Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.1, с. 74–91

УДК 519.833
ББК 22.18

ПАРЕТО–РАВНОВЕСНАЯ СИТУАЦИЯ: ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И СУЩЕСТВОВАНИЕ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ*

Владислав И. Жуковский
МГУ им М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Константин Н. Кудрявцев
Южно-Уральский государственный университет (НИУ)
454080, Челябинск, пр-кт Ленина, 76
e-mail: kudrkn@gmail.com

В работе рассматриваются равновесные по Нэшу ситуации, одновременно максимальные по Парето по отношению к остальным равновесным ситуациям. Устанавливаются достаточные условия существование таких ситуаций в чистых статегиях. Эти условия используют гермейеровскую свертку функций выигрыша. В качестве приложения доказано наличие такого равновесия в смешанных стратегиях при «привычных» ограничениях на бескоалиционные игры (компактность множеств стратегий игроков и непрерывность их функций выигрыша).

Ключевые слова: неантагонистическая игра, равновесие по Нэшу, оптимальность по Парето, смешанные стратегии.

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а и НАН Украины, проект №03-01-14.

1. Введение

В 1949 г. Джон Форбс Нэш, ныне известный американский математик и экономист, а тогда аспирант Принстонского университета предложил [18] понятие равновесного решения бескоалиционной игры, получившее в последствии название «ситуация равновесия по Нэшу». С тех пор это равновесие широко используется в экономике, социологии, военных науках и во многих других областях человеческой деятельности. Более того, через 45 лет Дж. Нэшу (совместно с Дж. Харшаньи и Р. Зельтоном) была присуждена Нобелевская премия за «Фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр».

Однако, как показывает пример 2.1 (из раздела 2 настоящей статьи) множеству ситуаций равновесия по Нэшу присуще негативное свойство: могут существовать две ситуации равновесия по Нэшу такие, что выигрыши каждого игрока в первой из них строго больше соответствующих выигрышей в другой. На этот факт в 2013 г. обратили внимание авторы настоящей статьи в серии работ [6,7] при исследовании вопроса существования гарантированного равновесного решения бескоалиционной игры при неопределенности. Именно, уже там мы ориентировались на ситуацию равновесия по Нэшу, одновременно максимальную по Парето по отношению к остальным ситуациям равновесия (тем самым заведомо «снимая» указанный выше негатив). При этом возникает вопрос: как найти такое равновесие (названное в настоящей работе «Парето–равновесной ситуацией»)? Мы предлагаем использовать достаточные условия (теорема 4.1), позволяющие свести задачу построения Парето–равновесной ситуации к нахождению седловой точки в специального вида гермейеровской свертке функций выигрыша. В качестве приложения в конце работы устанавливается существование Парето–равновесной ситуации в смешанных стратегиях (утверждение 5.1).

Отметим, что при формализации неулучшаемого по Парето равновесия по Нэшу может быть использовано два подхода: первый – требовать оптимальности по Парето на множестве всех ситуаций рассматриваемой игры, второй – находить максимальное по Парето равновесие на множестве всех равновесий по Нэшу. Первый подход обычно предполагает [16] построение всех ситуаций равновесия по Нэшу с последующей проверкой каждой такой ситуации на принадлежность Парето-границе множества ситуаций игры. Численные алгоритмы, реализующие такой способ, предлагаются для биматричных игр в [16], для некоторых игр двух лиц в нормальной форме в статье [15] и монографии [13, с. 92-93], для линейной позиционной игры двух лиц с цилиндрическими терминальными функциями выигрыша в [8]. В работе [10] для класса нелинейных дифференциальных игр с выпуклыми терминальными функциями выигрыша получены достаточные условия, при которых ситуация равновесия, неулучшаемая на множестве равновесий по Нэшу (второй подход), является оптимальной по Парето и на множестве всех ситуаций игры.

В настоящей статье применяется второй подход, а именно, предлагается алгоритм, выводящий на ситуацию, максимальную по Парето среди всех равновесий по Нэшу.

