Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.1, с. 3–14

УДК 517.977
ББК 22.18

УКЛОНЕНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Александр И. Благодатских
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
e-mail: aiblag@mail.ru

В задаче группового преследования жестко скоординированных убегающих группой инерционных объектов построено управление, обеспечивающее уклонение от встречи.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, убегание, фазовые ограничения.

1. Введение

Задачи преследования-убегания на быстродействие и качество с полной и неполной информацией в различных постановках рассмотрены в монографии [5]. Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, от группы преследователей при дискриминации последних рассмотрены в работах [6,7]. При условии дискриминации убегающего были представлены [3,8] задачи группового преследования разнотипными объектами одного убегающего.

В предлагаемой работе рассматривается задача преследования группы безынерционных убегающих группой инерционных преследователей. Предполагается, что все убегающие используют одинаковое (жестко скоординированное) управление, которое формируется в каждый момент времени с учетом текущих позиций участников и фазового ограничения на траектории убегающих. Построено кусочно-постоянное управление, обеспечивающее уклонение от группы преследователей всех убегающих. Данная работа продолжает исследования [1,2].

2. Постановка задачи

В пространстве R^k $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями

$$\begin{array}{ll} P_i \ : & \ddot{x}_i + f_i(\dot{x}_i, x_i, t) = u_i,\ |u_i| \leqslant \alpha_i,\ x_i(t_0) = X_i^0,\ \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \\ E_j \ : & \qquad\qquad \dot{y}_j = v, \quad |v| \leqslant \gamma, \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \\ & \qquad\qquad \text{причем } X_i^0 \neq Y_j^0 \text{ для всех } i \text{ и } j. \end{array} \tag{2.1}$$

Здесь и далее, если не оговорено специально, $x_i, y_j \in R^k$, $\alpha_i > 0$, $\gamma > 0$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}(o, \rho)$ шар радиуса ρ с центром в точке o. Дополнительно предполагается, что убегающий E_j не покидает пределы шара $\mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$, где $r_0 > 0$.

Определение 2.1. *Управления $u_i(t)$ преследователей P_i и $v(t)$ убегающих E_j из класса измеримых по Лебегу функций, удовлетворяющие указанным в (2.1) ограничениям, называются допустимыми.*

Участники игры используют позиционные стратегии, а решение системы (2.1) понимается в смысле Н.Н. Красовского [4], при этом функции $f_i(\dot{x}_i, x_i, t)$ удовлетворяют «стандартным» условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях преследователей. Кроме того, имеет место

Предположение 2.1. *Существует постоянная $\beta_i \geqslant 0$ такая, что*

$$|f_i(a, b, t)| \leqslant \beta_i \ \textit{для всех}\ a, b \in R^k, t \geqslant t_0, i.$$

Отметим, что игра Γ при $f_i \equiv 0$ рассматривалась в [1,7].

Для упрощения выкладок, считаем, что имеет место неравенство

$$\alpha_i + \beta_i \leqslant 1 \text{ для всех } i \tag{2.2}$$

(выполнение (2.2) при выполненном предположении 2.1 достигается соответствующей заменой переменных).

Определение 2.2. *В игре* Γ *происходит уклонение от встречи, если для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *найдется допустимое позиционное управление*

$$v(t) = v\left(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), y_j(t)\right)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ *и* $y_j(t) \in \mathfrak{D}(Y_j^0, r_0)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, i, j.

Отметим, что действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ по величинам $\{x_i(t), \dot{x}_i(t), y_j(t)\}$ для всех убегающих E_j выбирает одно и тоже управление $v(t)$.

3. Уклонение в конусе

В этом разделе, в отличие от определения 2.2, предположим, что каждый убегающий E_j не покидает пределы конуса

$$C_j = \left\{z \in R^k : \langle z - z_j, e\rangle = 0, |z - z_j| \leqslant a \operatorname{tg}\theta, z_j = Y_j^0 + ae, a \geqslant 0\right\},$$

где e – единичный вектор пространства R^k, $\theta \in (0, \pi/2)$.

