

УДК 519.83

ББК 22.18

А-РАВНОВЕСИЕ И НЕЧЕТКОЕ А-ЯДРО В МОДЕЛИ ЧИСТОГО ОБМЕНА С ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

ВАЛЕРИЙ А. ВАСИЛЬЕВ*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр-кт акад. Коптюга, 4
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

В работе предлагается конкретизация «альтруистического равновесия» Бержа [5] применительно к моделям чистого обмена с экстерналиями, отличающимся от классических рынков учетом внешних воздействий на предпочтения экономических агентов. В терминах нечеткого доминирования получено описание различных аналогов равновесия Бержа в моделях с экстерналиями, дающее кооперативную характеристику таким явлениям, как альтруизм и его комбинации со стандартным экономическим эгоизмом.

Ключевые слова: модель обмена с экстерналиями, равновесие Бержа, равновесие Нэша, А-равновесие, нечеткое А-ядро.

1. Введение

Понятие А-равновесия, изучаемое в настоящей заметке, является, в общих чертах, одной из возможных конкретизаций «альтруистического равновесия» применительно к моделям чистого обмена с экстерналиями [2,3]. Напомним, что концепция «всеобщей самоотверженности», отвечающая, по контрасту с нэшевским подходом, гипотезе об альтруистическом поведении участников, была предложена

К. Бержем [5]. Формализация концепции Бержа для одного класса дифференциальных игр была дана В.И. Жуковским в работах [2,8] (см. также библиографию к статье [9]). Что касается использования равновесия Бержа в классическом равновесном экономическом анализе, то здесь, как и в 50-х годах прошлого века, вопрос о востребованности нового понятия равновесия остается открытым (см. комментарий к монографии [5] в обзоре М. Шубика [6] – крупного специалиста в области приложения теории игр в экономических исследованиях). В настоящей работе предлагается конкретизация некоторых аналогов равновесия Бержа применительно к моделям чистого обмена с экстерналиями [2,3], отличающимся от классических рынков учетом внешних воздействий на предпочтения экономических агентов. В моделях с экстерналиями вводится понятие A -равновесия, обобщающее равновесие по Вальрасу-Нэшу, и в терминах нечетких A -ядер устанавливается кооперативная характеристика таких явлений, как альтруизм, и его комбинации со стандартным экономическим эгоизмом. Проводимый анализ осуществляется в рамках развиваемого автором общего подхода, опирающегося на двойственное описание равновесных состояний [7] и систематическое использование нечеткого блокирования, адекватного рассматриваемой концепции экономического равновесия.

Предваряя формальное описание A -равновесия и нечеткого A -ядра, приведем используемый далее аналог равновесия Бержа в бескоалиционной игре n лиц. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – множество участников бескоалиционной игры n лиц, располагающих непустыми множествами стратегий \mathcal{X}_i и функциями выигрыша $f_i : \mathcal{X} = \prod_{j \in N} \mathcal{X}_j \rightarrow \mathbf{R}$, $i \in N$. Как и в [9], рассматриваемый аналог равновесия Бержа [5] имеет следующий вид (всюду далее через $(y_i, x_{N \setminus \{i\}}) \in \prod_{j \in N} \mathcal{X}_j$ обозначается ситуация $z = (z_j)_{j \in N} \in \mathcal{X}$, для которой выполняются равенства: $z_i = y_i$ и $(z_j)_{j \neq i} = x_{N \setminus \{i\}}$).

Определение 1.1. Ситуацию $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathcal{X}$ будем называть равновесием Бержа игры $\Gamma = (N, \{\mathcal{X}_i, f_i\}_{i \in N})$, если выполняется условие

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x_{N \setminus \{i\}}, \bar{x}_i)$$

для всех $i \in N$ и $x_{N \setminus \{i\}} \in \mathcal{X}_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} \mathcal{X}_j$.

Как видно из определения 1.1., равновесие по Бержу формализует альтруистический тип поведения: при фиксированной собственной стратегии \bar{x}_i каждый участник $i \in N$ получает наибольший уровень полезности там, где достигается наилучшая (с его точки зрения) игровая ситуация для остальных игроков. При этом готовность действовать на пользу другим простирается вплоть до полного отказа от собственных интересов: определение не исключает того, что некоторые (может быть, даже и любые) отклонения игрока i от собственной стратегии \bar{x}_i строго увеличивают его выигрыш. Не углубляясь в содержательный анализ определения 1.1., отметим лишь, что равновесие Бержа отнюдь не является автоматически Парето оптимальной ситуацией (представление об интересах других может быть и ошибочным у некоторых самоотверженных игроков). Кроме того, следует подчеркнуть, что по представлению о стабильности ситуаций равновесие Бержа резко отличается от классического равновесия Нэша. Именно, если через \mathcal{A}^B и \mathcal{A}^N обозначить коалиционные структуры, определяющие группы участников, влияющих на стабильность состояния игроков $1, \dots, n$ в равновесии по Бержу и по Нэшу, то получаем следующее описание этих структур:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^B &= (N \setminus \{1\}, N \setminus \{2\}, \dots, N \setminus \{n\}), \\ \mathcal{A}^N &= (\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}). \end{aligned}$$

Замечание 1.1. Интересно отметить, что при $n = 2$ каждое равновесие Бержа является равновесием Нэша подходящей игры двух лиц (верно и обратное утверждение). Так, каждое равновесие Бержа в игре $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2; f_1, f_2)$ является равновесием Нэша в игре $(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2; g_1, g_2)$, где $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{X}_2$, $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{X}_1$; $g_1 = f_2$, $g_2 = f_1$.