2. Внутренняя неустойчивость множества ситуаций равновесия по Нэшу

Рассмотрим бескоалиционную игру (БИ) N лиц в чистых стратегиях (неантагонистическую игру):

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{1}$$

где $\mathbb{N} = \{1,\dots,N\}$ – множество порядковых номеров игроков; каждый i-ый игрок, не объединяясь с другими в коалицию, выбирает и использует свою *чистую стратегию* $x_i \in \mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, в результате образуется *ситуация* $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbf{X} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathbf{X}_i \subset \mathbb{R}^n$ ($n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i$); на множестве ситуаций $\mathbf{X}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ определена *функция выигрыша* $f_i(x)$, значение которой называется *выигрышем* i-го игрока. Далее используем также обозначения $(x\|z_i) = (x_1,\dots,x_{i-1},z_i,x_{i+1},\dots,x_N)$, $f = (f_1,\dots,f_N)$.

Определение 2.1. *Ситуация* $x^e = (x_1^e,\dots,x_N^e) \in \mathbf{X}$ *называется равновесной по Нэшу в игре* (1)*, если*

$$\max_{x_i\in\mathbf{X}_i} f_i(x^e\|x_i) = f_i(x^e) \quad (i\in\mathbb{N}); \tag{2}$$

обозначим множество $\{x^e\}$ *игры* (1) *через* $\mathbf{X}^e$*.*

Перейдем к внутренней неустойчивости $\mathbf{X}^e$. Подмножество $\mathbf{X}^* \subset \subset \mathbb{R}^n$ считается *внутренне неустойчивым*, если существуют хотя бы две ситуации $x^{(j)} \in \mathbf{X}^*$ $(j = 1, 2)$ такие, что

$$\left[f(x^{(1)}) \ < \ f(x^{(2)})\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[f_i(x^{(1)}) \ < \ f_i(x^{(2)}) \ (i \in \mathbb{N})\right], \qquad (3)$$

и *внутренне устойчивым*, если не существует в $\mathbf{X}^*$ хотя бы двух ситуаций $x^{(j)} \in \mathbf{X}^*$ $(j = 1, 2)$, для которых имело бы место (3).

Пример 2.1. Рассмотрим БИ двух лиц

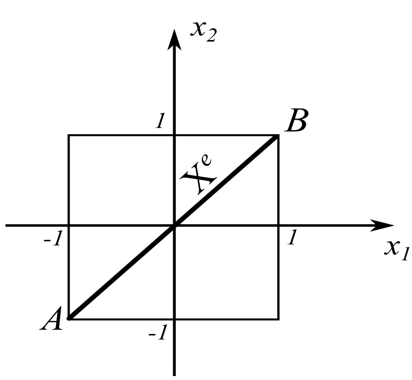
$$\langle \{1, 2\}, \{\mathbf{X}_i = [-1; 1]\}_{i=1,2}, \{f_i(x) = -x_i^2 + 2x_1x_2\}_{i=1,2} \rangle. \qquad (4)$$

Ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in [-1; 1]^2$ равновесна по Нэшу в игре (4), если (см. (2))

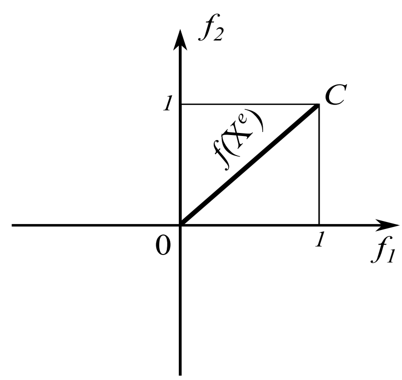
$$-x_i^2 + 2x_1x_2^e \ \leqslant -(x_i^e)^2 + 2x_1^e x_2^e \quad \ \forall\, x_i \in [-1; 1] \ \ (i = 1, 2),$$

что эквивалентно

$$-(x_1 - x_2^e)^2 \leqslant -(x_1^e - x_2^e)^2, \qquad -(x_1^e - x_2)^2 \leqslant -(x_1^e - x_2^e)^2.$$



Множество $\mathbf{X}^e = AB$



Множество $f(\mathbf{X}^e) = \bigcup\limits_{\alpha \in [-1,1]} (\alpha^2; \alpha^2) = OC$

Рисунок 1.