Определение 3.1. *В игре* Γ *происходит уклонение в конусе, если для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *найдется допустимое управление*

$$v(t) = v\left(t, x_i(t), \dot{x}_i(t), y_j(t)\right)$$

такое, что $x_i(t) \neq y_j(t)$ *и* $y_j(t) \in C_j$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, i, j.

3.1. Случай $m = 1$

Построим допустимое управление $v(t)$, обеспечивающее уклонение в конусе из любых начальных позиций в задаче с одним убегающим E_1.

Из возможности уклонения в конусе для $k = 2$, т.е. на плоскости, следует возможность уклонения в конусе и при $k > 2$. Действительно, если $k > 2$, тогда выберем произвольную плоскость Π, включающую в себя вектор $Y_1^0 + e$ такую, что ни для какой начальной позиции X_i^0 ее проекция на плоскость Π не совпадает с начальной позицией Y_1^0. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Если задача уклонения в конусе от проекций разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача. Далее в этом подпункте считаем $k = 2$.

Выбираем единичный вектор $\tilde{e}$ перпендикулярный e против часовой стрелки. По $e, \tilde{e}$ как по орт-векторам получаем декартову систему координат. В выбранной системе координат введем обозначения:

$$x_i(t) = \begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ x_i^2(t) \end{pmatrix}, \dot{x}_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_i^1(t) \\ \dot{x}_i^2(t) \end{pmatrix}, u_i(t) = \begin{pmatrix} u_i^1(t) \\ u_i^2(t) \end{pmatrix},$$

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_1^2(t) \end{pmatrix}, v(t) = \begin{pmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{pmatrix}.$$

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $\alpha = 1, 2$ определим функции

$$l^\alpha(t) = l^\alpha(t, y_1^\alpha(t), x_i^\alpha(t)) \text{ -- количество } \beta \in I : x_\beta^\alpha(t) < y_1^\alpha(t),$$

$$q^\alpha(t) = q^\alpha(t, y_1^\alpha(t), x_i^\alpha(t)) \text{ -- количество } \beta \in I : x_\beta^\alpha(t) = y_1^\alpha(t).$$

Зафиксируем $\delta^2 = 0$ и ρ^1, ρ^2, δ^1 положительные константы, что

$$\sqrt{(\delta^1 + 2\rho^1 n)^2 + (2\rho^2 n)^2} \leqslant \gamma, \quad 2\rho^2 n/\delta^1 \leqslant \operatorname{tg}\theta, \tag{3.1}$$

например,

$$\delta^1 = \gamma/\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\theta}, \rho^1 = \delta^1/(2n), \rho^2 = \delta^1 \operatorname{tg}\theta/(2n),$$

при этом ρ^1, ρ^2, δ^1 положительны и условие (3.1) выполнено.

Лемма 3.1. [7, лемма 1] *Для любых $c > 0, r \geqslant 1$ и $d, b_1, \ldots, b_r \in R^1$*

$$\max_{a\in\Omega} \min\big\{|a - b_1|, \ldots, |a - b_r|\big\} \geqslant c, \ \textit{где } \Omega = \{d + 2cs, s = 0, 1, \ldots, r\}.$$

Для каждого $\tau \in [t_0, \infty) : q^\alpha(\tau) \geqslant 1$ определим множество

$$\Omega^\alpha(\tau) = \big\{\delta^\alpha + 2\rho^\alpha l^\alpha(\tau) + 2\rho^\alpha s, s = 0, 1, \ldots, q^\alpha(\tau)\big\}$$

и величину $\omega^\alpha(\tau) \in \Omega^\alpha(\tau)$ такую, что

$$\begin{gathered} \min\big\{|\omega^\alpha(\tau) - \dot{x}_{\beta_1}^\alpha(\tau)|, \ldots, |\omega^\alpha(\tau) - \dot{x}_{\beta_{q^\alpha(\tau)}}^\alpha(\tau)|\big\} = \\ = \max_{g(\tau)\in\Omega^\alpha(\tau)} \min\big\{|g(\tau) - \dot{x}_{\beta_1}^\alpha(\tau)|, \ldots, |g(\tau) - \dot{x}_{\beta_{q^\alpha(\tau)}}^\alpha(\tau)|\big\} \geqslant \rho^\alpha, \end{gathered} \tag{3.2}$$

здесь $x_{\beta_s}^\alpha(\tau) = y_1^\alpha(\tau), \ \beta_s \in I, \ s = 1, 2, \ldots, q^\alpha(\tau)$.