Сопоставим каждому игроку $i \in N$ какое-либо непустое подмножество $\mathcal{A}_i \subseteq N$ и положим

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n).$$

Естественным обобщением равновесий Нэша и Бержа представляется следующее решение, задающее принцип оптимальности, в некотором смысле промежуточный между альтруизмом и эгоизмом.

Определение 1.2. Ситуацию $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathcal{X}$ назовем A -равновесием игры $\Gamma = (N, \{\mathcal{X}_i, f_i\}_{i \in N})$, если выполняется условие

$$f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq f_i(x_{\mathcal{A}_i}, \bar{x}_{N \setminus \mathcal{A}_i}) \quad \text{для всех } i \in N \text{ и } x_{\mathcal{A}_i} \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}_i},$$

где, как обычно, $x_S = (x_i)_{i \in S}$ и $\mathcal{X}_S = \prod_{i \in S} \mathcal{X}_i$ для всех $S \subseteq N$.

Введенное в определении 1.2 теоретико-игровое решение заслуживает и самостоятельного исследования. Однако рамки и цель настоящей работы ограничивают дальнейшие рассмотрения важной конкретизацией предложенного решения – понятием A -равновесия в моделях чистого обмена с экстерналиями. Что касается изучаемой далее проблемы эквивалентности ядер и равновесий, то помимо большой актуальности сравнительного анализа кооперативных и бескоалиционных механизмов согласования экономических интересов (см., например, [4,7]), другой весомой причиной проводимого исследования является возможность развития новых, теоретико-игровых методов отыскания условий существования A -равновесий. Особое значение развитие таких методов имеет в случае, когда традиционные средства (типа известной геометрической леммы Гейла-Никайдо-Дебре [4]) неприменимы. Именно эта ситуация имеет место для A -равновесий. Причина в том, что за исключением семейства одно-элементных множеств A_i , в рассматриваемой модели обмена с экстерналиями нарушаются условия сепарабельности отображения спроса (ввиду наличия одинаковых A -значимых аргументов у функций полезности некоторых неодинаковых участников). Ясно, что развитие вышеупомянутых теоретико-игровых методов предполагает дальнейший анализ A -ядер, что уже выходит за пределы данного исследования.

2. Основные определения

Зафиксируем множество $N = \{1, \dots, n\}$ экономических агентов рассматриваемой модели обмена и введем стандартные обозначения ее параметров: l – число продуктов, участвующих в обмене, $X_i \subseteq \mathbf{R}^l$ – потребительское множество агента $i \in N$, $X := \prod_{i \in N} X_i$ – совокупность распределений модели обмена, $w^i \in X_i$ – начальный запас, а $u_i : X \rightarrow \mathbf{R}$ – функция полезности агента $i \in N$. Как обычно, будем предполагать, что число экономических агентов (участников – для краткости) не менее двух.

Определение 2.1. [3] *Моделью чистого обмена с экстерналиями называется модель экономического обмена \mathcal{E} , определяемая следующими параметрами*

$$\mathcal{E} = \langle L, N, \{u_i, w^i\}_{i \in N} \rangle, \quad (2.1)$$

где $L = \{1, \dots, l\}$ – совокупность продуктов, $N = \{1, \dots, n\}$ – совокупность экономических агентов, $u_i : (\mathbf{R}_+^l)^n \rightarrow \mathbf{R}$ – их функции полезности, а $w^i \in \mathbf{R}_+^l$ – начальные запасы этих участников.

Модель чистого обмена с экстерналиями отличается от стандартной модели экономического обмена по двум пунктам: во-первых, все потребительские множества X_i участников совпадают с положительным ортантом ($X_i = \mathbf{R}_+^l$ для всех $i \in N$), а во-вторых (и это более существенное отличие), значение функции полезности каждого экономического агента u_i определяется не только объемом его собственного потребления x^i , но, вообще говоря, и объемами потребления x^j , $j \neq i$, других участников обмена ($u_i(x) = u_i(x^1, \dots, x^n)$, $x^1, \dots, x^n \in \mathbf{R}_+^l$).

