый адрес выдается с определенной вероятностью. Кроме задач распределения нагрузки между Web-ресурсами данная модель может найти приложение в задачах оптимизации облачных вычислений [13], работы call-центров [2] и т.п.

Для данной системы рассматривается некооперативная игра, в которой чистой стратегией игрока является момент времени обращения к системе обслуживания и смешанной – распределение моментов таких обращений. Выигрышем является вероятность, что его запрос получит обслуживание. В качестве критерия оптимальности используется симметричное равновесие по Нэшу. Для данной игры рассматриваются две модели. В первой число игроков фиксировано, во второй является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Для обоих случаев доказано существование единственного симметричного равновесия и предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий. Данные алгоритмы положены в основу реализации программной системы, позволяющей графически представлять равновесные стратегии при различных значениях параметров модели для их визуального сравнения. Для случая двух игроков аналитически найден вид равновесия.

2. Модель

2.1. Система обслуживания

Рассмотрим систему массового обслуживания с 2 серверами, которая принимает запросы от пользователей на интервале времени $[0, T]$. При обращении пользователя к системе его запрос с вероятностью r направляется на первый сервер и с вероятностью $\overline{r} = 1 - r$ на второй.

Каждый из серверов системы способен обслуживать не более одного запроса одновременно. Времена обслуживания запросов – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с интенсивностями μ_1 и μ_2 на первом и втором серверах соответственно.

В системе отсутствует какая-либо очередь. Если запрос поступает в систему и направляется на сервер, на котором в данный момент уже выполняется другой запрос, то данный запрос теряется и не обслуживается.

Возможна ситуация, когда несколько пользователей обращаются в систему в одно и то же время. Тогда система может направить на один сервер больше одного запроса. Если он в данный момент занят, все поступившие в данный момент на него запросы теряются. Если же он свободен, то тот запрос, который получит обслуживание, выбирается из числа всех поступивших одновременно на данный сервер запросов равновероятным образом.

Дисциплина поступления запросов в систему не задана. Она определяется пользователями системы, стремящимися максимизировать вероятность получения получения обслуживания для своих запросов.

2.2. Игра

Рассмотрим задачу определения оптимальной дисциплины поступления запросов в систему как некооперативную игру. Игроками являются пользователи системы, отправляющие запросы на обслуживание. Множество игроков обозначим $\mathbb{N}$. Каждый игрок выбирает момент времени для обращения к системе, стремясь максимизировать вероятность получения обслуживания для своего запроса. Чистой стратегией игрока i является выбранный им момент времени t_i обращения к системе. Смешанная стратегия игрока i – функция распределения $F_i(t)$ моментов обращения к системе на интервале $[0, T]$. Профиль стратегий обозначим $F = \{F_i(t), i \in \mathbb{N}\}$. Выигрышем игрока в момент t является вероятность получения обслуживания при обращении к системе в момент t.

Все игроки одинаковы, независимы, и действуют эгоистично, без кооперации, поэтому в качестве критерия оптимальности рассматривается симметричное равновесие по Нэшу. В этом случае все стратегии игроков одинаковы: $F_i(t) = F(t)$ для всех i.

Определение 2.1. *Функция распределения $F(t)$ моментов обращения к системе t является симметричным равновесием по Нэшу, если существует константа C, такая что в любой момент $t \in [0, T]$ вероятность получения обслуживания не более C и равна C на носителе $F(t)$.*

Задача рассматривается для двух случаев. В первом количество игроков фиксировано и известно каждому игроку. Во втором каждый игрок знает, что количество противников имеет распределение Пуассона с известным параметром. В обоих случаях, как и в работе [15], симметричное равновесие по Нэшу существует и единственно, а его структура обладает следующими свойствами.

Лемма 2.1. *Носитель стратегии в равновесии содержит атом в точке $t = 0$, то есть равновесная вероятность $p_e = F(0)$ обращения в начальный нулевой момент времени строго положительна. Далее имеется интервал времени $(0, t_e)$, на котором нет обращений к системе.*

Доказательство. Положительность вероятности обращения в систему в нулевой момент времени обусловлена тем, что если бы никто не обращался в систему в этот момент, то при обращении к системе в нулевой момент времени любой отклонившийся от равновесия игрок получал бы обслуживание с вероятностью 1.

Леммы 3.3 и 4.3 для случаев фиксированного и имеющего распределение Пуассона числа игроков показывают, что некоторое время после нулевого момента выигрыш игрока, возрастая по времени, остается меньше, чем в нулевой момент, даже если известно, что в это время никто не обращается в систему. Этим объясняется наличие интервала времени без обращений после нулевого момента времени. На этом интервале значение выигрыша возрастает до уровня равновесного в момент t_e, до которого обращений в систему нет. □

Таким образом, в носителе равновесной стратегии существует область разрыва $(0, t_e)$. Эта область возникает по причине того, что в нулевой момент времени, когда система изначально свободна, возможно поступление в систему нескольких обращений одновременно и вероятность выиграть в розыгрыше мест обслуживания в этот момент выше, чем вероятность получить обслуживание сразу после него, когда система с достаточно большой вероятностью оказывается занята.

Лемма 2.2. *Если $t_e < T$, то с момента t_e до конца T существует строго положительная плотность распределения моментов обращения к системе $f(t) > 0$. Данный интервал не содержит атомов и разрывов.*

Доказательство. Рассмотрим интервал $[t_e, T]$, на котором возобновляются обращения в систему. Покажем, что равновесная плотность распределения моментов обращения в систему на всем интервале строго положительна. Пусть, наоборот, на интервале $[t_e, T]$ существует некоторая область (s_1, s_2), на которой обращений в систему нет. Пусть $p_{ij}(t)$ – вероятность состояния (i, j) системы в момент t, где $i, j \in \{0, 1\}$ обозначают состояния занятости (0 – свободен, 1 – занят) первого и второго серверов соответственно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент s_1 равна

$$p_{00}(s_1) + rp_{01}(s_1) + \overline{r}p_{10}(s_1).$$

С учетом того, что на (s_1, s_2) нет поступлений, выигрыш в момент s_2 равен

$$\begin{aligned}
&p_{00}(s_2) + rp_{01}(s_2) + \overline{r}p_{10}(s_2) = \\
&= p_{00}(s_1) + p_{10}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2 - s_1)}) + p_{01}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2 - s_1)}) + \\
&\qquad + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2 - s_1)})(1 - e^{-\mu_2(s_2 - s_1)}) + \\
&\qquad + r(p_{01}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_1(s_2 - s_1)})) + \\
&\qquad + \overline{r}(p_{10}(s_1) + p_{11}(s_1)(1 - e^{-\mu_2(s_2 - s_1)})),
\end{aligned}$$

что больше выигрыша в момент s_1. Следовательно, в равновесии таких разрывов в носителе стратегии после момента t_e не может быть.

Покажем, что после момента t_e носитель стратегии не содержит атомов. Пусть такой атом есть в точке $t \in [t_e, T]$ и вероятность обращения игрока в момент t строго положительна и равна p. Пусть момент $s = t-$ перед моментом t и бесконечно близкий к нему, такой, что вероятности ухода обслуженных и поступления новых заявок между этими моментами равны нулю. Рассмотрим некоторого игрока, который пытается обратиться в систему в момент t, зная, что остальные обращаются в этот же момент с вероятностью p. Пусть случайная величина X_p обозначает число его противников, обратившихся в систему в момент времени t. Пусть также Y_{pr} – количество игроков, попавших на первый сервер из числа X_p. Так как вероятность p строго положительна, то и математическое ожидание данных случайных величин должно быть положительно. Тогда вероятность получения обслуживания в момент времени t равна

$$E\left(\frac{r(p_{00}(t)+p_{01}(t))}{Y_{pr}+1}+\frac{\overline{r}(p_{00}(t)+p_{10}(t))}{X_p-Y_{pr}+1}\right)=$$
$$=r(p_{00}(s)+p_{01}(s))E\frac{1}{Y_{pr}+1}+\overline{r}(p_{00}(s)+p_{10}(s))E\frac{1}{X_p-Y_{pr}+1},$$

что меньше выигрыша в момент s, равного

$$r(p_{00}(s)+p_{01}(s))+\overline{r}(p_{00}(s)+p_{10}(s)).$$

То есть в случае, если в распределении обращений в систему после момента t_e есть атом, всегда лучше обратиться в систему непосредственно до него. В отличие от нулевого момента времени, когда система изначально свободна и игроку нужно только выиграть розыгрыш мест для получения обслуживания, здесь сервера могут быть уже заняты, и розыгрыш мест на обслуживание дополнительно снижает вероятность получения обслуживания. □