Поэтому $x_1^e = x_2^e = \alpha \ \forall \alpha = const \in [-1; 1]$, то есть в (4) (см. рис. 1) множества $\mathbf{X}^e = \{(\alpha, \alpha) \mid \forall \ \alpha \in [-1; 1]\}$ и $f_i(\mathbf{X}^e) = \bigcup\limits_{x^e \in \mathbf{X}^e} f_i(x^e) =$

$= \bigcup\limits_{\alpha\in[-1,1]} (\alpha^2, \alpha^2)$. Итак, множество $\mathbf{X}^e$ внутренне неустойчиво, ибо для (4) при $x^{(1)} = (0,0)$ и $x^{(2)} = (1,1)$ будет $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1,2)$ (см. (3)).

Замечание 2.1. В антагонистическом варианте игры (1) (то есть, если в (1) будет $\mathbb{N} = \{1,2\}$, $f_1 = -f_2 = \overline{f}$) для любых двух седловых точек $x^{(k)} \in \mathbf{X}$ $(k = 1,2)$ имеет место $\overline{f}(x^{(1)}) = \overline{f}(x^{(2)})$ (по свойству *эквивалентности* седловых точек). Поэтому множество седловых точек в антагонистической игре всегда *внутренне устойчиво*. Отметим, что седловая точка есть ситуация равновесия по Нэшу в антагонистическом варианте игры (1).

Замечание 2.2. В неантагонистической игре вида (1) эффект внутренней неустойчивости (см. пример 2.1) не возникает, если в (1) существует только *единственная* ситуация равновесия по Нэшу.

Игре (1) поставим в соответствие вспомогательную N-критериальную задачу

$$\Gamma_v \;=\; \langle \mathbf{X}^e, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{5}$$

где множество $\mathbf{X}^e$ *альтернатив* x совпадает с множеством равновесных по Нэшу ситуаций x^e в игре (1), а i-ый критерий $f_i(x)$ – есть функция выигрыша игрока i.

Определение 2.2. *Альтернатива $x^P \in \mathbf{X}^e$ является максимальной по Парето (эффективной) в* (5), *если при $\forall x \in \mathbf{X}^e$ несовместна система неравенств*

$$f_i(x) \;\geqslant\; f_i(x^P) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых хотя бы одно строгое. Множество таких $\{x^P\}$ обозначим через $\mathbf{X}^P$.

Согласно определению 2.2 множество $\mathbf{X}^P \subseteq \mathbf{X}^e$, и оно является *внутренне устойчивым.*

Очевидно следующее **утверждение**: если при всех $x \in \mathbf{X}^e$ имеет место

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x) \;\leqslant\; \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x^P), \tag{6}$$

то x^P – максимальная по Парето альтернатива в задаче (5).

Замечание 2.3. Раздел математического программирования, в котором разрабатываются численные методы построения ситуаций равновесия по Нэшу в играх (1) получил в последнее время название «*равновесное программирование*». В МГУ эти исследования проводятся на факультете вычислительной математики и кибернетики под руководством профессоров Ф.П. Васильева, А.С. Антипина (см., например, работы [1,2]). Однако, полученные до сих пор методы нахождения равновесной ситуации могут «вывести» на ситуацию равновесия по Нэшу, которая не обязательно максимальна по Парето (сами методы не гарантируют такую максимальность). Если же основываться на достаточных условиях, представленных ниже теоремой 4.1, то такая гарантия уже будет!

3. Формализация Парето–равновесной ситуации

Опять рассматриваем бескоалиционную игру (1)

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

которой поставим в соответствие N-критериальную задачу (5)

$$\langle \mathbf{X}^e, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Напомним, что найденное согласно определению 2.1 множество ситуаций равновесия по Нэшу x^e игры (1) обозначаем через $\mathbf{X}^e$, а множество максимальных по Парето альтернатив x^P задачи (5) (определение 2.2) – через $\mathbf{X}^P$.