Сопоставим каждому из участников $i \in N$ модели (2.1) коалицию A_i (для простоты предполагается, что все A_i непустые, но при этом некоторые участники i могут не принадлежать «своей» коалиции A_i , в частности, допускается, что $i \notin A_i$ для всех $i \in N$). Семейство $A = (A_i)_{i \in N}$ будем называть *A*-системой (модели \mathcal{E}). Далее, определим бюджетные множества экономических агентов при ценах \bar{p} в условиях, когда уровни полезности, достижимые участниками $i \in N$ определяются объемами потребления агентов из множеств A_i . Ниже и всюду в дальнейшем для любых двух распределений $x = (x^i)_{i \in N}$, $y = (y^i)_{i \in N}$ из $(\mathbf{R}_+^l)^n$ и коалиции $S \subseteq N$ через $(x^S, y^{N \setminus S})$ будем обозначать распределение $z = (z^i)_{i \in N}$ с компонентами $z^i = x^i$ при $i \in S$ и $z^j = y^j$ при $j \in N \setminus S$. В указанных обозначениях бюджетные множества $B_i^A(\bar{p}, \bar{x})$ участников $i \in N$ определяются формулой

$$B_i^A(\bar{p}, \bar{x}) := \{(x^{A_i}, \bar{x}^{N \setminus A_i}) \in X \mid \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x^j \leq \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j\}, \quad i \in N. \quad (2.2)$$

Как вытекает из формулы (2.2), бюджетное множество $B_i^A(\bar{p}, \bar{x})$ указывает суммарное потребление коалиции A_i , доступное ей в состоянии $\bar{x} \in X$ при ценах \bar{p} и суммарном коалиционном запасе $\sum_{j \in A_i} w^j$.

Определение 2.2. *A-равновесием модели \mathcal{E} будем называть пару (\bar{p}, \bar{x}) , где $\bar{p} \in \mathbf{R}^1$ – вектор цен, а $\bar{x} = (\bar{x}^i)_{i \in N} \in (\mathbf{R}_+^l)^n$ – распределение продуктов в экономике \mathcal{E} , удовлетворяющие условиям:*

$$(W^A.1) \sum_{i \in N} \bar{x}^i = \sum_{i \in N} w^i;$$

$$(W^A.2) \bar{x} \in B_i^A(\bar{p}, \bar{x}), \quad i \in N;$$

$$(W^A.3) u_i(\bar{x}) = \max\{u_i(x^{A_i}, \bar{x}^{N \setminus A_i}) \mid (x^{A_i}, \bar{x}^{N \setminus A_i}) \in B_i^A(\bar{p}, \bar{x})\}, \quad i \in N.$$

Цены \bar{p} , фигурирующие в равновесной паре (\bar{p}, \bar{x}) , будем называть *A-равновесными ценами*, а распределение \bar{x} – *A-равновесным распределением модели \mathcal{E}* . Совокупность *A-равновесных распределений модели \mathcal{E}* будем обозначать через $W^A(\mathcal{E})$.

Всюду в дальнейшем через $X(N)$ будем обозначать множество сбалансированных распределений модели \mathcal{E} :

$$X(N) = \{x = (x^1, \dots, x^n) \in X \mid \sum_{i \in N} x^i = \sum_{i \in N} w^i\}.$$

Замечание 2.1. Ясно, что равновесие, отвечающее коалиционной структуре $A^N = (\{1\}, \dots, \{n\})$, совпадает с классическим равновесием Вальраса в модели обмена с экстерналиями: пара (\bar{p}, \bar{x}) является вальрасовским равновесием модели \mathcal{E} , если $\bar{p} \cdot \bar{x}^i \leq \bar{p} \cdot w^i$ для каждого $i \in N$, и при этом

$$u_i(\bar{x}) = \max\{u_i(x^i, \bar{x}^{N \setminus \{i\}}) \mid (x^i, \bar{x}^{N \setminus \{i\}}) \in B_i^N(\bar{p}, \bar{x})\}, \quad i \in N,$$

где

$$B_i^N(\bar{p}, \bar{x}) = \{(x^i, \bar{x}^{N \setminus \{i\}}) \in X \mid \bar{p} \cdot x^i \leq \bar{p} \cdot w^i\}, \quad i \in N.$$

Что касается аналога альтруистического равновесия Бержа, отвечающего коалиционной структуре $A^B = (N \setminus \{1\}, \dots, N \setminus \{n\})$, то его определение имеет следующий вид: пара (\bar{p}, \bar{x}) является *равновесием Бержа модели \mathcal{E}* , если $\bar{p} \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \bar{x}^j \leq \bar{p} \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i\}} w^j$ для каждого $i \in N$, и при этом

$$u_i(\bar{x}) = \max \{u_i(x^{N \setminus \{i\}}, \bar{x}^i) \mid (x^{N \setminus \{i\}}, \bar{x}^i) \in B_i^B(\bar{p}, \bar{x})\}, \quad i \in N,$$

где

$$B_i^B(\bar{p}, \bar{x}) = \{(x^{N \setminus \{i\}}, \bar{x}^i) \in X \mid \bar{p} \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x^j \leq \bar{p} \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i\}} w^j\}, \quad i \in N.$$

Для кооперативной характеристики *A*-распределений введем понятие *A*-доминирования. Напомним [4], что нечеткими коалициями называются векторы $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{R}^N$, удовлетворяющие условиям: $\tau \neq 0$ и $\tau_i \in [0, 1]$ для всех $i \in N$. Совокупность нечетких коалиций обозначим через σ_F . Положим $X^{A_i} := \prod_{j \in A_i} X_j$, $i \in N$. Как обычно, через $N(\tau)$ будем обозначать носитель нечеткой коалиции τ :

$$N(\tau) := \{i \in N \mid \tau_i > 0\}.$$

Наконец, для каждого $i \in N$ через D_i^A обозначим множество всех участников, чьи функции полезности «зависят» от объема потребления экономического агента i :

$$D_i^A := \{j \in N \mid i \in A_j\}, \quad i \in N.$$

Далее сумма пустого множества векторов полагается равной нулевому вектору надлежащей размерности.

