Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.1, с. 32–49

УДК 519.833, 339.144
ББК 22.18

СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЦЕНОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Наталья А. Гасратова
Мансур Г. Гасратов
Факультет прикладной математики –
– процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: gasratova_na@mail.ru, gasratovmans@mail.ru

Исследуется математическая модель процессов циклической перевозки для случая ценовой конкуренции. Рассматривается сеть из множества пунктов, в каждом из которых есть несколько компаний со своими складами. Предприятия поставляют и реализуют не вполне взаимозаменяемую продукцию, спрос на которую носит детерминированный характер. Это случай так называемых дифференцированных благ и потребитель способен покупать их по разным ценам. При моделировании систем управления каждым предприятием применяется релаксационный метод регулирования запасов с допущением дефицита. Для данной модели приведены условия существования равновесного решения.

Ключевые слова: логистические системы, ценовая конкуренция, внутренняя стратегия, внешняя стратегия, равновесие по Нэшу в чистых стратегиях, управление запасами.

---

1. Введение

Для многих производственных, дистрибьюторских компаний логистические системы составляют существенную часть совокупных расходов. Американский консультант в области логистики Герберт В. Дэвис (Herbert W. Davis), в течение нескольких лет исследовавший логистические издержки в промышленности Северной Америки на складирование, перевозку, управление распределением, управление запасами, в конечном итоге обнародовал результаты, по которым оказалось, что затраты, связанные с логистическими системами, составляют 7-16% процентов от совокупных доходов.

При этом доля логистических затрат продолжает возрастать в результате усложнения цепей поставок и возрастающих требований к качеству обслуживания. Более того, за последнее время практически во всех сферах коммерческой деятельности наблюдается ужесточение конкуренции. Разумеется, это требует увеличения издержек на повышение уровня качества реализуемой продукции, требует разрабатывать стратегические решения с учетом фактора конкурентной среды.

Одним из ключевых направлений логистических систем является задача циклической перевозки на сетях. Такие задачи без учета конкурентной среды рассмотрены в работах [6, 8–10]. Интересная задача циклических поставок с управлением запасами на сети исследована в [4]. В этой работе предполагается, что в системе управления запасами на каждом складе сети используется релаксационный метод регулирования без планирования дефицита [3].

Из современных работ в этой области можно привести статьи [11–19]. Как правило, в них проводятся исследования по поиску оптимального решения в задачах взаимодействия поставщиков и ритейлеров. В качестве решения используются различные равновесные ситуации. В некоторых из них рассматриваются олигополистические фирмы с сетями цепочки поставок, которые участвуют в производстве, хранении, распределении однородной продукции и исследуют парадокс объединения. Показаны равновесные модели сетевой цепочки поставок, связанные с конкурирующими фирмами до горизонтального слияния и также разработаны оптимизационные модели сетевой цепочки поставок после полного слияния. Регулирующей концепцией в задаче является равновесие Нэша.

В вышеприведенных работах не рассматриваются в отдельности процессы, связанные непосредственно с управлением материальными запасами (в частности затраты на хранение).

Целью данной работы является моделирование игровой задачи циклических перевозок на сети пунктов поставок и сбыта с учетом специфики управления запасами для каждого участника рынка. В качестве игровых стратегий используются цены, которые устанавливают фирмы на свою продукцию. Схожая модель рассматривается в работе [2], где игровыми/внешними стратегиями являются объемы поставок продукции на рынок. Основополагающей базой для настоящего исследования является работа [1].

2. Постановка задачи и описание модели

Рассматривается сеть из n пунктов, соединенных логистическими каналами. Предполагается, что в каждом пункте i $(i = 1, \ldots, n)$ есть N_i разных компаний. Всего различных компаний на всей сети N. Можно допустить, что в каждом пункте i есть N компаний, полагая, что параметры $N - N_i$ компаний, у которых нет складских систем в этом пункте (нет деятельности), принимают нулевые значения. Тогда индекс l (далее верхний индекс), означающий номер компании на сети, в каждом пункте будет принимать значения от 1 до N, т.е. $l = 1, \ldots, N$. В отличии от модели из [2] здесь рассматривается случай, когда продукция всех N фирм в каждом пункте i не вполне взаимозаменяема, т. е. случай так называемых дифференцированных благ и потребитель способен покупать их по разным ценам p_i^l, $l = 1, \ldots, N$ (p_i^l – цена на продукции фирмы l в пункте i). Спрос на продукцию в каждом пункте детериминированный и равномерный. Каждая компания l в каждом пункте имеет только одну складскую систему.

Все компании совершают логистические операции по проведению соответствующих сетевых логистических процессов при использовании релаксационного метода регулирования запасов с допущением дефицита $< y_i, S_i >$ на каждом складе [1].

Для каждой компании l логистические процессы состоят в том, что из пункта с номером 0 происходит циклическое снабжение складов с номерами i ($i = 1, \dots, n$). Сеть разбита на t_l непересекающихся маршрутов ($t_l \le n$).