Определение 3.1. *Ситуацию $x^* \in \mathbf{X}$ назовем Парето–равновесной для игры* (1), *если x^* одновременно*

a) *равновесна по Нэшу в* (1) (*определение* 2.1),

b) *максимальна по Парето в* (5) (*определение* 2.2).

Замечание 3.1. Два класса игр, в которых существуют Парето–равновесные ситуации в чистых стратегиях приведены в [13, с. 91-92], и для дифференциальных игр – в [9-11,19]. В примере 2.1 Парето–равновесных ситуаций две $x^* = (-1,-1)$ и $x^{**} = (1,1)$.

Замечание 3.2. Доказательство существования x^* в (1) в случае $\mathbf{X}^e \neq \varnothing$, компактности $\mathbf{X}_i$ и непрерывности $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ сразу следует из $\mathbf{X}^e \in comp\mathbf{X}$ и [13, с. 137].

4. Достаточные условия Парето–равновесности

Основываясь на (2) и (5) введем $N+1$ скалярных функций

$$\begin{aligned} \varphi_i(x,z) \;&=\; f_i(z\|x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}),\\ \varphi_{N+1}(x,z) \;&=\; \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z), \end{aligned} \tag{7}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_N)$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $z \in \mathbf{X}$, $x \in \mathbf{X}$. Гермейеровская свертка [4, с.43] скалярных функций (7) будет

$$\varphi(x,z) \;=\; \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z). \tag{8}$$

Наконец, игре (1) и N-критериальной задаче (5) поставим в соответствие *антагонистическую* игру

$$\langle\, \mathbf{X},\ \mathbf{Z} = \mathbf{X},\ \varphi(x,z)\,\rangle\,, \tag{9}$$

в которой первый игрок выбирает свою стратегию $x \in \mathbf{X}$ с целью увеличить, а его противник формирует стратегию $z \in \mathbf{X}$, добиваясь возможного уменьшения платежной функции $\varphi(x,z)$ из (7), (8).

Седловая точка $(x^0, z^*) \in \mathbf{X}^2$ игры (9) определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x,z^*) \;\leqslant\; \varphi(x^0,z^*) \;\leqslant\; \varphi(x^0,z) \quad\ \forall\, x,z \in \mathbf{X}, \tag{10}$$

в этом случае седловую точку образуют минимаксная z^*

$$\left(\min_{z\in\mathbf{X}} \max_{x\in\mathbf{X}} \varphi(x,z) \;=\; \max_{x\in\mathbf{X}} \varphi(x,z^*)\right)$$

и максиминная x^0

$$\left(\max_{x\in\mathbf{X}} \min_{z\in\mathbf{X}} \varphi(x,z) \;=\; \min_{z\in\mathbf{X}} \varphi(x^0,z)\right)$$

стратегии игры (9).

Достаточному условию существования Парето–равновесной ситуации игры (1) посвящено следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если для антагонистической игры* (9) *существует седловая точка* (x^0, z^*) (*выполнено* (10)), *то минимаксная стратегия* z^* *является Парето–равновесной ситуацией для игры* (1).

Доказательство. В правом неравенстве из (10) положим $z = x^0$, тогда, с учетом (7) и (8), имеем

$$\varphi(x^0, x^0) = \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x^0, x^0) = 0.$$

Отсюда, согласно (10), при всех $x \in \mathbf{X}$ будет

$$0 \geqslant \varphi(x, z^*) = \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x, z^*).$$