Неравенство в (3.2) следует из леммы 3.1, если в ней положить

$$c = \rho^\alpha,\ d = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha l^\alpha(\tau),\ r = q^\alpha(\tau),\ b_s = \dot{x}^\alpha_{\beta_s}(\tau),\ s = 1, 2, \ldots, q^\alpha(\tau).$$

Для определенности: если существует несколько значений $\omega^\alpha(\tau)$, то возьмем максимальное из них.

Таким образом, для каждого $\tau \in [t_0, \infty) : q^\alpha(\tau) \geqslant 1$ величина $\omega^\alpha(\tau)$ определена однозначно и

$$\omega^\alpha(\tau) \in \Omega^\alpha_* = \left\{\delta^\alpha + 2\rho^\alpha s,\ s = 0, 1, \ldots, n\right\}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда для любых* $t \geqslant t_0$ *и* $T > 0$ *область достижимости преследователя* P_i *в момент* $t + T$ *включена в множество*

$$\mathfrak{D}\left(x_i(t) + \dot{x}_i(t)T, \frac{T^2}{2}\right).$$

Доказательство. Из предположения 2.1, (2.1) и (2.2) следует, что для почти всех $s \in [t, t + T]$

$$|\ddot{x}_i(s)| \leqslant |u_i(s)| + |f_i(\dot{x}_i(s), x_i(s), s)| \leqslant \alpha_i + \beta_i \leqslant 1.$$

Интегрируя это неравенство на интервале $[t, t+T]$ получим справедливость утверждения леммы. □

Для каждого $t \in [t_0, \infty)$ определим функции $T^\alpha_i(t) \geqslant 0$ как время, в течение которого не могут совпасть α координаты P_i и E_1, т.е.

$$x^\alpha_i(s) \neq y^\alpha_1(s) \text{ для всех } s \in [t, t + T^\alpha_i(t))$$

при условии, что E_1 использует управление

$$\tilde{v}^\alpha(s) = v^\alpha(t) \text{ для всех } s \in [t, \infty].$$

При этом возможны три случая:

1) $y^\alpha_1(t) < x^\alpha_i(t)$. Из (2.1) и леммы 3.2, получим, что

$$T^\alpha_i(t) = \sqrt{2(x^\alpha_i(t) - y^\alpha_1(t)) + (v^\alpha(t) - \dot{x}^\alpha_i(t))^2} - (v^\alpha(t) - \dot{x}^\alpha_i(t));$$

2) $y^\alpha_1(t) > x^\alpha_i(t)$. Тогда

$$T^\alpha_i(t) = \sqrt{2(y^\alpha_1(t) - x^\alpha_i(t)) + (v^\alpha(t) - \dot{x}^\alpha_i(t))^2} + (v^\alpha(t) - \dot{x}^\alpha_i(t));$$

3) $x_i^\alpha(t) = y_1^\alpha(t)$. Положим $T_i^\alpha(t) = 0$.

Таким образом, для всех $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered} T_i^\alpha(t) = \sqrt{2\left|y_1^\alpha(t) - x_i^\alpha(t)\right| + (v^\alpha(t) - \dot{x}_i^\alpha(t))^2} + \\ +(v^\alpha(t) - \dot{x}_i^\alpha(t))\operatorname{sign}(y_1^\alpha(t) - x_i^\alpha(t)). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Пусть

$$T^\alpha(t) = \min\left\{T_1^\alpha(t), T_2^\alpha(t), \ldots, T_n^\alpha(t)\right\}. \tag{3.5}$$