Для каждого l введем обозначения для параметров логистических процессов в пункте i:
K^l_{ji} – условно-постоянные затраты, связанные с закупкой и доставкой одной партии из пункта j в пункт i, $j = 0, \dots, n$, $i = 1, \dots, n$;
c^l_i – условно-переменные затраты, приходящие на одну единицу продукции (включая цену покупки у поставщика);
h^l_i – стоимость содержания единицы запасов за единицу времени;
g^l_i – потери из-за дефицита единицы запасов за единицу времени;
a^l_i – интенсивность равномерного потребления продукции потребителями;
p^l_i – цена на продукцию;
y^l_i – объем партии заказа;
S^l_i – максимальный уровень наличных запасов;
l_k – номер маршрута фирмы l ($k = 1, \dots, t_l$);
$x^{l_k}_{ji}$ – индикатор, который принимает значение 1, если на маршруте с номером l_k происходит переезд из пункта j в пункт i, в противном случае принимает значение 0. Данный индикатор определяет последовательность объезда пунктов по сети ($k = 1, \dots, t_l$). Предполагается, что эти параметры заданы заранее, т.е. компания ими не управляет;
T_{l_k} – период снабжения одного маршрута с номером l_k ($k = 1, \dots, t_l$).

Каждая фирма l принимает решение относительно цен по сети $\{p^l_i\}^n_{i=1}$ и переменного вектора $\left(\{T_{l_k}\}^{t_l}_{k=1}, \left\{S^l_i\right\}^n_{i=1}\right) \in \mathbb{R}^{t_l+n}$.

Спрос на продукцию фирмы l в пункте i задается некоторой убывающей функцией $D^l_i(\cdot)$, которая будет зависеть от собственной цены p^l_i и цен, устанавливаемых другими фирмами, $\boldsymbol{p}^{-l}_i = (p^1_i, \dots, p^{l-1}_i, p^{l+1}_i, \dots, p^N_i)$ в этом пункте, т.е. $D^l_i = D^l_i(p^l_i, \boldsymbol{p}^{-l}_i)$, $l = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, n$. Пусть $\boldsymbol{p}^{-l} = (\boldsymbol{p}^{-l}_1, \boldsymbol{p}^{-l}_2, \dots, \boldsymbol{p}^{-l}_n) \in \mathbb{R}^{n\cdot(N-1)}_+$ – вектор из ожидаемых (фирмой l) цен, устанавливаемых другими фирмами по всей сети

По аналогии с [2] совокупная функция прибыли каждой фирмы l равна

$$\Pi^l\left(\left\{p^l_i, \mathbf{p}^{-l}_i\right\}^n_{i=1}\right) = P^l\left(\left\{p^l_i, \mathbf{p}^{-l}_i\right\}^n_{i=1}\right) - L^l\left(\left\{D^l_i\left(p^l_i, \mathbf{p}^{-l}_i\right)\right\}^n_{i=1}\right), \quad (2.1)$$

где $P^l\left(\left\{p^l_i, \boldsymbol{p}^{-l}_i\right\}^n_{i=1}\right)$ – сетевая нечистая прибыль фирмы l при полном обеспечении по сети вектора спроса $\left\{D^l_i\left(p^l_i, \boldsymbol{p}^{-l}_i\right)\right\}^n_{i=1}$,

$L^l\left(\left\{D_i^l\left(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right)\right\}_{i=1}^n\right)$ – это функция сетевых логистических затрат по реализации вектора объемов продукции $\left\{Q_i^l\right\}_{i=1}^n$ (при полном удовлетворении спроса в каждом пункте сети).
Прибыль (нечистую), которую получит фирма l в пункте i, равна

$$P_i^l\left(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right) = \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{j=0}^{n} p_i^l D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k},$$

а на сети –

$$P^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i^l\left(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right) = \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} p_i^l D_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k}. \quad (2.2)$$

Из [2] следует, что для каждого l сетевые логистические затраты будут равны

$$L^l\left(\left\{D_i^l\left(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right)\right\}_{i=1}^n\right) = L^l\left(\left\{D_i^l\left(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right)\right\}_{i=1}^n, \{T_{l_k}\}_{k=1}^{t_l}, \left\{S_i^l\right\}_{i=1}^n\right) =$$

$$= \overline{L}^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \{T_{l_k}\}_{k=1}^{t_l}, \left\{S_i^l\right\}_{i=1}^n\right) = \sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_j^l\left(p_j^l, \mathbf{p}_j^{-l}\right)}{a_j^l} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_i^l\left(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right)}{a_i^l}\left(c_i^l a_i^l T_{l_k} + h_i^l\frac{(S_i^l)^2}{2a_i^l} + g_i^l\frac{(a_i^l T_{l_k} - S_i^l)^2}{2a_i^l}\right) x_{ij}^{l_k}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.2) и (2.3) в (2.1), получим

$$\Pi^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right) = \Pi^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{\left(y_i^l, S_i^l\right)\right\}_{i=1}^n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} p_i^l D_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k} - \sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_j^l\left(p_j^l \mathbf{p}_j^{-l}\right)}{a_j^l} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_i^l\left(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right)}{a_i^l}\left(c_i^l a_i^l T_{l_k} + h_i^l\frac{(S_i^l)^2}{2a_i^l} + g_i^l\frac{(a_i^l T_{l_k} - S_i^l)^2}{2a_i^l}\right) x_{ij}^{l_k}. \quad (2.4)$$