3. Фиксированное число игроков

Обозначим $N+1$ количество игроков, которые отправляют запросы в систему. У каждого из них N противников, которые могут помешать ему получить обслуживание своего запроса. Пусть с вероятностью p каждый из N противников обращается к системе в момент времени $t=0$. Случайная величина X_p – число игроков, обратившихся к серверу в нулевой момент времени. Пусть также Y_{pr} – количество игроков, попавших на первый сервер из числа X_p. Тогда вероятность получения обслуживания в нулевой момент времени равна

$$C(p)=E\left(\frac{r}{Y_{pr}+1}+\frac{\overline{r}}{X_p-Y_{pr}+1}\right).$$

Заметим, что в случае фиксированного числа игроков случайная величина X_p имеет биномиальное распределение $Bin(N,p)$, а Y_{pr} для каждого значения X_p имеет биномиальное распределение $Bin(X_p, r)$. Тогда выигрыш в нулевой момент времени равен

$$C(p) = \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \left[\sum_{j=0}^{i} C_i^j r^j \overline{r}^{i-j} \left(\frac{r}{j+1} + \frac{\overline{r}}{i-j+1} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Преобразуем первую половину части выражения (3.1), заключенной в квадратных скобках

$$\sum_{j=0}^{i} C_i^j r^j \overline{r}^{i-j} \tfrac{r}{j+1} = \overline{r}^{i+1} \sum_{j=0}^{i} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{j+1} \tfrac{i!}{(j+1)!(i-j)!} =$$
$$= \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \sum_{j=0}^{i} C_{i+1}^{j+1} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{j+1} = \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} C_{i+1}^{k} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{k} =$$
$$= \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \left(\sum_{k=0}^{i+1} C_{i+1}^{k} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{k} - C_{i+1}^0 \right) = \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \left(\left(1 + \tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{i+1} - 1 \right) = \tfrac{1-\overline{r}^{i+1}}{i+1}.$$

Аналогично преобразуем вторую половину

$$\sum_{j=0}^{i} C_i^j r^j \overline{r}^{i-j} \tfrac{\overline{r}}{i-j+1} = \overline{r}^{i+1} \sum_{j=0}^{i} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{j} \tfrac{i!}{j!(i-j+1)!} =$$
$$= \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \sum_{j=0}^{i} C_{i+1}^{j} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{j} = \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} C_{i+1}^{k} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{k} =$$
$$= \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \left(\sum_{j=0}^{i+1} C_{i+1}^{j} \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{j} - C_{i+1}^{i+1} \tfrac{r}{\overline{r}}^{i+1} \right) = \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} \left(\tfrac{1}{\overline{r}^{i+1}} - \left(\tfrac{r}{\overline{r}}\right)^{i+1} \right) = \tfrac{1-r^{i+1}}{i+1}.$$

Тогда выражение (3.1) преобразуется следующим образом

$$C(p) = \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \tfrac{2-r^{i+1}-\overline{r}^{i+1}}{i+1} =$$
$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \tfrac{2}{i+1} + \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \tfrac{r^{i+1}}{i+1} + \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \tfrac{\overline{r}^{i+1}}{i+1}.$$

Первое слагаемое равно

$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \frac{2}{i+1} = \frac{1-(1-p)^{N+1}}{p(N+1)}.$$

Преобразуем второе

$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \tfrac{r^{i+1}}{i+1} = \tfrac{(1-p)^{N+1}}{p(N+1)} \sum_{i=0}^{N} C_{N+1}^{i+1} \left(\tfrac{pr}{1-p}\right)^{i+1} =$$
$$= \tfrac{(1-p)^{N+1}}{p(N+1)} \left(\left(1 + \tfrac{pr}{1-p}\right)^{N+1} - 1 \right) = \tfrac{(1-p\overline{r})^{N+1} - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)}.$$

Аналогично третье равно

$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \frac{\overline{r}^{i+1}}{i+1} = \frac{(1-pr)^{N+1} - (1-p)^{N+1}}{p(N+1)}.$$

Тогда выигрыш в момент времени $t = 0$ равен

$$C(p) = \frac{2 - (1-pr)^{N+1} - (1-p\overline{r})^{N+1}}{p(N+1)}. \tag{3.2}$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент $t > 0$ при условии, что вероятности обращений к системе на интервале $(0, t)$ равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned}
&1 - rP(Y_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}P(X_p - Y_{pr} \geq 1)e^{-\mu_2 t} = \\
&= 1 - r\left(1 - P(Y_{pr} = 0)\right) e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1 - P(X_p - Y_{pr} = 0)\right) e^{-\mu_2 t} = \\
&= 1 - r\left(1 - \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \overline{r}^i)\right) e^{-\mu_1 t} - \\
&\qquad - \overline{r}\left(1 - \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} r^i\right) e^{-\mu_2 t} = \\
&= 1 - r\left(1 - (1-pr)^N\right) e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1 - (1-p\overline{r})^N\right) e^{-\mu_2 t}.
\end{aligned}$$

Заметим, что данная вероятность возрастает по t. Покажем теперь, что ее значение в точке $t = 0+$, бесконечно близкой к нулю, меньше вероятности обслужиться в нулевой момент времени. Для доказательства потребуется следующий технический результат.

Лемма 3.1. *Для любых натуральных $N > 1$ и действительных $0 < r \leq 1$ функция $g(p) = \frac{1-(1-pr)^N}{p}$ убывает по аргументу p на всем интервале $p \in (0, 1]$.*

Доказательство. Для $N = 2$ производная $g'(p) = -r^2 < 0$. Пусть для $N = k$ производная $g'(p) = \frac{kpr(1-pr)^{k-1} - 1 + (1-pr)^k}{p^2}$ меньше нуля. Покажем, что тогда для $N = k+1$ производная $g'(p)$ также меньше нуля.

$$\begin{aligned}
&g'(p) = \tfrac{(k+1)pr(1-pr)^k - 1 + (1-pr)^{k+1}}{p^2} = \\
&= \tfrac{(1-pr)(kpr(1-pr)^{k-1} - 1 + (1-pr)^k) + pr(1-pr)^k - 1 + (1-pr)}{p^2} = \\
&= \tfrac{(1-pr)(kpr(1-pr)^{k-1} - 1 + (1-pr)^k) + pr(1-pr)^k - pr}{p^2} < 0.
\end{aligned}$$

□

Лемма 3.2. *Для любых натуральных $N > 0$ и действительных $0 < r \leq 1$ и $0 < p \leq 1$ справедливо* $r(1-pr)^N < \frac{1-(1-pr)^{N+1}}{p(N+1)}$.

Доказательство. По лемме 3.1 значение выражения $\frac{(N+1)pr(1-pr)^N-(1-(1-pr)^{N+1})}{p^2}$ отрицательно, как производная убывающей по p функции $\frac{1-(1-pr)^{N+1}}{p}$. □

Пусть игрок обращается к системе в момент после $t = 0$, но бесконечно близкий к нему, когда для каждого из поступивших в нулевой момент уже определен обслуживающий сервер или необходимость покинуть систему без обслуживания, но еще ни одна заявка не успела обслужиться и ни один новый игрок не поступил в систему. Эта вероятность равна

$$\lim_{t \to 0+} 1 - r\left(1-(1-pr)^N\right)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1-(1-p\overline{r})^N\right)e^{-\mu_2 t} = \\ = r(1-pr)^N + \overline{r}(1-p\overline{r})^N.$$

Согласно лемме 3.2, значение данного выражения меньше значения выражения (3.2). Это означает, что лучше обратиться в систему в нулевой момент времени, чем в бесконечно близкий к нулю, но после него. То есть, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. *В случае фиксированного числа игроков выигрыш игрока в момент времени* 0 *строго больше выигрыша в момент* $0+$. *Выигрыш игрока возрастает по времени на интервале* $(0, t)$*, если на нем игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью.*

Пусть известна равновесная вероятность обращения к системе в нулевой момент времени и равна $0 < p_e \leq 1$. Вероятность получить обслуживание в момент $t > 0$ при отсутствии обращений на интервале $(0, t)$ возрастает по t и стремится к 1. В момент $t = 0+$ она меньше, чем вероятность получить обслуживание в нулевой момент. Значит, существует момент (возможно, после момента T), когда эти вероятности равны. То есть для заданного значения равновесной вероятности обращения в нулевой момент времени уравнение

$$\frac{2-(1-p_e r)^{N+1}-(1-p_e\overline{r})^{N+1}}{p_e(N+1)} = \\ = 1 - r\left(1-(1-p_e r)^N\right)e^{-\mu_1 t_e} - \overline{r}\left(1-(1-p_e\overline{r})^N\right)e^{-\mu_2 t_e} \quad (3.3)$$

дает соответствующее значение момента времени $t_e > 0$, до которого в равновесии игроки обращаются к системе с нулевой вероятностью.