Определение 2.3. Будем говорить, что коалиция $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \sigma_F$ *A*-доминирует распределение $\bar{x} = (\bar{x}^i)_{i \in N} \in X(N)$, если существуют коалиционные распределения $x_{(i)}^A := (x_{(i)}^{A,j})_{j \in A_i} \in X^{A_i}$, $i \in N(\tau)$, такие, что

$$(C_F^A.1) \quad u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in N(\tau),$$

$$(C_F^A.2) \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in D_i^A(\tau)} \tau_j x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i,$$

где

$$D_i^A(\tau) := D_i^A \cap N(\tau), \quad \tau_i^A = \sum_{j \in D_i^A(\tau)} \tau_j, \quad i \in N.$$

Определение 2.4. Совокупность всех сбалансированных распределений, которые не могут быть *A*-доминированы никакой нечеткой коалицией, будем обозначать через $C_F^A(\mathcal{E})$ и называть нечетким *A*-ядром модели \mathcal{E} .

Замечание 2.2. Для прямого сопоставления обычного доминирования (блокирования) по стандартной коалиции в обычной неоклассической модели обмена и *A*-доминирования по стандартной коалиции в модели с экстерналиями переформулируем (с надлежащими модификациями) определение 2.3 на случай нечеткой коалиции вида

$\tau = e^S$, где e^S – «изображение» обычной коалиции $S \subseteq N$ в виде соответствующей индикаторной функции: $(e^S)_i = 1$ при $i \in S$ и $(e^S)_i = 0$ при $i \in N \setminus S$. Именно, будем говорить, что коалиция $S \subseteq N$ A -доминирует распределение $\bar{x} \in X(N)$ в модели (2.1), если для каждого $i \in S$ существуют коалиционные распределения $x_{(i)}^A := (x_{(i)}^{A,j})_{j \in A_i} \in X^{A_i}$ такие, что

$$(C^A.1) \quad u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in S,$$

$$(C^A.2) \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in D_i^A(S)} x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} k_i^A(S) w^i,$$

где

$$D_i^A(S) := \{j \in S \mid i \in A_j\}, \quad k_i^A(S) := |D_i^A(S)|, \quad i \in N.$$

Как и классические вальрасовские распределения в моделях без экстерналий (внешних влияний), A -равновесные распределения являются коалиционно устойчивыми без каких-либо специальных предположений о параметрах модели \mathcal{E} . Коалиционная устойчивость при этом понимается в смысле устойчивости относительно A -доминирования.

Теорема 2.1. *Для любой модели обмена с экстерналиями справедливо вложение*

$$W^A(\mathcal{E}) \subseteq C_F^A(\mathcal{E}). \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть \bar{x} – произвольное A -равновесное распределение модели \mathcal{E} , а \bar{p} – отвечающие ему A -равновесные цены. Допуская, что \bar{x} доминируется какой-либо нечеткой коалицией τ , имеем: существуют коалиционные распределения $x_{(i)}^A = (x_{(i)}^{A,j})_{j \in A_i} \in X^{A_i}$, $i \in N(\tau)$, такие, что

$$u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in N(\tau),$$

и при этом выполняется равенство

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in D_i^A(\tau)} \tau_j x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i.$$

В силу определения A -равновесия из неравенств $u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x})$ вытекает, что распределения $(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i})$ не принадлежат

бюджетным множествам $B_i^A(\bar{p}, \bar{x})$ ни при каких $i \in N(\tau)$. Но это означает, что справедливы неравенства

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x_{(i)}^{A,j} > \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j, \quad i \in N(\tau).$$

Умножая каждое из этих неравенств на соответствующую компоненту вектора τ , и суммируя получившиеся неравенства, имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_{i \in N} \sum_{j \in D_i^A(\tau)} \tau_j x_{(j)}^{A,i} > \bar{p} \cdot \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i.$$

Но полученное неравенство противоречит принятому предположению

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in D_i^A(\tau)} \tau_j x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i.$$

Найденное противоречие и доказывает справедливость теоремы. □

3. Теорема эквивалентности

Одно из важнейших свойств предложенного *A*-доминирования заключается в том, что вложение, противоположное соотношению (2.3), имеет место при дополнительных предположениях, аналогичных тем, что фигурируют в классической теореме эквивалентности для моделей без экстерналий (см., например, [4]). Единственное серьезное исключение составляет, как показывается ниже, условие *B*-сбалансированности семейства *A*. Напомним, что семейство $\mathcal{S} = (S_k)_{k \in K}$ называется (*B*)-сбалансированным (сбалансированным по Бондаревой), если существуют неотрицательные коэффициенты (веса) $\lambda_k, k \in K$, для которых выполняется равенство «разбиения единицы»: $\sum_{k \in K} \lambda_k e^{S_k} = e^N$, где, как и ранее, e^S – индикаторная функция множества $S \subseteq N$.