Если в каждом периоде (цикле) для каждой фирмы l в каждом пункте i интенсивность потребления $a_i^l(\cdot)$ зависит от установленных на рынке цен p_i^l, то $a_i^l = b_i(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})$. В таком случае (2.4) примет следующий вид

$$\Pi^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{\left(y_i^l, S_i^l\right)\right\}_{i=1}^n\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} p_i^l D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k} - \sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_j^l\left(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l}\right)}{a_j^l\left(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l}\right)}K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\frac{1}{T_{l_k}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_i^l\left(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l}\right)}{b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})}\left(c_i^l b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})T_{l_k} + h_i^l\frac{(S_i^l)^2}{2b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})}+\right.$$

$$\left.+g_i^l\frac{(b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})T_{l_k}-S_i^l)^2}{2b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})}\right)x_{ij}^{l_k}. \tag{2.5}$$

Функция прибыли каждой фирмы l (2.5) зависит от стратегий $\left\{p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^{n}$, управляемыми всеми фирмами на всей сети, и от пары векторов $\left(\left\{T_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l},\left\{S_i^l\right\}_{i=1}^{n}\right)$, управляемыми только ею.

Определение 2.1. *Назовем переменные векторы* $\boldsymbol{T^l}=\left\{T_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}\in \in\mathbb{R}^{t_l}$ *и* $\boldsymbol{S^l}=\left\{S_i^l\right\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{R}^n$ *внутренними стратегиями, а* $\boldsymbol{p}^l=\left\{p_i^l\right\}_{i=1}^{n}\in \in\mathbb{R}^n$ *– внешней (игровой) стратегией фирмы* l *(*$l=1,\ldots,N$*).*

Зададим множества стратегий каждой фирмы l ($l=1,\ldots,N$):
$\boldsymbol{S^l}\in\prod(0,\infty)=\mathbb{R}_+^n$ или $S_i^l\in(0,\infty)$ для всех $i=1,\ldots,n$;
$\boldsymbol{T^l}\in\prod(0,\infty)=\mathbb{R}_+^{t_l}$ или $T_{l_k}^l\in(0,\infty)$ для все $k=1,\ldots,t_l$;
$\boldsymbol{Q^l}\in\Delta^l=\prod\limits_{i=1}^{n}[p_i^{l(1)},p_i^{l(2)}]\subset\mathbb{R}_+^n$ или $Q_i^l\in\Delta_i^l=[p_i^{l(1)},p_i^{l(2)}]\subset(0,\infty)$.
$\Delta=\prod\limits_{l=1}^{n}\Delta^l$ – множество внешних стратегий всех фирм на сети.

Таким образом, получим, что каждая фирма l при оптимизации логистических процессов управляет стратегиями на двух уровнях: на первом уровне (внутренней задаче) управляет многомерными стратегиями $\boldsymbol{T^l}=\left\{T_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}\in\mathbb{R}_+^{t_l}$ и $\boldsymbol{S^l}=\left\{S_i^l\right\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{R}_+^n$ и на втором уровне (внешней задаче) – вектором цен реализации на сети $\boldsymbol{p}^l=\left\{p_i^l\right\}_{i=1}^{n}\in\mathbb{R}_+^n$. Во внутренней задаче каждая фирма максимизирует свою прибыль (2.5) в неигровых условиях (при фиксированных внешних стратегиях). Во внешней задаче возникает игровая проблема в форме ценовой конкуренции, в качестве принципа оптимальности которой будем рассматривать равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

3. Решение внутренней (неигровой) задачи

Критерием внутренней задачи является оптимизация логистических процессов по средством максимизации функции прибыли (2.5) относительно стратегий $\boldsymbol{T}^l$ и $\boldsymbol{S}^l$ при установленных ценах всеми фирмами $(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})$ во всех пунктах на сети. То есть функция прибыли на данном этапе будет функцией от двух многомерных переменных $\boldsymbol{T}^l$ и $\boldsymbol{S}^l$.

Критерий внутренней задачи для каждой фирмы l $(l = 1, \ldots, N)$

$$\Pi^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{T_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}, \left\{S_i^l\right\}_{i=1}^n\right) \xrightarrow{\mathbf{T}^l, \mathbf{S}^l} \max, \ \mathbf{T}^l \in \mathbb{R}_+^{t_l}, \ \mathbf{S}^l \in \mathbb{R}_+^n. \quad (3.1)$$