Поэтому справедлива цепочка импликаций: при $\forall\, x \in \mathbf{X}$

$$\begin{gathered}
\left[0 \geqslant \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x, z^*) \geqslant \varphi_j(x, z^*)\right] \Longrightarrow \\
\Longrightarrow [\varphi_j(x, z^*) \leqslant 0 \ (j = 1, \dots, N, N+1)] \overset{(7)}{\Longrightarrow} \\
\overset{(7)}{\Longrightarrow} \{[f_i(z^* \| x_i) - f_i(z^*) \leqslant 0 \quad \forall x_i \in \mathbf{X}_i \ \ (i \in \mathbb{N})] \bigwedge \\
\bigwedge \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) - \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z^*) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}^e\right]\right\} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow \left\{\left[\max_{x_i \in \mathbf{X}_i} f_i(z^* \| x_i) = f_i(z^*) \ (i \in \mathbb{N})\right] \bigwedge \right. \\
\left. \bigwedge \left[\max_{x \in \mathbf{X}^e} \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(z^*)\right]\right\} \overset{(2),(6)}{\Longrightarrow} \\
\overset{(2),(6)}{\Longrightarrow} \left\{[z^* \in \mathbf{X}^e] \bigwedge \left[z^* \in \mathbf{X}^P\right]\right\},
\end{gathered}$$

здесь использовано включение $\mathbf{X}^e \subseteq \mathbf{X}$. □

Замечание 4.1. Теорема 4.1 обосновывает следующий *способ* построения Парето–равновесной ситуации x^* в игре (1):

Шаг 1. Используя функции выигрыша $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ из (1) и вектора $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z_i \in \mathbf{X}_i$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, построить функцию $\varphi(x, z)$ по формулам (7) и (8).

Шаг 2. Найти седловую точку (x^0, z^*) антагонистической игры (9). И тогда z^* будет Парето–равновесным решением игры (1).

По нашему мнению, численные методы нахождения седловой точки (x^0, z^*) гермейеровской свертки

$$\varphi(x, z) = \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x, z)$$

до сих пор специально не разрабатывались, но они нужны (см. теорему 4.1) для построения ситуаций равновесия по Нэшу, одновременно максимальных по Парето. Представляется, что это новое направление в равновесном программировании и развитие его, опять–таки по нашему мнению, может происходить за счет применения математического аппарата нахождения экстремумов гермейеровской свертки $\max\limits_j \varphi_j(x)$ (созданного профессором В.Ф. Демьяновым [5]).

Замечание 4.2. Из результатов теории исследования операций [12, с. 54] получаем следующее утверждение, которое является базовым при доказательстве (в следующем разделе 5) существования Парето–равновесной ситуации в смешанных стратегиях в игре (1). Именно, если в (1) множества $\mathbf{X}_i \in comp\ \mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, то гермейеровская свертка $\varphi(x,z) = \max\limits_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x,z)$ из (7), (8) непрерывна на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

5. Существование Парето–равновесной ситуации в смешанных стратегиях

Надежда, что в игре (1) существует Парето–равновесная ситуация в *чистых стратегиях* (определение 3.1), весьма и весьма призрачна. Наличие этого равновесия возможно лишь для специального вида функций выигрыша, множеств стратегий, количества игроков. Поэтому, следуя подходу, идущему от Эмиля Бореля [14], Джона фон Неймана [20], Джона Нэша [18] и их последователей, установим существование Парето–равновесной ситуации игры (1) в смешанных стратегиях при «привычных» для математической теории игр ограничениях (компактность множества стратегий игроков и непрерывность функций выигрыша).

Итак, далее предположим, что в игре (1) множества $\mathbf{X}_i$ чистых стратегий x_i являются компактами в $\mathbb{R}^{n_i}$ (замкнуты и ограничены), а функции выигрыша $f_i(x)$ каждого i-го игрока $(i \in \mathbb{N})$ непрерывны на множестве ситуаций в чистых стратегиях $\mathbf{X} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_i$.