В указанной терминологии справедлива следующая кооперативная характеристика *A*-равновесных распределений (ниже запись $a \gg 0$ означает, что все компоненты вектора *a* положительны).

Теорема 3.1. *Если система $A = (A_i)_{i \in N}$ является (*B*)-сбалансированной, потребительские множества X_i всех экономических агентов совпадают с положительным ортантом \mathbf{R}_+^l , функции полезности u_i – вогнутые, непрерывные и строго возрастающие на*

$X^{A_i} = \prod_{j \in A_i} X_j$, а начальные запасы $w^i \in \mathbf{R}_+^l$ таковы, что все l продуктов представлены на рынке (то есть $\sum_{i \in N} w^i \gg 0$), то справедливо равенство

$$W^A(\mathcal{E}) = C_F^A(\mathcal{E}). \quad (3.1)$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 для доказательства равенства (3.1) достаточно установить вложение $C_F^A(\mathcal{E}) \subseteq W^A(\mathcal{E})$. Поэтому займемся сначала характеристикой элементов A -ядра модели \mathcal{E} в условиях, фигурирующих в доказываемой теореме. Введем необходимые обозначения. Для каждого $i \in N$ и $\bar{x} \in X(N)$ положим

$$\mathcal{M}_i^A(\bar{x}) := \left\{ \sum_{j \in A_i} x_{(i)}^{A,j} \mid x_{(i)}^A = (x_{(i)}^{A,j})_{j \in A_i} \in \prod_{j \in A_i} X_j : \right. \\ \left. u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x}) \right\} - \left\{ \sum_{j \in A_i} w^j \right\}.$$

Отметим сразу же, что в силу того, что функции u_i являются строго возрастающими по всем аргументам с индексами из $A_i \times L$, множества $\mathcal{M}_i^A(\bar{x})$ непусты для каждого $i \in N$. Кроме того, ввиду вогнутости функций u_i по этим же аргументам, все множества $\mathcal{M}_i^A(\bar{x})$ являются выпуклыми. По аналогии с построениями из [7], введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{M}^A(\bar{x}) := \left\{ \sum_{i \in N} \tau_i z^i \mid z^i \in \mathcal{M}_i^A(\bar{x}), i \in N, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \sigma_F \right\}. \quad (3.2)$$

Непосредственно из формулы (3.2) вытекает, что необходимое и достаточное условие недоминируемости распределения \bar{x} никакой нечеткой коалицией заключается в отсутствии нулевого элемента во множестве $\mathcal{M}^A(\bar{x})$:

$$\bar{x} \in C_F^A(\mathcal{E}) \iff 0 \notin \mathcal{M}^A(\bar{x}). \quad (3.3)$$

Ограничимся проверкой импликации $\bar{x} \in C_F^A(\mathcal{E}) \Rightarrow 0 \notin \mathcal{M}^A(\bar{x})$. Допустим, что $\bar{x} \in C_F^A(\mathcal{E})$ и при этом 0 принадлежит множеству $\mathcal{M}^A(\bar{x})$. В силу формулы (3.2) получаем: существует нечеткая коалиция $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ и коалиционные распределения $x_{(i)}^A = (x_{(i)}^{A,j})_{j \in A_i}$, $i \in N$, такие, что

$$u_i(x_{(i)}^A, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in N,$$

и при этом выполняется равенство

$$\sum_{i \in N} \tau_i \sum_{j \in A_i} (x_{(i)}^{A,j} - w^j) = 0. \quad (3.4)$$

Осуществляя необходимые элементарные преобразования, из равенства (3.4) получаем соотношение $\sum_{i \in N} \sum_{j \in A_i} \tau_j x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i$. Отсюда, с учетом неравенств, касающихся функций полезности, получаем: коалиция τ доминирует распределение \bar{x} . Но это противоречит предположению о недоминируемости распределения \bar{x} .

Еще одно полезное свойство множества $\mathcal{M}^A(\bar{x})$, заключается в том, что при вогнутости функций u_i по переменным с индексами из $A_i \times L$ оно выпуклое. Действительно, выпуклость множеств $\mathcal{M}_i^A(\bar{x})$ при вогнутости функций u_i по указанным переменным следует непосредственно из построения этих множеств. Что касается множества $\mathcal{M}^A(\bar{x})$, то рассматривая произвольные элементы $z = \sum_{i \in N} \tau_i z^i$, $\tilde{z} = \sum_{i \in N} \tilde{\tau}_i \tilde{z}^i$ из $\mathcal{M}^A(\bar{x})$ и число μ из интервала $(0, 1)$, получаем

$$\mu z + (1 - \mu)\tilde{z} = \sum_{i \in N \setminus N_0} \tau_i^0 \left[\frac{\mu \tau_i}{\tau_i^0} z^i + \frac{(1 - \mu)\tilde{\tau}_i}{\tau_i^0} \tilde{z}^i \right], \quad (3.5)$$