Стационарная точка $(\boldsymbol{T}^{l*}, \boldsymbol{S}^{l*})$ и вид соответствующего экстремума для каждой фирмы l определятся так же, как и в [2]. Стационарная точка будет решением системы уравнений (для каждого l)

$$\frac{\partial \Pi^l\left(\left\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{\left(y_i^l, S_i^l\right)\right\}_{i=1}^n\right)}{\partial T_{l_k}} =$$

$$= \frac{1}{T_{l_k}^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{D_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} + \frac{1}{T_{l_k}^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})}{b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})} \frac{(S_i^l)^2 (h_i^l + g_i^l)}{2 b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})} x_{ij}^{l_k} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \frac{D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})}{b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})} g_i^l \frac{b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})}{2} x_{ij}^{l_k} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi^l\left(\left\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{\left(y_i^l, S_i^l\right)\right\}_{i=1}^n\right)}{\partial S_i^l} =$$

$$= \frac{D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})}{b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})} \left(- \frac{S_i^l (h_i^l + g_i^l)}{b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})} \sum_{k=1}^{t_l} \frac{1}{T_{l_k}} \sum_{j=0}^n x_{ij}^{l_k} + g_i^l \right) = 0,$$

$$k = 1, \ldots, t_l, \ i = 1, \ldots, n.$$

Эта система дает следующее решение

$$T_{l_k}^* = T_{l_k}^*\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right) = \sqrt{\frac{2 \sum\limits_{i=0}^n \sum\limits_{j=1}^n K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}}{\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=0}^n \frac{g_i^l h_i^l b_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l})}{2(h_i^l + g_i^l)} x_{ij}^{l_k}}}, \quad (3.2)$$

$$S_i^{l*} = S_i^{l*}\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right) = \frac{g_i^l b_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l})}{h_i^l + g_i^l} \sqrt{\frac{2 \sum\limits_{i=0}^n \sum\limits_{j=1}^n K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}}{\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=0}^n \frac{g_i^l h_i^l b_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l})}{2(h_i^l + g_i^l)} x_{ij}^{l_k}}}, \quad (3.3)$$

$$k = 1, \ldots, t_l,\ i = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, N.$$

Внутренние стратегии $\boldsymbol{T}^{l*} = \left\{T^*_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l} \in \mathbb{R}^{t_l}$ и $\boldsymbol{S}^{l*} = \left\{S_i^{l*}\right\}_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$, определенные по формулам (3.2) и (3.3), является решением задачи (3.1).

4. Решение внешней (игровой) задачи

Для каждой фирмы l $(l = 1, \ldots, N)$ найденные оптимальные стратегии внутренней задачи $\left\{T^*_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}$ и $\left\{S_i^{l*}\right\}_{i=1}^{n}$, определенные по формулам (3.2) и (3.3), подставим в функцию прибыли (2.5)

$$\Pi^l\left(\left\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{T^*_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}, \left\{S_i^{l*}\right\}_{i=1}^n\right) = \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) p_i^l x_{ij}^{l_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k}}{\beta_{l_k}}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l})\frac{h_i^l g_i^l}{2(h_i^l + g_i^l)}\sqrt{\frac{\beta_{l_k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k}}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) c_i^l x_{ij}^{l_k},$$

где

$$\alpha_i^l = \frac{g_i^l h_i^l}{2(h_i^l + g_i^l)},\ \ \beta_{l_k} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}.$$

Пусть

$$\Pi^l\left(\left\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n, \left\{T^*_{l_k}\right\}_{k=1}^{t_l}, \left\{S_i^{l*}\right\}_{i=1}^n\right) = \Phi^l\left(\left\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right).$$

Получим следующую функцию выигрыша для каждой фирмы l, зависящую только от внешних стратегий

$$\Phi^l\left(\left\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\right\}_{i=1}^n\right) = \sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} D_i^l(p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}) p_i^l x_{ij}^{l_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k}}{\beta_{l_k}}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{D_j^l(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l})}K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})\frac{h_i^l g_i^l}{2(h_i^l+g_i^l)}\sqrt{\frac{\beta_{l_k}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k}}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})c_i^l x_{ij}^{l_k}. \qquad (4.1)$$

Таким образом, получим бескоалиционную игру N лиц (модифицированную модель Бертрана):

$$\Gamma_B = \left\langle N, \{\Delta^l\}_{l=1}^N, \{\Phi^l\}_{l=1}^N \right\rangle. \qquad (4.2)$$

Множеством всех ситуаций $(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \ldots, \boldsymbol{p}^N)$ будет $\Delta = \Delta^1\times\Delta^2\times\ldots\times\Delta^N \subset \mathbb{R}_+^{n\cdot N}$.

Для каждого l $(l = 1,\ldots,N)$ рассмотрим (4.1), как функцию только одной переменной p_s^l, т.е. $\Phi^l\big(\{p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l}\}_{i=1}^n\big)=\Phi^l(p_s^l)$, $s=1,\ldots,n$:

$$\Phi^l(p_s^l)=\sum_{k=1}^{t_l}\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})p_s^l\sum_{j=0}^{n}x_{sj}^{l_k}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n}\sum_{j=0}^{n}D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})p_i^l x_{ij}^{l_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sqrt{\frac{\alpha_s^l b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})\sum\limits_{j=0}^{n}x_{sj}^{l_k}+\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k}}{\beta_{l_k}}}\times$$

$$\times\left(\frac{D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})}{b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})}\sum_{i=0}^{n}K_{is}^l x_{is}^{l_k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=0\\j\neq s}}^{n}\frac{D_j^l(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l,\mathbf{p}_j^{-l})}K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\sqrt{\frac{\beta_{l_k}}{\alpha_s^l b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})\sum\limits_{j=0}^{n}x_{sj}^{l_k}+\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_i^l b_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k}}}\times$$

$$\times\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})\frac{h_s^l g_s^l}{2(h_s^l+g_s^l)}\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum_{j=0}^n D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})\frac{h_i^l g_i^l}{2(h_i^l+g_i^l)}x_{ij}^{l_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})c_s^l\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum_{j=0}^n D_i^l(p_i^l,\mathbf{p}_i^{-l})c_i^l x_{ij}^{l_k}\right). \tag{4.3}$$