Перейдем к *смешанному расширению игры* (1). С этой целью на каждом из N компактов $\mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ построим борелевскую σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbf{X}_i)$, а также вероятностные меры $\nu_i(\cdot)$ на $\mathfrak{B}(\mathbf{X}_i)$ (то есть неотрицательные скалярные функции, определенные на элементах $\mathfrak{B}(\mathbf{X}_i)$, счетно–аддитивные и нормированные на $\mathbf{X}_i$ единицей); все множество таких мер обозначим символом $\{\nu_i\}$, а саму меру $\nu_i(\cdot)$ называют *смешанной стратегией i-го игрока* ($i \in \mathbb{N}$) в игре (1). Затем для этой же игры (1) строим *ситуации в смешанных стратегиях*, то есть меры–произведения $\nu(dx) = \nu_1(dx_1)\dots\nu_N(dx_N)$, множество таких ситуаций обозначим через $\{\nu\}$. И, наконец, находим математические ожидания

$$f_i(\nu) \;=\; \int\limits_{\mathbf{X}} f_i(x)\nu(dx) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{11}$$

В результате игре Γ из (1) поставим в соответствие *ее смешанное расширение*

$$\widetilde{\Gamma} = \langle \mathbb{N}, \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(\nu)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle.$$

В бескоалиционной игре $\widetilde{\Gamma}$:

$\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$ – смешанная стратегия игрока i,

$\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ – ситуация в смешанных стратегиях,

$f_i(\nu)$ – функция выигрыша i-го игрока, определенная в (11).

Далее будем применять вектор $z = (z_1,\dots,z_N) \in \mathbf{X}$, где $z_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$), и, конечно, $x = (x_1,\dots,x_N) \in \mathbf{X}$, ситуации в смешанных стратегиях $\nu(\cdot), \mu(\cdot) \in \{\nu\}$, математические ожидания

$$\begin{aligned}
&f_i(\nu) = \int\limits_{\mathbf{X}} f_i(x)\nu(dx), \quad f_i(\mu) = \int\limits_{\mathbf{X}} f_i(z)\mu(dz),\\
&f_i(\mu\|\nu_i) = \int\limits_{\mathbf{X}_1}\dots\int\limits_{\mathbf{X}_{i-1}}\int\limits_{\mathbf{X}_i}\int\limits_{\mathbf{X}_{i+1}}\dots\int\limits_{\mathbf{X}_N} f_i(z_1,\dots,z_{i-1},x_i,z_{i+1},\dots\\
&\qquad\dots,z_N)\mu_N(dz_N)\dots\mu_{i+1}(dz_{i+1})\nu_i(dx_i)\mu_{i-1}(dz_{i-1})\dots\mu_1(dz_1),
\end{aligned} \tag{12}$$

причем, подчеркнем еще раз, что $x_i, z_i \in \mathbf{X}_i$ ($i \in \mathbb{N}$) и $x, z \in \mathbf{X}$.

Определению 2.1. ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях $x^e \in \mathbf{X}$ для игры (1) отвечает следующее понятие равновесной по Нэшу ситуации $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ в смешанных стратегиях в той же исходной игре (1).

Определение 5.1. *Ситуацию $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ называют равновесной по Нэшу для игры $\widetilde{\Gamma}$, если*

$$f_i(\nu^e\|\nu_i) \;\leqslant\; f_i(\nu^e) \quad \forall\, \nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\} \quad (i \in \mathbb{N}); \tag{13}$$

эту же $\nu^e(\cdot) \in \{\nu\}$ будем так же иногда называть равновесной по Нэшу ситуацией в смешанных стратегиях для игры (1).

По теореме Гликсберга [17] при выполнении ограничений $\mathbf{X}_i \in$ $\in comp\,\mathbb{R}^{n_i}$ и $f_i(\cdot) \in C(\mathbf{X})$ $(i \in \mathbb{N})$, в игре (1) существует равновесная по Нэшу ситуация в смешанных стратегиях. Обозначим множество таких $\{\nu^e\}$ через $\mathfrak{N}$.