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функции

$$K_i^\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^\alpha(t) + \dot{x}_i^\alpha(t)T_i^\alpha(t) + (T_i^\alpha(t))^2/2 \leqslant \\ & \leqslant y_1^\alpha(t) + (v^\alpha(t) + \rho^\alpha/8)T_i^\alpha(t) \text{ и } y_1^\alpha(t) < x_i^\alpha(t), \\ -1, & \text{если } x_i^\alpha(t) + \dot{x}_i^\alpha(t)T_i^\alpha(t) - (T_i^\alpha(t))^2/2 \geqslant \\ & \geqslant y_1^\alpha(t) + (v^\alpha(t) - \rho^\alpha/8)T_i^\alpha(t) \text{ и } y_1^\alpha(t) > x_i^\alpha(t), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Лемма 3.3. [7, лемма 3] *Пусть выполнено предположение 2.1 и убегающий E_1 использует произвольное постоянное управление v_c. Тогда для любого допустимого управления $u_i(t)$ преследователя P_i справедливы следующие утверждения:*

1) Если для $t > t_0$ и некоторого $\sigma > 0$

$$\begin{gathered} y_1^\alpha(\tau) < x_i^\alpha(\tau) \ \ \left\{y_1^\alpha(\tau) > x_i^\alpha(\tau)\right\}, \ \tau \in [t-\sigma, t), \ y_1^\alpha(t) = x_i^\alpha(t), \\ y_1^{\widehat{\alpha}}(\tau) \neq x_i^{\widehat{\alpha}}(\tau), \ \tau \in [t-\sigma, t], \ \widehat{\alpha} \in \{1,2\} \backslash \{\alpha\}, \end{gathered}$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K_i^\alpha(\tau) = 1 \ \ \left\{K_i^\alpha(\tau) = -1\right\}, \ T_i^{\widehat{\alpha}}(\tau) > T_i^\alpha(\tau), \ \tau \in [t-\varepsilon, t);$$

2) Если для $t > t_0$ и некоторого $\sigma > 0$

$$y_1^1(\tau) \neq x_i^1(\tau), \ y_1^2(\tau) \neq x_i^2(\tau), \ \tau \in [t-\sigma, t), \ y_1(t) = x_i(t),$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K_i^1(\tau) \neq 0, T_i^2(\tau) \geqslant T_i^1(\tau), \ \tau \in [t-\varepsilon, t)$$

или

$$K_i^2(\tau) \neq 0, T_i^1(\tau) \geqslant T_i^2(\tau), \ \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функции

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i^1(t) \neq 0,\ T_i^2(t) \geqslant T_i^1(t) = T^1(t), \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.7}$$

$$B_i^2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_i^2(t) \neq 0,\ T_i^1(t) \geqslant T_i^2(t) = T^2(t) \text{ и} \\ & B_\beta^1(t) = 0 \text{ для всех } \beta \in I, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Отметим, что невозможно выполнение равенства

$$B_{\beta_1}^1(t) = B_{\beta_2}^2(t) = 1 \text{ для любых } \beta_1, \beta_2 \in I \text{ и } t \in [t_0, \infty).$$