Сделаем следующие обозначения:

$$\gamma_s^{l_k}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum_{j=0}^n D_i^l(p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l})p_i^l x_{ij}^{l_k},\ \delta_s^{l_k}=\frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum\limits_{j=0}^n\alpha_i^l b_i^l(p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l})x_{ij}^{l_k}}{\alpha_s^l\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}},$$

$$\zeta_s^{l_k}=\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^n\frac{D_j^l(p_j^l,\boldsymbol{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l,\boldsymbol{p}_j^{-l})}K_{ij}^l x_{ij}^{l_k}\Big/\sum_{i=1}^n K_{is}^l x_{is}^{l_k},\ \theta_s^{l_k}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum_{j=0}^n D_i^l(p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l})c_i^l x_{ij}^{l_k},$$

$$\eta_s^{l_k}=\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^n\sum_{j=0}^n D_i^l(p_i^l,\boldsymbol{p}_i^{-l})\frac{h_i^l g_i^l}{h_i^l+g_i^l}x_{ij}^{l_k}\Big/\frac{h_s^l g_s^l}{h_s^l+g_s^l}\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k},$$

$$\lambda_s^{l_k}=\sqrt{\frac{\alpha_s^l\sum\limits_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}}{\beta_{l_k}}}\sum_{i=0}^n K_{is}^l x_{is}^{l_k},\ \mu_s^{l_k}=\sqrt{\frac{\beta_{l_k}}{\alpha_s^l\sum\limits_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}}}\frac{h_s^l g_s^l}{2(h_s^l+g_s^l)}\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}.$$

Тогда (4.3) будет иметь вид

$$\Phi^l(p_s^l)=\sum_{k=1}^{t_l}\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})p_s^l\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}+\gamma_s^{l_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\lambda_s^{l_k}\sqrt{b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})+\delta_s^{l_k}}\left(\frac{D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})}{b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})}+\zeta_s^{l_k}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{t_l}\mu_s^{l_k}\frac{\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})+\eta_s^{l_k}\right)}{\sqrt{b_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})+\delta_s^{l_k}}}-\sum_{k=1}^{t_l}\left(D_s^l(p_s^l,\mathbf{p}_s^{-l})c_s^l\sum_{j=0}^n x_{sj}^{l_k}+\theta_s^{l_k}\right). \tag{4.4}$$

Далее сделаем еще обозначения

$$f_1^{l_k}(p_s^l) = D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) p_s^l \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} + \gamma_s^{l_k},$$

$$f_2^{l_k}(p_s^l) = \sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}} \left(\frac{D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})}{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})} + \zeta_s^{l_k} \right),$$

$$f_3^{l_k}(p_s^l) = \frac{D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \eta_s^{l_k}}{\sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}}, f_4^{l_k}(p_s^l) = D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) c_s^l \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} + \theta_s^{l_k}. \quad (4.5)$$

Тогда из (4.4) и (4.5) получим

$$\Phi^l(p_s^l) = \sum_{k=1}^{t_l} \left(f_1^{l_k}(p_s^l) - \lambda_s^{l_k} f_2^{l_k}(p_s^l) - \mu_s^{l_k} f_3^{l_k}(p_s^l) - f_4^{l_k}(p_s^l) \right). \quad (4.6)$$

Теорема 4.1. *В игре (4.2) для каждого l ($l = 1, \dots, N$) сделаем следующие допущения:*
1) функция $D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})$ дважды дифференцируема, убывает, выпукла по p_s^l при фиксированном $\boldsymbol{p}_s^{-l}$ и непрерывна на множестве Δ ($s = 1, \dots, n$);
2) функции $f_2^{l_k}(p_s^l)$ и $f_3^{l_k}(p_s^l)$ выпуклы в совокупности по всем p_r^l, для которых $\sum_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ и $\sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$ (принадлежащие одному маршруту с номером l_k), при фиксированном $\boldsymbol{p}^{-l}$ на множестве Δ ($k = 1, \dots, t_l$);
3) функция $p_s^l D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})$ вогнута по p_s^l при фиксированном $\boldsymbol{p}_s^{-l}$.

Тогда в игре (4.2) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $\left\{ \left(p_1^{l*}, p_2^{l*}, \dots, p_n^{l*} \right) \right\}_{l=1}^{N}$.

Теорема 4.1 доказывается по аналогии с теоремой 2 из [2].

Следствие 4.1. *Допустим, что выполнены все условия теоремы 4.1. Пусть также существуют $\overline{p}_s^l \in \Delta_s^l$ ($l = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$):*

$$D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) < \sum_{k=1}^{t_l} \left(\frac{\partial f_2^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} + \frac{\partial f_3^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} \right) + \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} c_s^l \quad (4.7)$$

при $p_s^l > \overline{p}_s^l$.