Лемма 3.4. *Для любых натуральных $N > 0$, действительных $0 \le r \le 1$, $0 < p_e \le 1$ и $\mu_1, \mu_2 > 0$ уравнение (3.3) задает строго убывающую неявную функцию $t_e(p_e)$.*

Доказательство. Так как $p > 0$, разделим уравнение (3.3) на p, получим равносильное уравнение $G(p_e, t_e) = 0$, где

$$G(p_e, t_e) = \frac{\frac{2-(1-p_e r)^{N+1}-(1-p_e\overline{r})^{N+1}}{p_e(N+1)} - 1}{p_e} + \\ + \frac{r\left(1-(1-p_e r)^N\right)}{p_e}e^{-\mu_1 t_e} + \frac{\overline{r}\left(1-(1-p_e\overline{r})^N\right)}{p_e}e^{-\mu_2 t_e}.$$

Для любого натурального $N > 0$ $G(p_e, t_e)$ является убывающей по p_e функцией, так как ее слагаемые либо равны 0 при $N = 0$, либо строго убывают по лемме 3.1. Кроме того, $G(p_e, t_e)$ убывает по t_e. Тогда $t_e'(p_e) = -\frac{\partial G}{\partial p_e}/\frac{\partial G}{\partial t_e} < 0$. □

Согласно лемме 3.4, чем больше вероятность p_e обращения к системе в нулевой момент, тем раньше начинается интервал $[t_e, T]$, на котором возобновляются обращения к системе с положительной вероятностью. Кроме того, заметим, что значение t_e для заданного p_e может быть превышать T. В этом случае при поиске равновесия нужно увеличивать значение p_e. Если же $t_e(1) \ge T$, то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент $t = 0$ с вероятностью 1. Далее будем считать, что $t_e(1) < T$.

Необходимо найти равновесную плотность $f(t)$ распределения моментов обращения к системе на интервале $[t_e, T]$. Определим Марковский процесс с состояниями системы (i, j, k) в каждый момент времени $t \in [t_e, T]$, где $i, j \in \{0, 1\}$ – состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят), $k \in \{0, \dots, N\}$ – число игроков, обратившихся в систему до момента t. Данный процесс неоднороден по времени, так как интенсивность поступлений запросов в систему скачком уменьшается с каждым обращением очередного игрока в систему и равна $\lambda_k(t) = (N-k)\frac{f(t)}{1-F(t)}$. Система Колмогорова для вероятностей состояний системы p_{ijk} выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&p'_{000}(t) = -\lambda_0(t)p_{000}(t),\\
&p'_{101}(t) = r\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t)+\mu_1)p_{101}(t),\\
&p'_{011}(t) = \overline{r}\lambda_0(t)p_{000}(t) - (\lambda_1(t)+\mu_2)p_{011}(t),\\
&p'_{00i}(t) = -\lambda_i(t)p_{00i}(t) + \mu_1 p_{10i}(t) + \mu_2 p_{01i}(t),\\
&p'_{10i}(t) = r\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t)+p_{10i-1}(t)) - (\lambda_i(t)+\mu_1)p_{10i}(t) + \mu_2 p_{11i}(t),\\
&p'_{01i}(t) = \overline{r}\lambda_{i-1}(t)(p_{00i-1}(t)+p_{01i-1}(t)) - (\lambda_i(t)+\mu_2)p_{01i}(t) + \mu_1 p_{11i}(t),\\
&p'_{11i}(t) = \lambda_{i-1}(t)(rp_{01i-1}(t)+\overline{r}p_{10i-1}(t)+p_{11i-1}(t)) - (\mu_1+\mu_2)p_{11i}(t),\\
&\qquad i = 2,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Вероятность получить обслуживание в момент $t \in [t_e, T]$ в равновесии постоянна для всех $t \in [t_e, T]$:

$$
\sum_{i=0}^{N} p_{00i}(t) + r\sum_{i=1}^{N} p_{01i}(t) + \overline{r}\sum_{i=1}^{N} p_{10i}(t) = C(p_e).
$$

Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (3.4), получаем дифференциальное уравнение для определения равновесной плотности

$$
\frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{r\mu_1\left(\sum\limits_{i=1}^{N} p_{10i}(t) + \sum\limits_{i=2}^{N} p_{11i}(t)\right) + \overline{r}\mu_2\left(\sum\limits_{i=1}^{N} p_{01i}(t) + \sum\limits_{i=2}^{N} p_{11i}(t)\right)}{\sum\limits_{i=0}^{N-1}(N-i)(r^2(p_{00i}(t)+p_{01i}(t)) + \overline{r}^2(p_{00i}(t)+p_{10i}(t))} \tag{3.5}
$$

для $t \in [t_e, T]$.

Носитель равновесного распределения моментов обращений в систему находится на интервале $[0, T]$, поэтому должно выполняться $F(T) = 1$. Это создает неопределенность в уравнении (3.5) в точке $t = T$, принадлежащей интервалу, на котором обращения в систему определяются положительной плотностью распределения. Преобразуем уравнение (3.5) для получения равновесного распределения, чтобы исключить из него множитель $1 - F(t)$.

Обозначим T_i моменты обращений игроков $i \in \{1,\ldots,N\}$, независимые и одинаково распределенные согласно функции F. Пусть $A(t)$ – число обращений в систему до момента t и $B_N^s(t) \in \{0,1\}$ – состояния занятости сервера s в момент t (0 – свободен, 1 – занят).

Знаменатель правой части в уравнении (3.5) можно преобразовать как

$$
\begin{aligned}
&N\sum_{i=0}^{N}(r^2(p_{00i}(t)+p_{01i}(t))+\overline{r}^2(p_{00i}(t)+p_{10i}(t)))-\\
&-\sum_{i=0}^{N}i(r^2(p_{00i}(t)+p_{01i}(t))+\overline{r}^2(p_{00i}(t)+p_{10i}(t)))=\\
&=N(r^2P(B_N^1(t)=0)+\overline{r}^2P(B_N^2(t)=0))-\\
&\qquad-(r^2E(A(t)\mathbb{1}_{B_N^1(t)=0})+\overline{r}^2E(A(t)\mathbb{1}_{B_N^2(t)=0})).
\end{aligned}
$$

Преобразуем вычитаемое

$$
\begin{aligned}
\phi(t)&=r^2E(A(t)\mathbb{1}_{B_N^1(t)=0})+\overline{r}^2E(A(t)\mathbb{1}_{B_N^2(t)=0})=\\
&=r^2E\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{B_N^1(t)=0,T_i\le t}+\overline{r}^2E\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{B_N^2(t)=0,T_i\le t}=\\
&=r^2E\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{B_N^1(t)=0,T_1\le t}+\overline{r}^2E\sum_{i=1}^{N}\mathbb{1}_{B_N^2(t)=0,T_1\le t}=\\
&=N\left(r^2E\mathbb{1}_{B_N^1(t)=0,T_1\le t}+\overline{r}^2E\mathbb{1}_{B_N^2(t)=0,T_1\le t}\right)=\\
&=N\left(r^2P(B_N^1(t)=0,T_1\le t)+\overline{r}^2P(B_N^2(t)=0,T_1\le t)\right).
\end{aligned}
$$

При $t\to T$ вероятность $P(B_N^s(t)=0,T_1\le t)$ стремится к $P(B_N^s(t)=0)$ для обоих значений s и знаменатель стремится к нулю, что создает неопределенность для плотности в уравнении (3.5). Далее, предполагая, что $t<T$, получим выражение для плотности и доопределим значение плотности в точке T как предел.

$$
\begin{aligned}
\phi(t)=N(r^2(&P(B_N^1(t)=0)-P(B_N^1(t)=0,T_1>t)+\\
&+\overline{r}^2(P(B_N^2(t)=0)-P(B_N^2(t)=0,T_1>t))).
\end{aligned}
$$

Тогда знаменатель правой части в уравнении (3.5) равен

$$
\begin{aligned}
&N(r^2P(B_N^1(t)=0,T_1>t)+\overline{r}^2P(B_N^2(t)=0,T_1>t))=\\
&=N(r^2P(B_N^1(t)=0|T_1>t)(1-F(t))+\\
&\qquad+\overline{r}^2P(B_N^2(t)=0|T_1>t)(1-F(t)))=\\
&=N(r^2P(B_{N-1}^1(t)=0)(1-F(t))+\overline{r}^2P(B_{N-1}^2(t)=0)(1-F(t))),
\end{aligned}
$$

где $B_{N-1}^s(t)$ – состояние занятости сервера в модели с числом игроков меньшим на 1, где моменты обращений $N-1$ игроков независимые и одинаково распределенные согласно той же функции F. Заметим, что для этой модели интенсивности поступлений обращений в систему

$\lambda_i(t)$ остаются теми же, что и для N игроков, так как распределение остается неизменным, однако вероятности состояний здесь свои.

Тогда для $t \in [t_e, T)$ плотность распределения моментов обращения в систему можно представить выражением, не зависящим от $1 - F(t)$

$$f(t) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(t) = 1) + \overline{r}\mu_2 P(B_N^2(t) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(t) = 0) + \overline{r}^2 P(B_{N-1}^2(t) = 0))}. \qquad (3.6)$$

Правая часть данного выражения определена для $t = T$ и тогда по непрерывности можно доопределить плотность в точке $t = T$

$$f(T) = \frac{r\mu_1 P(B_N^1(T) = 1) + \overline{r}\mu_2 P(B_N^2(T) = 1)}{N(r^2 P(B_{N-1}^1(T) = 0) + \overline{r}^2 P(B_{N-1}^2(T) = 0))}.$$

То есть выражение (3.6) определяет плотность распределения обращений в систему на всем интервале $[t_e, T]$.