Определяем $v(t)$ следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Пусть } \tau_0^\alpha = t_0,\ \widehat{\alpha} \in \{1,2\} \backslash \{\alpha\}. \text{ Если } y_1^\alpha(t_0) = x_\beta^\alpha(t_0) \text{ для} \\
\text{некоторого } \beta \in I, \text{ то } \tau_1^\alpha = \tau_2^\alpha = t_0 \text{ и шаг 0 пропускаем;} \\
\ \ 0) \quad v^\alpha(t) = \delta^\alpha + 2\rho^\alpha,\ t \in [\tau_0^\alpha, \tau_1^\alpha], \\
\qquad \tau_1^\alpha \geqslant \tau_0^\alpha - \text{момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\qquad \text{одного } \beta \in I,\ B_\beta^\alpha(\tau_1^\alpha) = 1 \text{ и } v^{\widehat{\alpha}}(\tau_1^\alpha) \in \Omega_*^{\widehat{\alpha}}; \\
\qquad v^\alpha(t) = v^\alpha(\tau_1^\alpha) + K_{\widehat{\beta}}^\alpha(\tau_1^\alpha)\rho^\alpha/4,\ t \in (\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha), \\
\qquad \widehat{\beta} - \text{минимальный из } \beta \in I : B_\beta^\alpha(\tau_1^\alpha) = 1, \\
\qquad \tau_2^\alpha > \tau_1^\alpha - \text{момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\qquad \text{одного } \beta \in I,\ y_1^\alpha(\tau_2^\alpha) = x_\beta^\alpha(\tau_2^\alpha); \\
\ \ p) \quad v^\alpha(t) = \omega^\alpha(\tau_{2p}^\alpha),\ t \in [\tau_{2p}^\alpha, \tau_{2p+1}^\alpha], \\
\qquad \tau_{2p+1}^\alpha \geqslant \tau_{2p}^\alpha - \text{момент, когда впервые, хотя бы для} \\
\qquad \text{одного } \beta \in I,\ B_\beta^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = 1 \text{ и } v^{\widehat{\alpha}}(\tau_{2p+1}^\alpha) \in \Omega_*^{\widehat{\alpha}}; \\
\qquad v^\alpha(t) = v^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) + K_{\widehat{\beta}}^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha)\rho^\alpha/4, t \in (\tau_{2p+1}^\alpha, \tau_{2p+2}^\alpha), \\
\qquad \widehat{\beta} - \text{минимальный из } \beta \in I : B_\beta^\alpha(\tau_{2p+1}^\alpha) = 1, \\
\qquad \tau_{2p+2}^\alpha > \tau_{2p+1}^\alpha - \text{момент, когда впервые, хотя бы} \\
\qquad \text{для одного } \beta \in I,\ y_1^\alpha(\tau_{2p+2}^\alpha) = x_\beta^\alpha(\tau_{2p+2}^\alpha), p = 1, 2, ...
\end{array}\right\} \tag{3.9}$$

Далее везде считаем, что $v(t)$ и $\{\tau_p^\alpha\}_{p=0}^{p^\alpha}$ определены по (3.9), при этом, либо $p^\alpha < \infty$, либо $p^\alpha = \infty$.

Лемма 3.4. [7, лемма 4] *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i выполнено следующее:*

1) *если* $p^1 \geqslant 2$ *и* $p^2 \geqslant 2$, *то*

$$\{\tau^1_{2p}\}_{p=1}^{p^1 \div 2} \bigcap \{\tau^2_{2p}\}_{p=1}^{p^2 \div 2} = \emptyset;$$

2) *если* $p^\alpha \geqslant 2$, *то (под знаком* $\div$ *понимается деление нацело)*

$$y^\alpha_1(t) \neq x^\alpha_i(t), t \in (\tau^\alpha_{2p}, \tau^\alpha_{2p+2}), p = 0, 1, \dots, p^\alpha \div 2 - 1;$$

3) $v^\alpha(\tau) \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n]$, $\tau \in \{\tau^\alpha_p\}_{p=0}^{p^\alpha}$.

Лемма 3.5. [7, лемма 5] *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда при любых допустимых управлениях* $u_i(t)$ *преследователей* P_i *либо* $p^\alpha < \infty$ *и* $\tau^\alpha_{p^\alpha} = \infty$, *либо* $\lim\limits_{p\to\infty} \tau^\alpha_p = \infty$.

Из лемм 3.4 и 3.5 следует, что определенные по (3.9) функции v^α

$$v^\alpha(t) \in [\delta^\alpha, \delta^\alpha + 2\rho^\alpha n] \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{3.10}$$

Таким образом, полностью определена стратегия убегающего E_1: в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ убегающий E_1 по (3.9) определяет $v^1(t)$ и $v^2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $v(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда в игре* Γ *при* $m = 1$ *происходит уклонение от встречи в конусе из любых начальных позиций.*

Доказательство. Докажем, что стратегия убегающего (3.9):

1) управление $v(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ является допустимым;

2) $y_1(t) \in C_1$ для всех $t \in [t_0, \infty)$;