Тогда существующая в игре (4.2) ситуация равновесия Нэша в чистых стратегиях $\left\{ \left(p_1^{l*}, p_2^{l*}, \dots, p_n^{l*} \right) \right\}_{l=1}^{N}$ принадлежит множеству Δ, кроме того, $p_s^{l*} \in [p_s^{l(1)}, \overline{p}_s^l)$ ($l = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, n$).

Следствие 4.1 доказывается по аналогии со следствием 1 теоремы 2 из [2].

При выполнении условий теоремы 4.1 условия первого порядка являются достаточными для равновесия по Нэшу в чистых стратегиях:

$$\frac{\partial \Phi^l\big(\{p_i^l, \mathbf{p}_i^{-l}\}_{i=1}^n\big)}{\partial p_i^l} = 0,\ l = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Имея ввиду формулы (1) и (2) из [2], определим первые частные производные функции (4.6) для каждого l ($l = 1, \ldots, N$) по всем собственным переменным p_s^l ($s = 1, \ldots, n$):

$$\frac{\partial \Phi^l\big(\{p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}\}_{i=1}^n\big)}{\partial p_i^l} = \left(D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} \right) \sum_{k=1}^{t_l} \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{t_l} \left(\frac{\partial f_2^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} + \frac{\partial f_3^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} \right) - \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} c_s^l \sum_{k=1}^{t_l} \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} =$$

$$= D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} - \sum_{k=1}^{t_l} \left(\frac{\partial f_2^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} + \frac{\partial f_3^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} \right) - \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} c_s^l.$$

Теперь условие (4.8) перепишем в другом виде

$$D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} = \sum_{k=1}^{t_l} \left(\frac{\partial f_2^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} + \frac{\partial f_3^{l_k}(p_s^l)}{\partial p_s^l} \right) + \frac{\partial D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l} c_s^l,$$

$$l = 1, \ldots, N,\ s = 1, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Система (4.9) из $n \cdot N$ уравнений с $n \cdot N$ неизвестными при выполнении условий (4.7) дает решение $\big\{ \big(p_1^{l*}, p_2^{l*}, \ldots, p_n^{l*}\big) \big\}_{l=1}^{N} \in \Delta$, являющееся равновесной ситуацией в игре (4.2).

Теорема 4.2. *Сделаем следующие допущения для всех l и s ($l = 1, \ldots, N$, $s = 1, \ldots, n$):*

1) период снабжения для всех пунктов является константой, т.е. $T_s^{l,plan} = \frac{D_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})} = const$;

2) функция $p_s^l b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})$ дважды дифференцируема, убывает, вогнута по p_s^l и непрерывна на $\Delta_s^1 \times \Delta_s^1 \times \ldots \times \Delta_s^N$;

3) функция $\sqrt{b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}$ *выпукла в совокупности по всем по* p_r^l*, для которых* $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$ *(принадлежащие одному маршруту с номером* l_k*), при фиксированном* $\boldsymbol{p}^{-l}$ *на множестве* Δ *(*$k = 1, \ldots, t_l$*).*

Тогда в игре (4.2) существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $\left\{ \left(p_1^{l*}, p_2^{l*}, \ldots, p_n^{l*}\right) \right\}_{l=1}^{N}$*.*

Доказательство. Покажем, что функции $f_1^{l_k}(p_i^l)$, $-f_2^{l_k}(p_i^l)$, $-f_3^{l_k}(p_i^l)$ и $-f_4^{l_k}(p_i^l)$ из (4.6) вогнуты в совокупности по всем p_r^l, для которых $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ и $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$, при фиксированном $\boldsymbol{p}^{-l}$ и непрерывны на Δ, $k = 1, \ldots, t_l$,, тем самым докажем вогнутость по своей стратегии $\boldsymbol{p}^l$ и непрерывность на Δ функции прибыли из (4.4) ((4.1)) или (4.6) каждой фирмы l.

Вспомним, что

$$\delta_s^{l_k} = \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_i^l b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) x_{ij}^{l_k}}{\alpha_s^l \sum\limits_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k}}.$$

Тогда, имея ввиду условие 1) теоремы, получим

$$\eta_s^{l_k} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} \sum_{j=0}^{n} D_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) \frac{h_i^l g_i^l}{h_i^l + g_i^l} x_{ij}^{l_k} \Bigg/ \frac{h_s^l g_s^l}{h_s^l + g_s^l} \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} =$$

$$= T_i^{l,plan} \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{n} \sum_{j=0}^{n} b_i^l(p_i^l, \boldsymbol{p}_i^{-l}) \alpha_i^{l_k} x_{ij}^{l_k} \Bigg/ \alpha_s^{l_k} \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = T_i^{l,plan} \delta_s^{l_k},$$

$$\zeta_s^{l_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=0\\j\neq s}}^{n} \frac{D_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})}{b_j^l(p_j^l, \boldsymbol{p}_j^{-l})} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} K_{is}^l x_{is}^{l_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=0\\j\neq s}}^{n} T_j^{l,plan} K_{ij}^l x_{ij}^{l_k} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} K_{is}^l x_{is}^{l_k}.$$