Данное выражение позволяет, преобразовав систему (3.4), исключить из нее неизвестную функцию плотности $f(t)$ и получить систему дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в момент t_e, при условии, что на $(0, t_e)$ нет поступлений.

$$\begin{aligned}
&p_{00i}(t_e) = C_N^i p_e^i (1-p_e)^{N-i}\left[\mathbb{1}_{i=0} + \mathbb{1}_{i>0}\left(r^i(1-e^{-\mu_1 t_e}) + \overline{r}^i(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) + \right.\\
&\qquad \left. + \, \mathbb{1}_{i>1}(1 - r^i - \overline{r}^i)(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right],\\
&\qquad i = 0, \ldots, N,\\
&p_{10i}(t_e) = C_N^i p_e^i (1-p_e)^{N-i}\left[r^i e^{-\mu_1 t_e} + \mathbb{1}_{i>1}(1 - r^i - \overline{r}^i) e^{-\mu_1 t_e}(1-e^{-\mu_2 t_e})\right],\\
&\qquad i = 1, \ldots, N,\\
&p_{01i}(t_e) = C_N^i p_e^i (1-p_e)^{N-i}\left[\overline{r}^i e^{-\mu_2 t_e} + \mathbb{1}_{i>1}(1 - r^i - \overline{r}^i)(1-e^{-\mu_1 t_e}) e^{-\mu_2 t_e}\right],\\
&\qquad i = 1, \ldots, N,\\
&p_{11i}(t_e) = C_N^i p_e^i (1-p_e)^{N-i}(1 - r^i - \overline{r}^i) e^{-\mu_1 t_e} e^{-\mu_2 t_e},\\
&\qquad i = 2, \ldots, N.
\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (3.4) и начальными условиями (3.7). Ее решение дает вероятности состояний $p_{ijk}(t)$, зависящие от параметра p_e. С известными вероятностями состояний выражение (3.6) определяет равновесную плотность распределения моментов обращения $f(t)$

на интервале $[t_e, T]$, также зависящую от параметра p_e. Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов обращения заканчивалась точно в момент T, поэтому значение параметра p_e выбирается так, чтобы

$$p_e + \int_{t_e}^{T} f(t)dt = 1. \tag{3.8}$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения $F(t)$ на интервале $[0, T]$ обладает следующими свойствами.*

1. *Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени $p_e = F(0) > 0$.*

2. *На интервале $(0, t_e)$ игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где t_e удовлетворяет уравнению (3.3).*

3. *Если для $p_e = 1$ решение уравнения (3.3) дает $t_e > T$, то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.*

4. *Иначе, $p_e < 1$ и на интервале $[t_e, T]$ существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему $f(t)$, определяемая выражением (3.6).*

5. *Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (3.8).*

6. $C(p_e) = \frac{2-(1-p_e r)^{N+1}-(1-p_e \overline{r})^{N+1}}{p_e(N+1)}$ *– вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.*

Лемма 3.5. *Функция распределения $F(t)$, являющаяся решением (3.3) и (3.5) для заданного значения начального условия $F(0) = p$ в любой точке интервала $[0, T]$ возрастает по значению p.*

Доказательство. Пусть заданы две вероятности обращений в нулевой момент времени $0 < p < q \leq 1$, определяющие начальные условия для получения двух соответствующих функций распределения $F_p(t)$ и $F_q(t)$, являющихся решениями (3.3) и (3.5). Соответствующие вероятности обслуживания $C(p)$ и $C(q)$ постоянны на всем носителе распределения. По лемме 3.1 функция $C(\cdot)$ убывающая. Тогда вероятность потери для p должна быть меньше, чем для q, на всем носителе распределения.

По лемме 3.3 для соответствующих начал интервалов, на которых возобновляются обращения в систему, справедливо $t_q = t(q) < t_p = t(p)$. То есть функция $F_q(t)$ начинает возрастать от значения q в момент, когда $F_p(t)$ еще остается константой $p < q$. Для $t \in [0, t_p]$ утверждение леммы справедливо, так как здесь $F_p(t) = p < q \leq F_q(t)$.

Пусть есть некоторый момент $s > t_p$, такой, что $F_p(t) < F_q(t)$ и $F_p(s) = F_q(s)$. Тогда $f_p(s) > f_q(s)$, так как обе функции неубывающие по t, в точке s функция $F_p(t)$ должна пересечь $F_q(t)$ снизу вверх и, следовательно, угол наклона $F_p(t)$ больше угла наклона $F_q(t)$. Тогда $\frac{f_p(s)}{1-F_p(s)} > \frac{f_q(s)}{1-F_q(s)}$, что означает что интенсивность обращений в момент s больше для вероятности обращений в начальный момент p, чем для q при том, что интенсивности обслуживания в обоих случаях одинаковы. Тогда вероятность потери в момент s для p должна быть больше, чем для q, что противоречит тому, что на всем носителе распределения вероятность потери для p должна быть меньше, чем для q. $\square$

Теорема 3.2. *Симметричное равновесное распределение поступлений F, определенное в теореме 3.1, существует и единственно.*

Доказательство. Единственность равновесия следует из леммы 3.5. Условие равновесия (3.8) представляет собой уравнение, левая часть которого монотонно возрастает по p_e. При p_e, близких к нулю, она равна вероятности обращения на интервале $[t_e, T]$, которая не превышает 1. При $p_e = 1$ значение левой части не меньше 1. Поэтому существует единственное решение p_e, которому соответствует единственное значение t_e и плотность распределения $f(t)$ на $[t_e, T]$. $\square$

3.1. Случай двух игроков

Пусть в системе всего два игрока, в этом случае $N = 1$, так как у каждого только один противник.

Равновесный момент возобновления поступлений в систему t_e не зависит от вероятности обращения в нулевой момент времени p_e и является корнем уравнения

$$r^2 + \overline{r}^2 = 2(r^2 e^{-\mu_1 t_e} + \overline{r}^2 e^{-\mu_2 t_e}).$$

В случае с одним сервером [15] равновесная стратегия на интервале $[t_e, T]$ представляет собой равномерное распределение. Покажем, что в общем случае это не так.

Согласно (3.6), плотность распределения моментов обращения в систему определяется функцией

$$\begin{aligned} f(t) = \tfrac{r\mu_1 P(B_1^1(t)=1)+\overline{r}\mu_2 P(B_1^2(t)=1)}{N(r^2 P(B_0^1(t)=0)+\overline{r}^2 P(B_0^2(t)=0))} = \\ = \tfrac{r\mu_1 p_{101}(t)+\overline{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2+\overline{r}^2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выразим плотность через $C(p_e)$, равновесную вероятность получения обслуживания, константу по отношению к t.

$$\begin{aligned} f(t) = \tfrac{r\mu_1 p_{101}(t)+\overline{r}\mu_1 p_{011}(t)-\overline{r}\mu_1 p_{011}(t)+\overline{r}\mu_2 p_{011}(t)}{r^2+\overline{r}^2} = \\ = \tfrac{\mu_1(1-C(p_e))+(\mu_2-\mu_1)\overline{r}p_{011}}{r^2+\overline{r}^2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Из системы (3.4) возьмем дифференциальное уравнение для p_{011}

$$p'_{011}(t) = \lambda_0(t)\overline{r}p_{000}(t) - \mu_2 p_{011}(t). \tag{3.11}$$

Согласно уравнению (3.5)

$$\frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{r\mu_1 p_{101}(t) + \overline{r}\mu_2 p_{011}(t)}{(r^2+\overline{r}^2)p_{000}(t)},$$

откуда с учетом (3.9) получаем $\lambda_0(t) = \frac{f(t)}{p_{000}(t)}$. Тогда из (3.11) получим уравнение

$$p'_{011}(t) = \overline{r}\frac{\mu_1(1-C(p_e)) + (\mu_2-\mu_1)\overline{r}p_{011}}{r^2+\overline{r}^2} - \mu_2 p_{011}(t), \tag{3.12}$$

добавим к нему начальное условие $p_{011}(t_e) = \overline{r}p_e e^{-\mu_2 t_e}$ и условие (3.8).