3) $x_i(t) \neq y_1(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

1) Управление $v(t)$, $t \in [t_0, \infty)$ из класса кусочно-постоянных функций и меняет свое значение в моменты $\tau \in \{\tau^1_p\}_{p=0}^{p^1} \bigcup \{\tau^2_p\}_{p=0}^{p^2}$. В силу (3.10), (3.1)

$$|v(t)| = \sqrt{(v^1(t))^2 + (v^2(t))^2} \leqslant \sqrt{(\delta^1 + 2\rho^1 n)^2 + (2\rho^2 n)^2} \leqslant \gamma.$$

2) Применяя (3.10) и (3.1) получим, что

$$v^2(t)/v^1(t) \leqslant 2\rho^2 n/\delta^1 \leqslant \operatorname{tg}\theta,$$

откуда $v^2(t) \leqslant v^1(t)\operatorname{tg}\theta$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Из последнего неравенства следует справедливость утверждения.

3) Утверждение следует из лемм 3.4 и 3.5.

Эти три утверждения полностью доказывают теорему. $\square$

Отметим, что в данной работе вопросы о существовании и оценке минимального гарантированного расстояния до убегающих не рассматриваются.

3.2. Случай $m \geqslant 2$

На основе стратегии уклонения в конусе для одного убегающего построим стратегию уклонения в конусе для группы жестко скоординированных убегающих.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда в игре* Γ *происходит уклонение от встречи в конусе из любых начальных позиций.*

Доказательство. В пространстве R^k определим вспомогательную игру Γ_1 $nm+1$ лиц: nm преследователей P_i^j и убегающего E. Закон движения каждого из преследователей P_i^j имеет вид

$$\ddot{x}_{ij} + f_i(\dot{x}_{ij}, x_{ij}, t) = u_i, \quad |u_i| \leqslant \alpha_i.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v_1, \quad |v_1| \leqslant \gamma.$$

При $t = t_0$ заданы начальные условия

$$x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0 = X_i^0 - Y_j^0, \dot{x}_{ij}(t_0) = X_i^1, y(t_0) = Y^0 = 0.$$

Отметим, что $X_{ij}^0 \neq Y^0$. Убегающий E не покидает пределы конуса

$$C = \left\{z \in R^k : \langle z - z_0, e\rangle = 0, |z - z_0| \leqslant a \operatorname{tg}\theta, z_0 = Y^0 + ae, a \geqslant 0\right\}.$$

В данной вспомогательной игре Γ_1 преследователи действуют следующим образом: в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ каждый из преследователей P_i^j использует одно и то же управление $u_i(t)$, выбранное преследователем P_i в игре Γ.

Пусть $v_1(t)$ – управление, обеспечивающее уклонение от встречи в игре Γ_1, выбранное убегающим E в момент времени t. Определяем управление убегающих E_j в игре Γ в каждый момент времени $t \geqslant t_0$ следующим образом: $v(t) = v_1(t)$.

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 3.1 следует справедливость этой теоремы. $\square$

4. Уклонение от встречи

Используя управление, обеспечивающее уклонение в конусе, построим допустимое управление обеспечивающее уклонение от встречи из любых начальных позиций.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда в игре* Γ *происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.*

Доказательство. В пространстве R^k определим вспомогательную игру Γ_2 $n+m$ лиц: n преследователей P_i^1 и m убегающих E_j^1. Закон движения каждого из преследователей P_i^1 имеет вид

$$\ddot{x}_i + f_i(\dot{x}_i, x_i, t) = u_i, \quad |u_i| \leqslant \alpha_i.$$

Закон движения каждого из убегающих E_j^1 имеет вид

$$\dot{y}_j = \widehat{v}, \quad |\widehat{v}| \leqslant \gamma.$$

При $t = \widehat{t_0} \geqslant t_0$ заданы начальные условия

$$x_i(\widehat{t_0}) = \widehat{X}_i^0, \ \dot{x}_i(\widehat{t_0}) = \widehat{X}_i^1, \ y_j(\widehat{t_0}) = \widehat{Y}_j^0, \text{причем } \widehat{X}_i^0 \neq \widehat{Y}_j^0 \text{ для всех } i, j.$$

Предполагается, что убегающий E_j^1 не покидает пределы конуса

$$\widehat{C}_j = \big\{ z \in R^k : \langle z - z_j, e \rangle = 0, |z - z_j| \leqslant a, z_j = \widehat{Y}_j^0 + a\widehat{e}, a \geqslant 0 \big\},$$

где $\widehat{e}$ – единичный вектор пространства R^k.