Игре $\widetilde{\Gamma}$ поставим в соответствие N-критериальную задачу

$$\widetilde{\Gamma}_v = \langle \mathfrak{N}, \{f_i(\nu)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle. \tag{14}$$

В (14) ЛПР (лицо, принимающее решение) выбирает ситуацию $\nu(\cdot) \in$ $\in \mathfrak{N}$ с целью добиться одновременно возможно больших значений всех компонент векторного критерия $f(\nu) = (f_1(\nu), \ldots, f_N(\nu))$. Общепринятым здесь является понятие максимальной по Парето ситуации. Именно:

Определение 5.2. *Ситуацию $\nu^P(\cdot) \in \mathfrak{N}$ назовем максимальной по Парето для N-критериальной задачи $\widetilde{\Gamma}_s$ из* (14)*, если при любых $\nu(\cdot) \in \mathfrak{N}$ несовместна система неравенств*

$$f_i(\nu) \geqslant f_i(\nu^P) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых, по крайней мере, одно неравенство строгое.

Аналогом (6) является **утверждение**: если при всех $\nu(\cdot) \in \mathfrak{N}$ имеет место

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\nu) \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(\nu^P), \tag{15}$$

то ситуация в смешанных стратегиях $\nu^P(\cdot) \in \mathfrak{N}$ максимальна по Парето в задаче $\widetilde{\Gamma}_v$ из (14).

Объединение определений 5.1 и 5.2 приводит к

Определение 5.3. $\nu^*(\cdot) \in \{\nu\}$ *назовем Парето–равновесной ситуацией в смешанных стратегиях для игры* (1)*, если*

1^0. $\nu^*(\cdot)$ *является равновесной по Нэшу в игре* $\widetilde{\Gamma}$ (*по определению* 5.1)*,*

2^0. $\nu^*(\cdot)$ *максимальна по Парето в многокритериальной задаче* (14) (*по определению* 5.2)*.*

Перейдем к доказательству существования равновесной по Нэшу ситуации в смешанных стратегиях, одновременно максимальной по Парето по отношению к остальным ситуациям равновесия по Нэшу.

Утверждение 5.1. *Пусть в бескоалиционной игре* (1)

1^0. *у каждого i-го игрока множество чистых стратегий* $\mathbf{X}_i$ *есть непустой компакт в* $\mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$,

2^0. *функции выигрыша* $f_i(x)$ *у i-го игрока* $(i \in \mathbb{N})$ *непрерывны на множестве ситуаций* $\mathbf{X} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{X}_i$.

Тогда в игре (1) *существует Парето–равновесная ситуация в смешанных стратегиях.*

Доказательство. По формулам (7) и (8) построим скалярную функцию

$$\varphi(x, z) \;=\; \max_{j=1,\ldots,N,N+1} \varphi_j(x, z),$$

где, напомним,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, z) \;&=\; f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}), \\ \varphi_{N+1}(x, z) \;&=\; \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r \in \mathbb{N}} f_r(z); \end{aligned}$$

здесь вектор $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{X}$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$ и $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{X}$, $x_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Согласно построению и замечанию 4.2 рассматриваемая функция $\varphi(x, z)$ определена и непрерывна на произведении компактов $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Построим вспомогательную антагонистическую игру

$$\Gamma_a = \langle\ \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}, \mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}, \varphi(x, z)\ \rangle,$$

в ней игрок I выбором своей стратегии $x \in \mathbf{X}$ стремится максимизировать, а игрок II выбором $z \in \mathbf{X}$, наоборот, минимизировать функцию $\varphi(x, z)$, непрерывную на $\mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ $(\mathbf{Z} = \mathbf{X})$.

Теперь применим к игре Γ_a частный случай теоремы Гликсберга [17], ибо седловая точка в игре Γ_a совпадает с ситуацией равновесия по Нэшу в бескоалиционной игре двух лиц

$$\Gamma_2 = \langle\ \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}, \{\mathbf{X}, \mathbf{Z} = \mathbf{X}\}, \{f_{\mathrm{I}}(x, z) = \varphi(x, z),\ f_{\mathrm{II}}(x, z) = -\varphi(x, z)\}\ \rangle.$$

В этой игре игрок I выбором своей стратегии $x \in \mathbf{X}$ стремится максимизировать $f_{\mathrm{I}}(x, z) = \varphi(x, z)$ и игрок II – максимизировать $f_{\mathrm{II}}(x, z) = -\varphi(x, z)$. Поэтому, согласно упомянутой теореме Гликсберга (так как в игре Γ_2 множества $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ суть компакты, и