Решением полученной задачи является

$$p_e = \frac{1}{1 + \frac{\mu_1\mu_2(T-t_e)}{2A} + \frac{\mu_2-A}{A^2}\left(\frac{\mu_1}{2} - Ae^{-\mu_2 t_e}\right)\left(e^{-A(T-t_e)}-1\right)},$$

$$f(t) = \frac{\mu_1\mu_2 p_e}{2A} + \frac{(A-\mu_2)(B - A\overline{r}p_e e^{-\mu_2 t_e})e^{-A(t-t_e)}}{\overline{r}A}, \quad t \in [t_e, T],$$

где $A = \frac{r^2\mu_2+\overline{r}^2\mu_1}{r^2+\overline{r}^2}$, $B = \frac{\overline{r}\mu_1 p_e}{2}$. Равновесный выигрыш равен

$$C(p_e) = 1 - \frac{p_e(r^2+\overline{r}^2)}{2}.$$

Пусть теперь оба сервера одинаковы по производительности, то есть $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. В этом случае равновесная стратегия совпадает с равновесной стратегией для случая с одним сервером [15] и не зависит от r: $t_e = \frac{\log 2}{\mu}$, $p_e = \frac{2}{2+\mu T-\log 2}$, $f(t) = \frac{\mu}{2+\mu T-\log 2}, t \in [t_e, T]$. Равновесный выигрыш равен $C(p_e) = \frac{1+\mu T-\log 2+2r\overline{r}}{2+\mu T-\log 2}$. Для сравнения отметим, что в задаче с одним сервером [1] он равен $\frac{1+\mu T-\log 2}{2+\mu T-\log 2}$. Назовем социальной полезностью системы ожидаемое число обслуженных в ней игроков. В равновесии она равна $SU_{NE} = 2 * C(p_e)$. Социально оптимальным является такой профиль стратегий, при котором социальная полезность максимальна. Заметим, что социально оптимальный профиль не обязательно является симметричным и равновесным. В данном случае социально оптимальным является профиль чистых стратегий, при котором один игрок обращается в момент 0, а другой в момент T. Оптимальная социальная полезность равна $SU_{OPT} = 2 - (r^2+\overline{r}^2)e^{-\mu T}$. Ценой анархии назовем отношение равновесной социальной полезности к оптимальной. Она равна здесь $PoA = \frac{(2-(r^2+\overline{r}^2)e^{-\mu T})(2+\mu T-\log 2)}{2(1+\mu T-\log 2+2r\overline{r})}$.

3.2. Вычислительные эксперименты

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при $N > 1$ используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется, что $t_e(1) < T$, иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение p_e, для него находится t_e как решение уравнения (3.3). В точке t_e вычисляются начальные значения для систем (3.4) для N и $N-1$ игроков, а также $f(t_e)$. Для каждой следующей точки разбиения отрезка $[t_e, T]$ строится решение обеих систем по методу Эйлера: $p_{ijk}(t+\delta) \approx p_{ijk}(t)+\delta p'_{ijk}(t)$, используя соотношение (3.5) для вычисления $\lambda_i(t) = \frac{(N-i)f(t)}{1-F(t)}$, и по формуле (3.6) находится очередное $f(t)$. Затем вычисляется $F(T)$ и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого ε, близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то p_e уменьшается, а если меньше, то увеличивается, и алгоритм повторяется для нового значения p_e.

Таблица 1. Равновесные характеристики

	$r=0.1$			$r=0.9$		
N	p_e	t_e	$C(p_e)$	p_e	t_e	$C(p_e)$
1	0.185	0.070	0.924	0.861	0.681	0.647
5	0.14	0.062	0.756	0.629	0.31	0.348
10	0.075	0.060	0.745	0.489	0.205	0.264

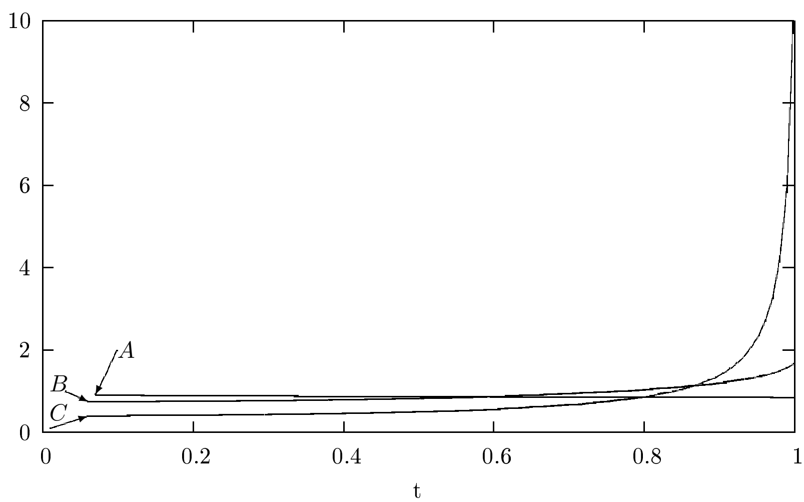

Рисунок 1. Равновесные плотности $f(t)$ при $T=1, \mu_1=1, \mu_2=10, r=0.1$. График A для $N=1$, B для $N=5$, C для $N=10$.

В табл. 1 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы $[0, 1]$. В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму: $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$. Сравниваются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой ($r = 0.1$) и низкой ($r = 0.9$) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рис. 1 и 2 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. Рис. 3 и 4 показывают, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра r – вероятности, что обратившийся в систему игрок перенаправляется на первый сервер.

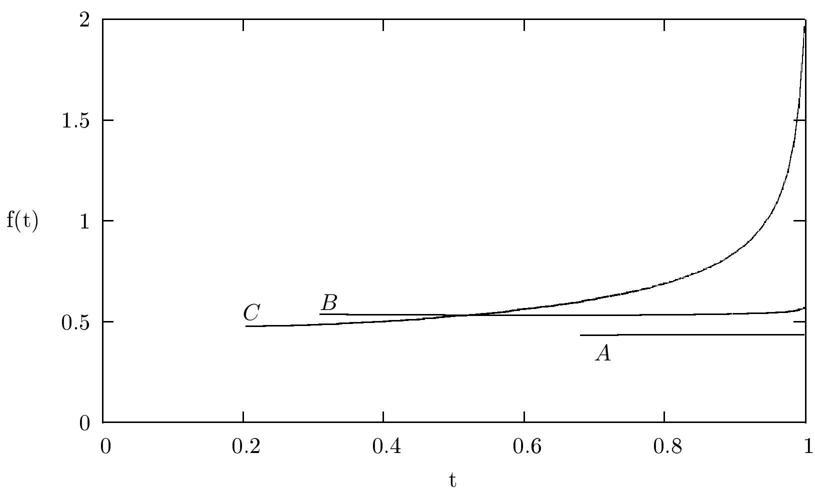

Рисунок 2. Равновесные плотности $f(t)$ при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$. График A для $N = 1$, B для $N = 5$, C для $N = 10$.

4. Пуассоновское число игроков

Пусть теперь ни одному из игроков не известно число его противников N, известно только, что N – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ. Пусть с вероятностью p каждый из противников обращается к системе в момент времени $t = 0$. Случайная величина X_p – число игроков, обратившихся к серверу в нулевой момент времени. Пусть также Y_{pr} – количество игроков, попавших на первый сервер из числа X_p. Тогда вероятность получения обслуживания в нулевой момент времени равна

$$C(p) = E\left(\frac{r}{Y_{pr}+1} + \frac{\overline{r}}{X_p - Y_{pr} + 1}\right).$$

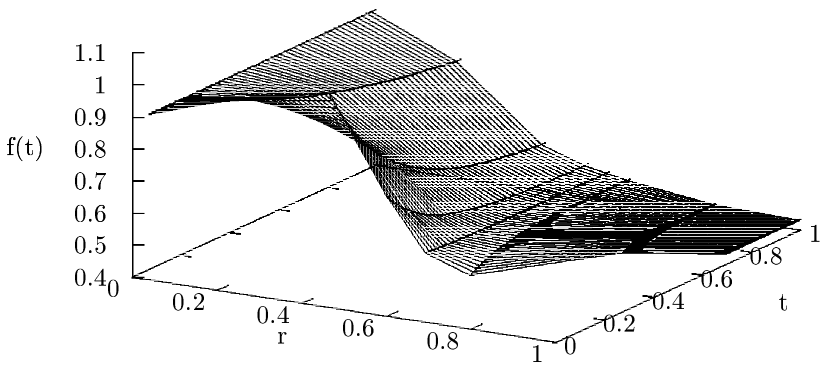

Рисунок 3. Как изменение r изменяет вид стратегии при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 1$

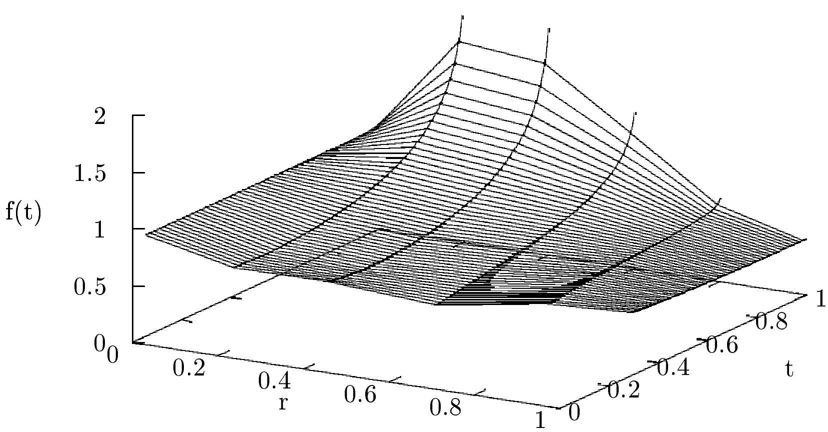

Рисунок 4. Как изменение r изменяет вид стратегии при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, N = 5$

Заметим, что для каждого значения случайной величины N случайная величина X_p имеет биномиальное распределение $Bin(N, p)$, а Y_{pr} для каждого значения X_p имеет биномиальное распределение