Величина $\zeta_s^{l_k}$ не зависит от компонентов внешних стратегий фирм. Поэтому, из (4.5) и условия 1) теоремы следует

$$f_1^{l_k}(p_i^l) = T_s^{l,plan} p_s^l b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} + \gamma_s^{l_k},$$

$$f_2^{l_k}(p_i^l) = \sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}} \left(\frac{D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})}{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l})} + \zeta_s^{l_k} \right) =$$

$$= \sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}} \left(T_s^{l,plan} + \zeta_s^{l_k} \right),$$

$$f_3^{l_k}(p_i^l) = \frac{D_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \eta_s^{l_k}}{\sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}} = \frac{T_s^{l,plan} b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + T_i^{l,plan} \delta_s^{l_k}}{\sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}} =$$

$$= T_s^{l,plan} \sqrt{b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}},$$

$$f_4^{l_k}(p_i^l) = T_s^{l,plan} c_s^l b_s^l(p_s^l, \mathbf{p}_s^{-l}) \sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} + \theta_s^{l_k}. \tag{4.10}$$

Из условия 2) теоремы следует, что $p_s^l b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})$ – непрерывная функция на $\Delta_s^1 \times \Delta_s^1 \times \ldots \times \Delta_s^N$, поэтому и функция $b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) = p_s^l b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) \frac{1}{p_s^l}$, как произведение двух непрерывных функций, будет непрерывной на $\Delta_s^1 \times \Delta_s^1 \times \ldots \times \Delta_s^N$. Кроме того, функция $\sqrt{b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}$, как сложная функция, будет непрерывной на $\Delta_s^1 \times \Delta_s^1 \times \ldots \times \Delta_s^N$. Таким образом, все функции из (4.10) будут непрерывными в совокупности по всем своим переменным. Отсюда следует, что функция (4.1) или (4.4) для каждого l будет непрерывной по $(\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \ldots, \boldsymbol{p}^N)$ на Δ.

Из условия 2) теоремы и (4.10) получим, что $f_2^{l_k}(p_s^l)$, как сумма вогнутых функций по одной переменной p_s^l, будет вогнутой в совокупности по всем этим переменным, для которых $\sum_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ и $\sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$.

Из (4.10) и условия 3) теоремы следует, что функции $f_2^{l_k}(p_s^l)$ и $f_3^{l_k}(p_s^l)$ $(-f_2^{l_k}(p_s^l)$ и $-f_3^{l_k}(p_s^l))$ выпуклы (вогнуты) в совокупности по всем p_r^l, для которых $\sum_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ и $\sum_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$, при фиксированном $\boldsymbol{p}^{-l}$ на множестве Δ.

Так как из условия 3) в теореме функция $\sqrt{b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}$ выпукла в совокупности по всем по p_s^l, то она выпукла и по одной переменной p_s^l. Поэтому ее вторая частная производная по p_s^l положительна

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 p_s^l}\left(\sqrt{b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial^2 p_s^l}\left(b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}\right) - \left(\frac{\partial b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l}\right)^2}{\left(b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial^2 b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial^2 p_s^l}\left(b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l}) + \delta_s^{l_k}\right) - \left(\frac{\partial b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial p_s^l}\right)^2 > 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})}{\partial^2 p_s^l} > 0.$$

Значит, функция $b_s^l(p_s^l, \boldsymbol{p}_s^{-l})$ выпукла по одной переменной p_s^l при каждом фиксированном $\boldsymbol{p}_s^{-l}$. Тогда из (4.10) имеем, что функция $f_4^{l_k}(p_s^l)$ выпукла по p_s^l при фиксированных других переменных $\boldsymbol{p}_s^{-l}$, а в итоге, как сумма выпуклых функций, будет выпуклой в совокупности по всем p_r^l, для которых $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{rj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{jr}^{l_k} = 1$ и $\sum\limits_{j=0}^{n} x_{sj}^{l_k} = \sum\limits_{j=0}^{n} x_{js}^{l_k} = 1$, при всех фиксированных $\boldsymbol{p}^{-l}$ на множестве Δ, $k = 1, \ldots, t_l$.

Тогда линейная комбинация вогнутых функций $f_1^{l_k}(p_s^l) - \lambda_s^{l_k} f_2^{l_k}(p_s^l) - \mu_s^{l_k} f_3^{l_k}(p_s^l) - f_4^{l_k}(p_s^l)$ будет вогнутой в совокупности по всем своим переменным. А функция выигрыша (4.6) состоит из t_l таких линейных комбинаций, у которых разные переменные. И поэтому она будет вогнутой по своей внешней стратегии $\boldsymbol{p}^l$. Множество $\Delta^l = \prod_i^n [q_i^{l(1)}, q_i^{l(2)}]$ стратегий $\boldsymbol{p}^l$, которая является n–ым брусом, будет выпуклым компактным множеством.

Таким образом выполнены все условия из [5], из чего следует, что в игре (4.2) существует ситуация равновесия в чистых стратегиях $\left\{\left(p_1^{l*}, p_2^{l*}, \ldots, p_n^{l*}\right)\right\}_{l=1}^{N}$. $\square$

Найденные равновесные стратегии $\boldsymbol{p}^{l*} \in \mathbb{R}^n$, $l = 1, \ldots, N$ подставим в формулы (3.2) и (3.3) для определения численных значений внутренних стратегий $\boldsymbol{T}^{l*}$, $\boldsymbol{S}^{l*}$ соответственно. В конечном итоге, каждая фирма l, $l = 1, \ldots, N$ будет осуществлять оптимальное управление $\boldsymbol{U}^{l*} = \left(\boldsymbol{p}^{l*}, \boldsymbol{T}^{l*}, \boldsymbol{S}^{l*}\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{t_l} \times \mathbb{R}^n$.