В данной вспомогательной игре Γ_2 преследователи действуют следующим образом: в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ каждый из преследователей P_i^1 использует одно и то же управление $u_i(t)$, выбранное преследователем P_i в игре Γ.

Пусть $\widehat{v}(t) = \widehat{v}(t, \widehat{t}_0, \widehat{X}_i^0, \widehat{X}_i^1, \widehat{Y}_j^0, \widehat{e})$ – управление, обеспечивающее уклонение в конусе в игре Γ_2, выбранное убегающими E_j^1 в момент $t \geqslant \widehat{t}_0$.

Определяем управление $v(t)$ убегающих E_j в игре Γ :

$$\left.\begin{array}{ll}
0) & v(t) = \widehat{v}\left(t, t_0, X_i^0, X_i^1, Y_j^0, \dfrac{Y_1^0 - X_1^0}{|Y_1^0 - X_1^0|}\right), \ t \in [t_0, t_1], \\
& t_1 > t_0 - \text{момент, когда впервые } y_1(t_1) \in \partial\mathfrak{D}(Y_1^0, r_0); \\
p) & v(t) = \widehat{v}\left(t, t_p, x_i(t_p), \dot{x}_i(t_p), y_j(t_p), \dfrac{Y_1^0 - y_1(t_p)}{|Y_1^0 - y_1(t_p)|}\right), t \in (t_p, t_{p+1}] \\
& t_{p+1} > t_p - \text{момент, когда впервые } y_1(t_{p+1}) \in \partial\mathfrak{D}(Y_1^0, r_0), \\
& \text{здесь } p = 1, 2, 3, \ldots
\end{array}\right\}$$

Из построения управления $v(t)$ и теоремы 3.2 следует справедливость данной теоремы. $\square$

Пример 4.1. Рассмотрим игру Γ_3 вида (2.1), где

$$k \geqslant 2, \alpha_i = \frac{1}{2}, \ f_i(\dot{x}_i, x_i, t) = \frac{1}{2}\widehat{\sin}(\dot{x}_i),$$

через $\widehat{\sin}(a)$ для всех $a = (a^1, a^2, \ldots, a^k)^{\mathrm{T}} \in R^k$ обозначена функция

$$\widehat{\sin}(a) = (\sin(a^1), \sin(a^2), \ldots, \sin(a^k))^{\mathrm{T}}.$$

Отметим, что предположение 2.1 выполнено, $\beta_i = \dfrac{1}{2}$. Кроме того, функции $f_i(\dot{x}_i, x_i, t)$ являются непрерывно-дифференцируемыми по совокупности аргументов, а их производные по всем переменным ограниченны. Следовательно, данные функции $f_i(\dot{x}_i, x_i, t)$ удовлетворяют условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях преследователей. Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.1.

Утверждение 4.1. *В игре Γ_3 происходит уклонение от встречи из любых начальных позиций.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских А.И. *Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов* // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 143–149.

2. Благодатских А.И. *О мягком убегании группы скоординированных убегающих* // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып. 6. С. 993–1002.

3. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* М.: Изд-во МГУ, 1990.

4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Изд-во Наука, 1974.

5. Петросян Л.А. *Дифференциальные игры преследования.* Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1977.

6. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. *О квазилинейных дифференциальных играх убегания* // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1046–1052.

7. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. *Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления.* Ташкент: Фан, 2000.

8. Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы.* Киев: Наук. думка, 1992.

EVASION OF RIGIDLY COORDINATED ESCAPING OBJECTS WITH PHASE CONSTRAINTS

Aleksandr I. Blagodatskikh, Faculty of Mathematics Udmurt State University, Cand.Sc., assoc.prof. (aiblag@mail.ru).

Abstract: In the problem of pursuit of rigidly coordinated escaping objects by a group of inertial objects, a control guaranteeing evasion is constructed.

Keywords: differential game, group pursuit, evasion, phase constraints.