$Bin(X_p^N, r)$. Тогда выигрыш в нулевой момент времени равен

$$C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \cdot \\ \cdot \left(\sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \left[\sum_{j=0}^{i} C_i^j r^j \overline{r}^{i-j} \left(\frac{r}{j+1} + \frac{\overline{r}}{i-j+1} \right) \right] \right).$$

Сумма в скобках в правой части данного выражения равна правой части (3.2), откуда получаем

$$\begin{aligned} &C(p) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!} \tfrac{2-(1-pr)^{N+1}-(1-p\overline{r})^{N+1}}{p(N+1)} = \\ &= \tfrac{e^{-\lambda}}{p\lambda} \left(2 \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^{N+1}(1-pr)^{N+1}}{(N+1)!} - \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^{N+1}(1-p\overline{r})^{N+1}}{(N+1)!} \right) = \\ &= \tfrac{e^{-\lambda}}{p\lambda} \left(2e^{\lambda} - e^{\lambda(1-pr)} - e^{\lambda(1-p\overline{r})} \right) = \tfrac{2-e^{-\lambda pr}-e^{-\lambda p\overline{r}}}{\lambda p}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Найдем вероятность получения обслуживания в момент $t > 0$ при условии, что вероятности обращений к системе на интервале $(0, t)$ равны нулю. Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} &1 - rP(Y_{pr} \geq 1)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}P(X_p - Y_{pr} \geq 1)e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r\left(1 - P(Y_{pr} = 0)\right)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1 - P(X_p - Y_{pr} = 0)\right)e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r\left(1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!} \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} \overline{r}^i \right) e^{-\mu_1 t} - \\ &\qquad -\overline{r}\left(1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!} \sum_{i=0}^{N} C_N^i p^i (1-p)^{N-i} r^i \right) e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r\left(1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!} (1-pr)^N \right) e^{-\mu_1 t} - \\ &\qquad -\overline{r}\left(1 - e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!} (1-p\overline{r})^N \right) e^{-\mu_2 t} = \\ &= 1 - r\left(1 - e^{-\lambda pr}\right)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1 - e^{-\lambda p\overline{r}}\right)e^{-\mu_2 t}. \end{aligned}$$

Заметим, что данная вероятность возрастает по t. Покажем теперь, что ее значение в точке $t = 0+$, бесконечно близкой к нулю, меньше вероятности обслужиться в нулевой момент времени.

Лемма 4.1. *Для любых действительных $\lambda > 0$, $0 < r \leq 1$ и $0 < p \leq 1$ функция $\frac{1-e^{-\lambda pr}}{p}$ убывает по аргументу p на всем интервале $p \in (0, 1]$.*

Доказательство. Функцию в условии леммы можно представить как

$$\frac{1-e^{-\lambda pr}}{p} = e^{-\lambda}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\lambda^{N+1}}{(N+1)!}\frac{1-(1-pr)^{N+1}}{p}.$$

По лемме 3.1 это сумма убывающих по p функций. □

Лемма 4.2. *Для любых действительных* $0 < r \le 1$ *и* $0 < p \le 1$ *справедливо* $re^{\lambda pr} < \frac{1-e^{-\lambda pr}}{\lambda p}$.

Доказательство. По лемме 4.1 значение выражения $\frac{\lambda pre^{\lambda pr}-1+e^{-\lambda pr}}{p^2}$ отрицательно, как производная убывающей по p функции $\frac{1-e^{-\lambda pr}}{p}$. □

Пусть игрок обращается к системе в момент после $t = 0$, но бесконечно близкий к нему, когда для каждого из поступивших в нулевой момент уже определен обслуживающий сервер или необходимость покинуть систему без обслуживания, но еще ни одна заявка не успела обслужиться и ни один новый игрок не поступил в систему. Эта вероятность равна

$$\lim_{t\to 0+} 1 - r\left(1-e^{-\lambda pr}\right)e^{-\mu_1 t} - \overline{r}\left(1-e^{-\lambda p\overline{r}}\right)e^{-\mu_2 t} = re^{-\lambda pr} + \overline{r}e^{-\lambda p\overline{r}}.$$

Согласно лемме 4.2, значение данного выражения меньше значения выражения (4.1). Это означает, что лучше обратиться в систему в нулевой момент времени, чем в бесконечно близкий к нулю, но после него. То есть, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.3. *В случае имеющего распределение Пуассона числа игроков выигрыш игрока в момент времени* 0 *строго больше выигрыша в момент* 0+. *Выигрыш игрока возрастает по времени на интервале* $(0,t)$*, если на нем игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью.*

Пусть известна равновесная вероятность обращения к системе в нулевой момент времени и равна $0 < p_e \le 1$. Тогда аналогично случаю с фиксированным числом игроков для заданного значения равновесной вероятности обращения в нулевой момент времени уравнение

$$\frac{2-e^{-\lambda p_e r}-e^{-\lambda p_e \overline{r}}}{\lambda p_e} = \\ = 1 - r\left(1-e^{-\lambda p_e r}\right)e^{-\mu_1 t_e} - \overline{r}\left(1-e^{-\lambda p_e \overline{r}}\right)e^{-\mu_2 t_e} \quad (4.2)$$

дает соответствующее значение момента времени $t_e > 0$, до которого в равновесии игроки обращаются к системе с нулевой вероятностью.

Лемма 4.4. *Для любых действительных $\lambda > 0$, $0 \leq r \leq 1$, $0 < p_e \leq 1$ и $\mu_1, \mu_2 > 0$ уравнение (4.2) задает строго убывающую неявную функцию $t_e(p_e)$.*

Доказательство. Так как $p > 0$, разделим уравнение (4.2) на p, получим равносильное уравнение $G(p_e, t_e) = 0$, где

$$G(p_e, t_e) = \frac{\frac{2-e^{-\lambda p_e r}-e^{-\lambda p_e \overline{r}}}{\lambda p_e} - 1}{p_e} + \\ + \frac{r(1-e^{-\lambda p_e r})}{p_e}e^{-\mu_1 t_e} + \frac{\overline{r}(1-e^{-\lambda p_e \overline{r}})}{p_e}e^{-\mu_2 t_e}.$$

$G(p_e, t_e)$ является убывающей по p_e функцией, так как ее слагаемые строго убывают по лемме 4.1. Кроме того, $G(p_e, t_e)$ убывает по t_e. Тогда $t_e'(p_e) = -\frac{\partial G}{\partial p_e} / \frac{\partial G}{\partial t_e} < 0$. □

Тогда, согласно лемме 4.4, аналогично случаю с фиксированным числом игроков, если $t_e(1) \geq T$, то равновесной является чистая стратегия – обращение в систему в момент $t = 0$ с вероятностью 1. Далее будем считать, что $t_e(1) < T$.

Необходимо найти равновесную плотность $f(t)$ распределения моментов обращения к системе на интервале $[t_e, T]$. Определим Марковский процесс с состояниями системы (i, j) в каждый момент времени $t \in [t_e, T]$, где $i, j \in \{0, 1\}$ – состояния занятости первого и второго сервера соответственно (0 – свободен, 1 – занят). Интенсивность поступлений запросов в систему в каждый момент времени t равна $\lambda f(t)$. Система Колмогорова для вероятностей состояний системы p_{ij} выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&p'_{00}(t) = -\lambda f(t)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01i}(t),\\
&p'_{10}(t) = r\lambda f(t)p_{00}(t) - (\overline{r}\lambda f(t) + \mu_1)p_{10}(t) + \mu_2 p_{11}(t),\\
&p'_{01}(t) = \overline{r}\lambda f(t)p_{00}(t) - (r\lambda f(t) + \mu_2)p_{01}(t) + \mu_1 p_{11}(t),\\
&p'_{11}(t) = \lambda f(t)(rp_{01}(t) + \overline{r}p_{10}(t))) - (\mu_1 + \mu_2)p_{11}(t).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Вероятность получить обслуживание в момент $t \in [t_e, T]$ в равновесии постоянна для всех $t \in [t_e, T]$ и равна $p_{00}(t) + rp_{01}(t) + \overline{r}p_{10}(t) = C(p_e)$. Тогда сумма соответствующих производных должна быть равна нулю. Отсюда, подставив в суммы производные вероятностей состояний из системы Колмогорова (4.3), получаем равновесную плотность

$$f(t) = \frac{r\mu_1(p_{10}(t) + p_{11}(t)) + \overline{r}\mu_2(p_{01}(t) + p_{11}(t))}{\lambda(r^2(p_{00}(t) + p_{01}(t)) + \overline{r}^2(p_{00}(t) + p_{10}(t)))} \tag{4.4}$$

для $t \in [t_e, T]$.

Заметим, что в случае с одним сервером [15] равновесная стратегия на интервале $[t_e, T]$ представляет собой равномерное распределение. В нашем более общем случае это не так, даже для случая одинаковых серверов, из-за присутствия r^2 и $\overline{r}^2$ в знаменателе.