где $N_0 = \{i \in N \mid \tau_i = \tilde{\tau}_i = 0\}$, $\tau_i^0 = \mu \tau_i + (1 - \mu)\tilde{\tau}_i$, $i \in N$. Полагая $z_{(0)} := \mu z + (1 - \mu)\tilde{z}$, на основе вышесказанного имеем: $z_{(0)} = \sum_{i \in N} \tau_i^0 z_{(0)}^i$, где $z_{(0)}^i = \frac{\mu \tau_i}{\tau_i^0} z^i + \frac{(1 - \mu)\tilde{\tau}_i}{\tau_i^0} \tilde{z}^i$ для всех $i \in N \setminus N_0$ и $z_{(0)}^j = \frac{1}{2} z^j + \frac{1}{2} \tilde{z}^j$ при $j \in N_0$. Поскольку величины $\frac{\mu \tau_i}{\tau_i^0}$, $\frac{(1 - \mu)\tilde{\tau}_i}{\tau_i^0}$ неотрицательны и в сумме равны 1 при i из $N \setminus N_0$, соответствующие векторы $z_{(0)}^i$ (как и векторы $z_{(0)}^j$ при j из N_0) являются выпуклыми комбинациями векторов из множеств $\mathcal{M}_i^A(\bar{x})$. Следовательно, в силу отмечавшейся уже выпуклости последних, имеем: $z_{(0)}^i \in \mathcal{M}_i^A(\bar{x})$ для каждого $i \in N$. Таким образом, ввиду соотношения (3.5), справедливо представление: $z_{(0)} = \sum_{i \in N} \tau_i^0 z_{(0)}^i$, где $z_{(0)}^i \in \mathcal{M}_i^A(\bar{x})$ для каждого $i \in N$, а τ^0 , будучи выпуклой комбинацией нечетких коалиций, также является нечеткой коалицией (ввиду очевидной выпуклости множества σ_F). Наличие указанного представления и означает справедливость соотношения $z_{(0)} = \mu z + (1 - \mu)\tilde{z} \in \mathcal{M}^A(\bar{x})$.

Итак, в условиях теоремы множество $\mathcal{M}^A(\bar{x})$ выпуклое, и при этом, на основании соотношения (3.3), точка 0 не принадлежит $\mathcal{M}^A(\bar{x})$. Согласно известной теореме отделимости Минковского, найдется ненулевой вектор $\bar{p} \in \mathbf{R}^l$ такой, что

$$\bar{p} \cdot z \geq 0, \quad z \in \mathcal{M}^A(\bar{x}).$$

Отсюда, учитывая, что по построению множества $\mathcal{M}^A(\bar{x})$ справедливы вложения $\mathcal{M}_i^A(\bar{x}) \subseteq \mathcal{M}^A(\bar{x})$, $i \in N$, получаем

$$\bar{p} \cdot z^i \geq 0, \quad z^i \in \mathcal{M}_i^A(\bar{x}), \quad i \in N. \quad (3.6)$$

Согласно определению множеств $\mathcal{M}_i^A(\bar{x})$, соотношения (3.6) означают справедливость неравенств:

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x^j \geq \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j \quad \text{для всех } i \in N \text{ и } x^{A_i} \in \mathcal{P}_i^A(\bar{x}), \quad (3.7)$$

где

$$\mathcal{P}_i^A(\bar{x}) := \{x^{A_i} = (x^j)_{j \in A_i} \in X^{A_i} \mid u_i(x^{A_i}, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x})\}, \quad i \in N.$$

Покажем, что аналог неравенств (3.7) имеет место и для распределения \bar{x} . Именно, обозначая через e единичный l -мерный вектор $(1, \dots, 1)$, и полагая $x_{(m)} = (\bar{x}^1 + \frac{1}{m}e, \dots, \bar{x}^n + \frac{1}{m}e) \in X$, в силу строгого возрастания функций u_i и на основании неравенств (3.7) имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x_{(m)}^j \geq \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j \quad \text{для всех } i \in N \text{ и } m \geq 1. \quad (3.8)$$

Переходя в неравенствах (3.8) к пределу при m , стремящемся к бесконечности, получаем

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} \bar{x}^j \geq \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j \quad \text{для всех } i \in N. \quad (3.9)$$

Допустим, что хотя бы одно из соотношений (3.9) выполняется как строгое неравенство. Чтобы получить противоречие с этим предположением, напомним, что семейство $A = (A_i)_{i \in N}$ является (B) -сбалансированным: существуют неотрицательные числа λ_i такие, что

$$\sum_{i \in N} \lambda_i e^{A_i} = e^N. \quad (3.10)$$

Здесь, как и ранее, e^S – индикаторная функция множества $S \subseteq N$. Умножая неравенства (3.9) на соответствующие веса λ_i и складывая получающиеся соотношения, имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in D_i^A} \lambda_j \right) \bar{x}^i > \bar{p} \cdot \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in D_i^A} \lambda_j \right) w^i \quad (3.11)$$

(напомним, что D_i^A определяется формулой $D_i^A := \{j \in N \mid i \in A_j\}$). Поскольку, ввиду (3.10), выполняются равенства $\sum_{j \in D_i^A} \lambda_j = 1$, $i \in N$, соотношение (3.11) переписывается в виде $\bar{p} \cdot \sum_{i \in N} \bar{x}^i > \bar{p} \cdot \sum_{i \in N} w^i$.