5. Заключение

В настоящей работе получены:
Необходимые условия существования ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях для детерминированных моделей управления материальными запасами при допущении дефицита (учета неудовлетворенных требований) в случае ценовой конкуренции между несколькими производственно-коммерческими и торговыми структурами (фирмами), оптимизирующими свои логистические процессы.
Аналитические зависимости оптимальных значений переменных внутренних задач от внешних (игровых) стратегий.

Отметим, в некоторых случаях для получения достаточных условий существования равновесия были сделаны допущения на счет характера составных частей функции выигрыша.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гасратов М.Г., Захаров В.В. *Теоретико-игровые модели оптимизации цепочки поставок для детерминированного спроса* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 23–59.

2. Гасратова Н.А., Гасратов М.Г. *Сетевая модель управления запасами для случая количественной конкуренции* // Сибирский журнал индустриальной математики. (в печати)

3. Григорьев М. Н., Долгов А. П., Уваров С. А. *Управление запасами в логистике: методы, модели, информационные технологии: Учебное пособие.* СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2006.

4. Корягин М. Е. *Исследование и оптимизация математических моделей процессов циклической перевозки в логистических системах.* Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. (05.13.18). Кемерово, 2003.

5. Кукушкин Н. С., Морозов В. В. *Теория неантогонистических игр.* М.: МГУ, 1984.

6. Локшин Э. Ю. *Экономика материально-технического снабжения. Учеб. пособие.* М.: Госпланиздат, 1963.

7. Тироль Ж. *Рынки и рыночная власть: теория организации и промышленности.* Пер. с англ. Ю. М. Донца, М. Д. Факировой, под ред. А. С. Гальперина и Н. А. Зенкевича. СПб: Инс-т Экономическая школа. 2000.

8. Фасоляк Н. Д. *Управление производственными запасами (экономический аспект проблемы).* М.: Экономика, 1972.

9. Хедли Дж. *Нелинейное и динамическое программирование* / Пер. с англ. / Под ред. Г.П. Акилова. М.: Мир, 1967.

10. Хруцкий Е. А., Сакович В. А., Колосов С. П. *Оптимизация хозяйственных связей и материальных запасов: вопросы и методологии.* М.: Экономика, 1977.

11. Dai Y., Chao X., Fang S.C., Henry L.W.N. *Game Theoretic Analysis of a Distribution System with Customer Market Search* // Annals of Operations Research. 2005. V. 135. P. 223–238.

12. Egri P., Vancza J. *A distributed coordination mechanism for supply networks with asymmetric information* // European Journal of Operational Research. 2013. V. 226. P. 452–460.

13. Fang X. *Capacity Games for Partially Complementary Products Under Multivariate Random Demands* // Naval Research Logistics. 2010. DOI: 10.1002/nav.2012. P. 146–159.

14. Guan R., Zhao X. *Pricing and inventory management in a system with multiple competing retailers under (r, Q) policies* // Computers and Operations Research. 2011. V. 38. P. 1294–1304.

15. Klijn F., Slikker M. *Distribution center consolidation games* // Operations Research Letters. 2005. V. 33. P. 285–288.

16. Liu Z. *Equilibrium Analysis of Capacity Allocation with Demand Competition* // Naval Research Logistics. 2012. DOI: 10.1002/nav. P. 254–265.

17. Lozano S., Moreno P., Adenso-Diaz B., Algaba E. *Cooperative game theory approach to allocating benefits of horizontal cooperation* // European Journal of Operational Research. 2013. V. 229. P. 444–452.

18. Nagurney A. *Formulation and analysis of horizontal mergers among oligopolistic firms* // Comput. Manag. Sci. 2010. V. 7. P. 377–406.

19. Yu Y., Huang G.Q. *Nash game model for optimizing market strategies, configuration of platform products in a Vendor Managed Inventory (VMI) supply chain for a product family* // European Journal of Operational Research. 2010. V. 206. P. 361–373.

NETWORK MODEL OF INVENTORY CONTROL IN CASE OF THE PRICE COMPETITION

Natalia A. Gasratova, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Cand.Sc. (gasratova_na@mail.ru).
Mansur G. Gasratov, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St.Petersburg State University, Cand.Sc. (gasratovmans@mail.ru).

Abstract: The mathematical model of processes of cyclic transportation in logistic systems for a case of the price competition is investigated. We consider a network of a set stations, in each of which there are several enterprises with their warehouses. Enterprises supply and sell not exactly interchangeable products, the demand for which is deterministic. It is case of so called differential goods and customers can buy them at all prices. Each enterprise uses a relaxation method of inventory control with a deficiency assumption when modeling control systems. Existence conditions of the equilibrium decision for the model are given.

Keywords: logistic system, price competition, internal strategy, external strategy, Nash equilibrium in pure strategy, inventory control.