Определим для системы начальные условия – вероятности состояний в момент t_e, при условии, что на $(0, t_e)$ нет поступлений. Для каждого состояния (i, j) соответствующую вероятность можно найти как

$$p_{ij}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{N!} \sum_{k=0}^{N} p_{ijk}^N(t_e),$$

где $p_{ijk}^N(t_e)$ – вероятность состояния (i, j, k) в момент t_e для случая N игроков. Тогда

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) = e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} \tfrac{\lambda^N}{N!}&\\
\sum_{k=0}^{N} C_N^k p_e^k (1 - p_e)^{N-k} \Big[\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0}\big(r^k(1 - e^{-\mu_1 t_e}) + \overline{r}^k(1 - e^{-\mu_2 t_e})\big) +&\\
+ \mathbb{1}_{k>1}(1 - r^k - \overline{r}^k)(1 - e^{-\mu_1 t_e})(1 - e^{-\mu_2 t_e})\Big].&
\end{aligned}$$

Преобразуем внутреннюю сумму

$$\sum_{k=0}^{N} C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \Big[\mathbb{1}_{k=0} + \mathbb{1}_{k>0}\left(r^k(1-e^{-\mu_1 t_e}) + \overline{r}^k(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) +$$
$$+ \mathbb{1}_{k>1}(1-r^k-\overline{r}^k)(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\Big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} C_N^k p_e^k (1-p_e)^{N-k} \Big[\left(r^k(1-e^{-\mu_1 t_e}) + \overline{r}^k(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) +$$
$$+ (1-r^k-\overline{r}^k)(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\Big] +$$
$$+(1-p_e)^N \left(1-(1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) =$$
$$= (1-e^{-\mu_1 t_e})(1-p_e)^N \sum_{k=0}^{N} C_N^k \left(\tfrac{p_e r}{1-p_e}\right)^k +$$
$$+(1-e^{-\mu_2 t_e})(1-p_e)^N \sum_{k=0}^{N} C_N^k \left(\tfrac{p_e \overline{r}}{1-p_e}\right)^k +$$
$$+(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})(1-p_e)^N \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{N} C_N^k \left[\left(\tfrac{p_e}{1-p_e}\right)^k - \left(\tfrac{p_e r}{1-p_e}\right)^k - \left(\tfrac{p_e \overline{r}}{1-p_e}\right)^k\right] +$$
$$+(1-p_e)^N \left(1-(1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) =$$
$$= (1-e^{-\mu_1 t_e})(1-p_e\overline{r})^N + (1-e^{-\mu_2 t_e})(1-p_e r)^N +$$
$$+(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\left[1-(1-p_e\overline{r})^N-(1-p_e r)^N\right] +$$
$$+(1-p_e)^N \left(1-(1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right) =$$
$$= (1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e}) +$$
$$+(1-p_e r)^N((1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})) +$$
$$+(1-p_e\overline{r})^N((1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})) +$$
$$+(1-p_e)^N \left(1-(1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right).$$

Тогда

$$p_{00}(t_e) = (1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e}) +$$
$$+e^{-\lambda p_e r}((1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})) +$$
$$e^{-\lambda p_e \overline{r}}((1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})) +$$
$$+e^{-\lambda p_e}\left(1-(1-e^{-\mu_1 t_e})-(1-e^{-\mu_2 t_e})-(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})\right).$$

После преобразования получаем следующее выражение для $p_{00}(t_e)$, и аналогично для остальных вероятностей состояний в момент t_e.

$$\begin{aligned}
p_{00}(t_e) &= (1-e^{-r\lambda p_e})(1-e^{-\mu_1 t_e})e^{-\overline{r}\lambda p_e} + e^{-r\lambda p_e}(1-e^{-\overline{r}\lambda p_e})(1-e^{-\mu_2 t_e}) + \\
&\quad +(1-e^{-r\lambda p_e})(1-e^{-\mu_1 t_e})(1-e^{-\overline{r}\lambda p_e})(1-e^{-\mu_2 t_e}) + e^{-\lambda p_e}, \\
p_{10}(t_e) &= (1-e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(e^{-\overline{r}\lambda p_e} + (1-e^{-\overline{r}\lambda p_e})(1-e^{-\mu_2 t_e})), \\
p_{01}(t_e) &= (1-e^{-\overline{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}(e^{-r\lambda p_e} + (1-e^{-r\lambda p_e})(1-e^{-\mu_1 t_e})), \\
p_{11}(t_e) &= (1-e^{-r\lambda p_e})e^{-\mu_1 t_e}(1-e^{-\overline{r}\lambda p_e})e^{-\mu_2 t_e}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, имеется задача Коши с системой дифференциальных уравнений (4.3) и начальными условиями (4.5). Ее решение дает вероятности состояний $p_{ij}(t)$, зависящие от параметра p_e. С известными вероятностями состояний выражение (4.4) определяет равновесную плотность распределения моментов обращения $f(t)$ на интервале $[t_e, T]$, также зависящую от параметра p_e. Необходимо, чтобы положительная плотность распределения моментов обращения заканчивалась точно в момент T, поэтому значение параметра p_e выбирается так, чтобы

$$p_e + \int\limits_{t_e}^{T} f(t)dt = 1. \tag{4.6}$$

В итоге вышеизложенного анализа получаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Любое симметричное равновесное по Нэшу распределение моментов обращения к системе обслуживания с двумя серверами со случайным доступом и потерями с функцией распределения $F(t)$ на интервале $[0, T]$ обладает следующими свойствами.*

1. *Существует строго положительная вероятность обращения в нулевой момент времени $p_e = F(0) > 0$.*

2. *На интервале $(0, t_e)$ игроки обращаются в систему с нулевой вероятностью, где t_e удовлетворяет уравнению (4.2).*

3. *Если для $p_e = 1$ решение уравнения (4.2) дает $t_e > T$, то равновесная стратегия – чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени.*

4. *Иначе, $p_e < 1$ и на интервале $[t_e, T]$ существует непрерывная положительная плотность распределения моментов обращения в систему $f(t)$, определяемая выражением (4.4).*

5. *Равновесная вероятность обращения в нулевой момент времени находится из уравнения (4.6).*

6. *$C(p_e) = \frac{2 - e^{-\lambda p_e r} - e^{-\lambda p_e \overline{r}}}{\lambda p_e}$ – вероятность получить обслуживание на всем носителе стратегии.*

Лемма 4.5. *Функция распределения $F(t)$, являющаяся решением (4.2) и (4.4) для заданного значения начального условия $F(0) = p$ в любой точке интервала $[0, T]$ возрастает по значению p.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3.5 для случая фиксированного числа игроков. □

Тогда, как и в случае для фиксированного числа игроков, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Симметричное равновесное распределение поступлений F, определенное в теореме 4.1, существует и единственно.*

4.1. Вычислительные эксперименты

Для нахождения равновесий в рассматриваемой задаче при $\lambda > 0$ используется численный алгоритм, являющийся комбинацией методов дихотомии решения уравнений с одним неизвестным и метода Эйлера решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сначала проверяется, что $t_e(1) < T$, иначе равновесной является чистая стратегия, когда все игроки обращаются в систему в нулевой момент времени. Далее выбирается некоторое начальное значение p_e, для него находится t_e как решение уравнения (4.2). В точке t_e вычисляются начальные значения для системы (4.3) и $f(t_e)$. Для каждой следующей точки разбиения отрезка $[t_e, T]$ строится решение обеих систем по методу Эйлера: $p_{ij}(t + \delta) \approx p_{ij}(t) + \delta p'_{ij}(t)$, и по формуле (4.4) находится очередное $f(t)$. Затем вычисляется $F(T)$ и сравнивается с 1. Если получено равенство (с точностью до некоторого ε, близкого к нулю), алгоритм завершает работу. Если это значение больше 1, то p_e уменьшается, а если меньше, то увеличивается, и алгоритм повторяется для нового значения p_e.

В табл. 2 приведены результаты вычисления равновесий для конкретных значений параметров системы. Рассматривается временной интервал работы системы $[0, 1]$. В системе первый сервер значительно уступает в производительности второму: $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$. Сравниваются равновесия для различного числа игроков в случаях высокой

($r = 0.1$) и низкой ($r = 0.9$) вероятностей попадания запроса на быстрый сервер. На рис. 5 и 6 приведены графики соответствующих равновесных плотностей распределения моментов обращения в систему. Рис. 7 показывает, как изменяется вид равновесных плотностей при изменении параметра r – вероятности, что обратившийся в систему игрок перенаправляется на первый сервер.