Но последнее неравенство противоречит сбалансированности \bar{x} , определяемой условием $\sum_{i \in N} \bar{x}^i = \sum_{i \in N} w^i$.

Итак, на основании полученного противоречия имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} \bar{x}^j = \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j, \quad i \in N, \quad (3.12)$$

и, следовательно, распределение \bar{x} принадлежит каждому из бюджетных множеств $B_i^A(\bar{p}, \bar{x})$, $i \in N$. Для завершения доказательства равновесности распределения \bar{x} покажем сначала, что вектор \bar{p} – строго положительный. Нетрудно проверить, что все компоненты \bar{p} неотрицательные. Действительно, допуская, что $\bar{p}_k < 0$, получаем: $\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} (\bar{x}^j + e^k) < \bar{p} \cdot \sum_{j \in N} w^j$, что противоречит соотношениям (3.7), (3.12) и строгой монотонности функции u_i (здесь e^k – k -ый единичный орт). Допустим теперь, что $\bar{p}_k = 0$ для некоторого $k \in L$. Поскольку, по условию, вектор $\sum_{i \in N} w^i$ положителен, найдется набор \bar{x}^j такой, что $\bar{x}_k^j > 0$. Далее, ввиду того, что $\bar{p} \neq 0$ и $\bar{p} \geq 0$, для некоторого $r \in L$ выполняется неравенство $\bar{p}_r > 0$. Наконец, в силу равенства $\bigcup_{i \in N} A_i = N$, (вытекающего из (B)-сбалансированности семейства $A = (A_i)_{i \in N}$) существует $i \in N$ такой, что j содержится в A_i . С учетом вышесказанного и на основании указанных в теореме строгой монотонности и непрерывности функций полезности получаем: существует достаточно малое положительное число δ такое, что вектор $y^j = \bar{x}^j - a^{kr}$ неотрицателен и при этом $u_i(\tilde{x}^{A_i}, \bar{x}^{N \setminus A_i}) > u_i(\bar{x})$, где вектор a^{kr} имеет лишь две ненулевые координаты: $a_k^{kr} = -1$ и $a_r^{kr} = \delta$, а распределение \tilde{x}^{A_i} определяется формулой $\tilde{x}^j = y^j$ и $\tilde{x}^s = \bar{x}^s$ для остальных $s \in A_i$.

В силу (3.7) должно быть $\bar{p} \cdot \sum_{s \in A_i} \tilde{x}^s \geq \bar{p} \cdot \sum_{s \in A_i} w^s$. Однако на основании принятых предположений относительно вектора \bar{p} и ввиду формул (3.7) и (3.12) имеем: $\bar{p} \cdot \sum_{s \in A_i} \tilde{x}^s = \bar{p} \cdot \sum_{s \in A_i} \bar{x}^s - \bar{p}_r \delta < \bar{p} \cdot \sum_{s \in A_i} w^s$. Полученное неравенство противоречит соотношениям (3.7), что и доказывает строгую положительность вектора \bar{p} .

Завершая доказательство теоремы 3.1, покажем теперь, что для любого $i \in N$ и для любого распределения $x^{A_i} = (x^j)_{j \in A_i} \in \mathcal{P}_i^A(\bar{x})$ выполняется неравенство $\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x^j > \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j$, доказывающее, что элемент \bar{x} является максимальным относительно функции u_i в бюджетном множестве $B_i^A(\bar{p}, \bar{x})$. Допуская противное, на основании неравенств (3.7) получаем: $\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x^{A_i, j} = \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} w^j$ для некоторого $x^{A_i} = (x^{A_i, j})_{j \in A_i} \in \mathcal{P}_i^A(\bar{x})$. Ясно, что в силу строгой монотонности функции u_i по переменным с индексами из $A_i \times L$ распределение x^{A_i} не может быть нулевым. Пусть, например, ненулевой является компонента $x_k^{A_i, j}$ этого распределения. Учитывая непрерывность функции u_i , при достаточно малом $\delta > 0$ имеем: $(y^j)_{j \in A_i} \in \mathcal{P}_i^A(\bar{x})$ для распределения $(y^s)_{s \in A_i}$, где $y^j = x^{A_i, j} - \delta e^k$, а $y^s = x^{A_i, s}$ для всех других $s \in A_i$. Однако ввиду строгой положительности вектора \bar{p} будут выполняться соотношения

$$\bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} y^j = \bar{p} \cdot \sum_{j \in A_i} x^{A_i, j} - \delta \bar{p}_k < \sum_{j \in A_i} w^j,$$

противоречащие неравенствам (3.7). Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. \square

Замечание 3.1. Ясно, что обе коалиционные структуры A^N и A^B являются (B) -сбалансированными (весы для первой имеют вид $\lambda_i^N = 1$ для каждого $i \in N$; для второй: $\lambda_i^B = \frac{1}{n-1}$ для каждого $i \in N$). Поэтому в условиях теоремы 3.1 справедливы указываемые ниже критерии для равновесий Вальраса¹ и Бержа, соответственно:

(\mathcal{N}) Распределение $\bar{x} \in X(N)$ является равновесным по Вальрасу для модели с экстерналиями (2.1), если не существует нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ и наборов $x^i \in X_i$ таких, что

$$(\mathcal{N}.1) \quad u_i(x^i, \bar{x}^{N \setminus \{i\}}) > u_i(\bar{x}), \quad i \in N(\tau);$$

¹Употребляется также название «равновесие по Вальрасу-Нэшу».

$$(\mathcal{N}.2) \sum_{i \in N} \tau_i x^i = \sum_{i \in N} \tau_i w^i.$$

Что касается равновесия Бержа, то здесь формулировка критерия принимает следующий вид:

(\mathcal{B}) Распределение $\bar{x} \in X(N)$ является равновесным по Бержу для модели с экстерналиями (2.1), если не существует нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ и распределений $x_{(i)}^A = (x_{(i)}^{A,j})_{j \in N \setminus \{i\}} \in X^{N \setminus \{i\}}$ таких, что

$$(\mathcal{B}.1) u_i(x^{N \setminus \{i\}}, \bar{x}^i) > u_i(\bar{x}), \quad i \in N(\tau);$$

$$(\mathcal{B}.2) \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \tau_j x_{(j)}^{A,i} = \sum_{i \in N} \tau_i^A w^i,$$

где

$$\tau_i^A = \tau^A - \tau_i, \quad \tau^A := \sum_{i \in N} \tau_i.$$

Добавим, что самым коротким и «геометричным» необходимым условием равновесности является, по-видимому, следующее требование, отвечающее коалиционной структуре $A^T := (N, N, \dots, N)$: чтобы в предположениях теоремы 3.1 распределение $\bar{x} \in X(N)$ являлось «тотально-равновесным» (то есть *A*-равновесным для $A = A^T$), необходимо, чтобы распределение $w := (w^1, \dots, w^n)$ невозможно было представить в виде выпуклой комбинации распределений $x_{(i)} \in X = \prod_{j \in N} X_j$, $i \in N$, таких, что $u_i(x_{(i)}) > u_i(\bar{x})$ для каждого $i \in N$.

Что же касается критерия (необходимых и достаточных условий), то здесь вместо распределений w и $x_{(i)}$, $i \in N$, используются отвечающие им суммарные потребительские наборы $w^N := \sum_{i \in N} w^i$ и $x_{(i)}^N := \sum_{j \in N} x_{(i)}^j$, $i \in N$.

(\mathcal{T}) Распределение $\bar{x} \in X(N)$ является «тотально-равновесным» для модели с экстерналиями (2.1), если набор $w^N = \sum_{i \in N} w^i$ невозможно представить в виде выпуклой комбинации наборов $x_{(i)}^N = \sum_{j \in N} x_{(i)}^j$, $i \in N$, отвечающих распределениям $x_{(i)} \in X$ таким, что $u_i(x_{(i)}) > u_i(\bar{x})$ для всех $i \in N$.

В заключение отметим, что аналог теоремы 3.1 справедлив и для моделей с производством типа модели Эрроу-Дебре с экстерналиями. Этому и другим обобщениям теоремы 3.1 предполагается посвятить отдельную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры*. Киев: «Наукова Думка». 1994.
2. Маленво Э. *Лекции по микроэкономическому анализу*. М.: Наука. 1985.
3. Arrow K.J., Hahn F.H. *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden-Day. 1971.
4. Aubin J.-P. *Optima and equilibria*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 1993.
5. Berge C. *Théorie Générale des Jeux à n Personnes Games*. Paris: Gauthiers-Villars. 1957.
6. Shubik M. *Review: The general theory of n-person games by Claude Berge* // *Econometrica*. 1961. V. 29. N 4. P. 821.
7. Vasil'ev V.A. *On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets* // *Siberian Advances in Mathematics*. 1996. V. 6. N 3. P. 96–150.
8. Zukovskiy V.I., Salukvadze M.E. and Vaisman K.S. *The Berge equilibrium* // Preprint. Institute of Control Systems. Tbilisi. 1994.
9. Zukovskiy V.I., Sachkov S.N. and Smirnova L.N. *Berge Equilibrium* // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов VIII Международной школы-симпозиума АМУР-2014, Севастополь, 12–21 сентября / Симферополь: Изд-во ТНУ им. В.И.Вернадского (ред. А.В. Сигал). 2014. С. 124–133.

A-EQUILIBRIUM AND FUZZY *A*-CORE IN PURE EXCHANGE MODEL WITH EXTERNALITIES

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Dr.Sc., prof. (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: In the paper, a concept of *A*-equilibrium being a concretization of "altruistic" Berge equilibrium adapted to the pure exchange economy with externalities, is proposed. In terms of an appropriate fuzzy domination a cooperative characterization of *A*-equilibrium allocations is given, and an analog of the classic core equivalence theorem is established.

Keywords: pure exchange model with externalities, fuzzy *A*-core, Nash equilibrium, Berge equilibrium, *A*-equilibrium.