Таблица 2. Равновесные характеристики

	$r = 0.1$			$r = 0.9$		
λ	p_e	t_e	$C(p_e)$	p_e	t_e	$C(p_e)$
1	0.181	0.068	0.929	0.802	0.566	0.737
5	0.17	0.059	0.725	0.656	0.312	0.374
20	0.15	0.037	0.396	0.48	0.105	0.168
100	0.155	0.011	0.115	0.279	0.039	0.069
200	0.16	0.066	0.061	0.224	0.024	0.044
300	0.1598	0.004	0.042	0.202	0.018	0.033

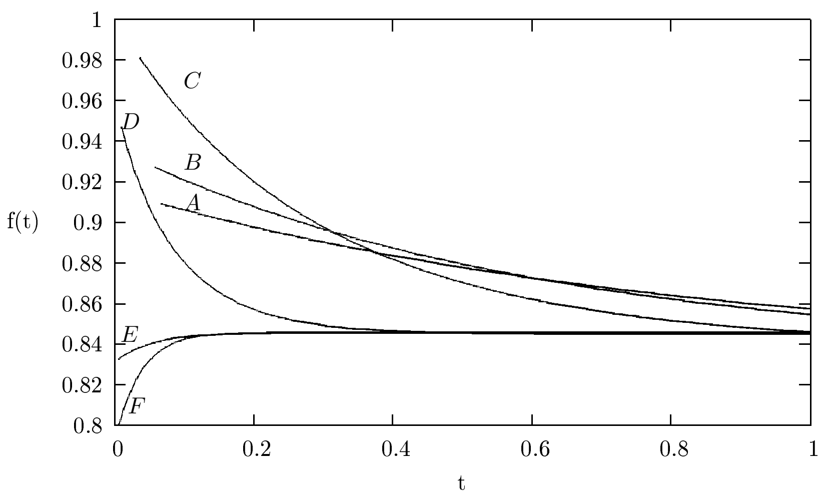

Рисунок 5. Равновесные плотности $f(t)$ при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.1$. График A для $\lambda = 1$, B для $\lambda = 5$, C для $\lambda = 20$, D для $\lambda = 100$, E для $\lambda = 200$, F для $\lambda = 300$.

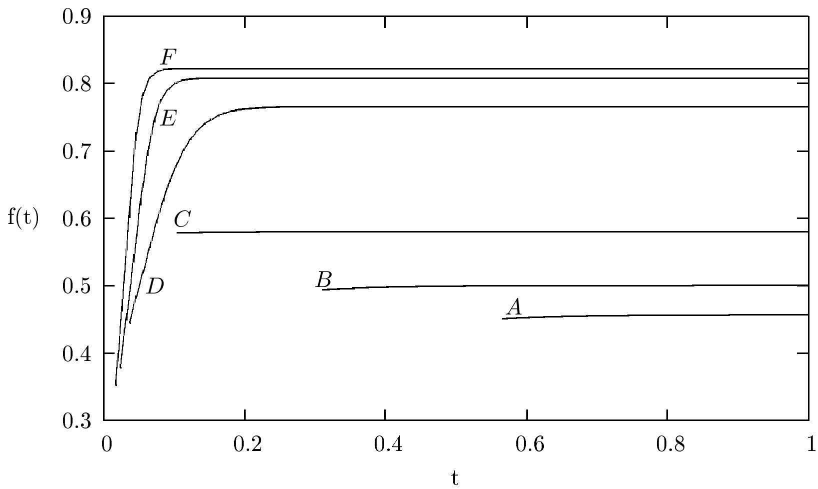

Рисунок 6. Равновесные плотности $f(t)$ при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, r = 0.9$. График A для $\lambda = 1$, B для $\lambda = 5$, C для $\lambda = 20$, D для $\lambda = 100$, E для $\lambda = 200$, F для $\lambda = 300$.

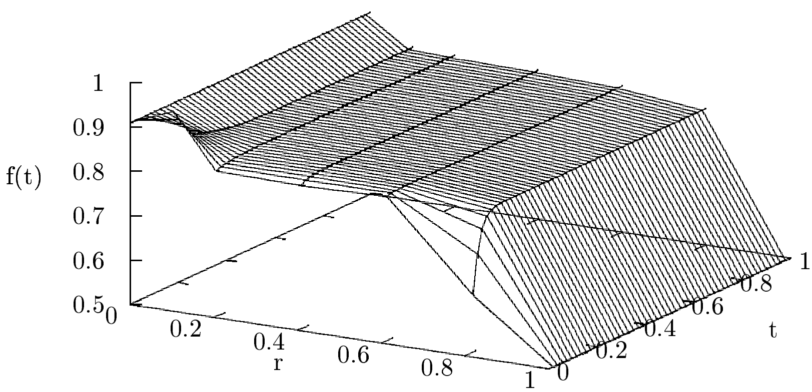

Рисунок 7. Как изменение r меняет вид стратегии при $T = 1, \mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \lambda = 100$

5. Заключение

Для 2-серверной системы обслуживания с потерями и случайным доступом, принимающей запросы на интервале времени $[0, T]$ исследованы две модели. В первой число игроков фиксировано, во второй является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона. Для обоих случаев доказано существование единственного симметричного равновесия, такого что с некоторой положительной вероятностью p_e пользователи обращаются к системе в нулевой момент времени, и далее существует интервал времени $[t_e, T]$, на котором определена положительная плотность распределения моментов обращения в систему. Для случая двух игроков равновесие найдено аналитически и показано, что равновесное распределение на интервале $[t_e, T]$ имеет экспоненциальный вид. Для обеих моделей предложены алгоритмы для численного нахождения равновесий. Данные алгоритмы положены в основу реализации программной системы, позволяющей графически представлять равновесные стратегии. Проведены численные эксперименты по сравнению равновесий при различных значениях параметров модели.

Возможным расширением рассмотренной модели является рационализация выбора сервера при случайном доступе. В рассмотренной модели пользователь может быть направлен на занятый сервер в то время, как второй сервер свободен. Так же и на практике, система DNS, выдающая клиенту очередной IP-адрес запрашиваемого домена, не имеет информации о его доступности. Предполагается рассмотреть модель, в которой доступ к серверам будет случайным только в случае, когда оба сервера свободны, и сравнить ее с приведенной здесь. Кроме того, можно рассмотреть аналогичную задачу для модели различных по производительности серверов, доступ к которым определяется не случайно, а согласно установленным системой приоритетам. Также возможно ввести в обе модели функцию комфортности [1] для исследования ее влияния на вид равновесия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазалов В.В., Чуйко Ю.В. *Некооперативное равновесие по Нэшу в задаче выбора оптимального момента обращения к системе обслуживания* // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. N 6. С. 60–71.

2. Росляков А.В. *Центры обслуживания вызовов (Call Centre)*. Эко-Трендз, 2002.

3. Altman E. *Applications of dynamic games in queues* // Advances in Dynamic Games. 2005. V. 7. P. 309–342.

4. Altman E. *A Markov game approach for optimal routing into a queueing network* // INRIA report N 2178, 1994.

5. Altman E., Hassin R. *Non-Threshold Equilibrium for Customers Joining an M/G/1 Queue* // In Proceedings of 10th International Symposium on Dynamic Game and Applications, 2002.

6. Altman E., Jimenez T., Nunez Queija R. and Yechiali U. *Optimal routing among* $\cdot/M/1$ *queues with partial information* // Stochastic Models. 2004. V. 20. N 2. P. 149–172.

7. Altman E., Koole G. *Stochastic scheduling games with Markov decision arrival processes* // Journal Computers and Mathematics with Appl. 1993. V. 26. N 6. P. 141–148.

8. Altman E., Shimkin N. *Individually Optimal Dynamic Routing in a Processor Sharing System* // Operations Research. 1998. P. 776–784.

9. Glazer A., Hassin R. *Equilibrium arrivals in queues with bulk service at scheduled times* // Transportation Science. 1987. V. 21. N 4. P. 273–278.

10. Glazer A., Hassin R. $?/M/1$*: On the equilibrium distribution of customer arrivals* // European Journal of Operational Research. 1983. V. 13. N 2. P. 146–150.

11. Killelea P. *Web Performance Tuning: Speeding Up the Web*. O'Reilly Media, Inc., 2002.

12. Kopper K. *The Linux Enterprise Cluster: Build a Highly Available Cluster with Commodity Hardware and Free Software*. No Starch Press, 2005.

13. Ou Z., Zhuang H., Lukyanenko A., Nurminen J., Hui P., Mazalov V., Yla-Jaaski A. *Is the Same Instance Type Created Equal? Exploiting Heterogeneity of Public Clouds* // IEEE Transactions on Cloud Computing. 2013. V. PP. N. 99.

14. Ravner L., Haviv M. *Strategic timing of arrivals to a finite queue multi-server loss system* // Queueing Systems. 2015. V. 81. N 1. P. 71–96.

15. Ravner L., Haviv M. *Equilibrium and socially optimal arrivals to a single server loss system* // In International Conference on NETwork Games COntrol and OPtimization 2014 (NetGCoop'14), Trento, Italy, October 2014.

OPTIMAL ARRIVALS TO A TWO-SERVER LOSS SYSTEM WITH RANDOM ACCESS

Julia V. Chirkova, IAMR KarRC RAS, Cand.Sc.
(julia@krc.karelia.ru).

Abstract: We consider the 2-server queuing system with loss that admits requests during a time interval $[0, T]$. Players try to send their requests to the system, that provides a random access to its servers with some probabilities, and players know these probabilities. We consider a non-cooperative game for this queueing system. Each player's strategy is a time moment to send his request to the system trying to maximize the probability of successful service obtaining. We use a symmetric Nash equilibrium as an optimality criteria. Two models are considered for this game. In the first model the number of players is deterministic. In the second it follows a Poisson distribution. We prove that there exists a unique symmetric equilibrium for both models. Also we compare numerically equilibria for different models' parameters.

Keywords: queueing system, optimal arrivals, Nash equilibrium.