$f_{\mathrm{I}}(x,z)$, $f_{\mathrm{II}}(x,z)$ непрерывны на $\mathbf{X}\times\mathbf{Z}$) существует ситуация равновесия по Нэшу (ν^e,μ^*) в смешанном расширении Γ_2:

$$\widetilde{\Gamma}_2 = \langle\ \{\mathrm{I},\mathrm{II}\},\{\nu\},\{\mu\},\{f_i(\nu,\mu)=\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}} f_i(x,z)\nu(dx)\mu(dz)\}_{i=\mathrm{I},\mathrm{II}}\ \rangle,$$

причем, очевидно, (ν^e,μ^*) одновременно является седловой точкой смешанного расширения игры Γ_a:

$$\widetilde{\Gamma}_a = \left\langle\ \{\mathrm{I},\mathrm{II}\},\{\nu\},\{\mu\},\varphi(\nu,\mu)=\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\varphi(x,z)\nu(dx)\mu(dz)\ \right\rangle.$$

Итак, согласно упомянутой теореме Гликсберга существует пара (ν^e,μ^*), которая является седловой точкой $\varphi(\nu,\mu)$, то есть

$$\varphi(\nu,\mu^*)\ \leqslant\ \varphi(\nu^e,\mu^*)\ \leqslant\ \varphi(\nu^e,\mu),\quad \forall\ \nu(\cdot),\mu(\cdot)\in\{\nu\}. \tag{16}$$

Положив в правом неравенстве из (16) $\mu=\nu^e$, получаем $\varphi(\nu^e,\nu^e)=0$, и поэтому при $\forall\ \nu(\cdot)\in\{\nu\}$ из (16) следует

$$0\ \geqslant\ \varphi(\nu,\mu^*)=\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\max_{j=1,\dots,N+1}\varphi_j(x,z)\nu(dx)\mu^*(dz). \tag{17}$$

В [7] установлено, что

$$\begin{aligned}\max_{j=1,\dots,N+1}\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\varphi_j(x,z)\nu(dx)\mu(dz)\ \leqslant&\\ \leqslant\ \int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\max_{j=1,\dots,N+1}\varphi_j(x,z)\nu(dx)\mu(dz)&\end{aligned} \tag{18}$$

(аналог свойства: максимум суммы не больше суммы максимумов). Из (17) и (18) получаем

$$\max_{j=1,\dots,N+1}\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\varphi_j(x,z)\nu(dx)\mu^*(dz)\ \leqslant\ 0\quad\forall\ \nu(\cdot)\in\{\nu\},$$

но тогда тем более для каждого $j=1,\dots,N,N+1$ будет

$$\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\varphi_j(x,z)\nu(dx)\mu^*(dz)\ \leqslant\ 0\quad\forall\ \nu(\cdot)\in\{\nu\}. \tag{19}$$

Далее (с учетом нормированности не только смешанных стратегий, но и так же ситуаций в смешанных стратегиях, именно

$$\int\limits_{\mathbf{X}} \nu_i(dx_i) = 1, \int\limits_{\mathbf{X}} \mu_i(dz_i) = 1 \ (i \in \mathbb{N}), \int\limits_{\mathbf{X}} \nu(dx) = 1, \int\limits_{\mathbf{X}} \mu(dz) = 1 \quad (20)$$

при $\forall\ \nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$, $\mu_i(\cdot) \in \{\mu_i\}$, $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, $\mu(\cdot) \in \{\mu\}$), выделим два случая: $j \in \mathbb{N}$ и $j = N+1$, для которых уточним вид неравенств (19).

Случай 1: $j \in \mathbb{N}$. Применяя (7) и (20) при каждом $i \in \mathbb{N}$, неравенство (19) сводится к виду

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}} [f_i(z\|x_i) - f_i(z)]\,\nu(dx)\mu^*(dz) = \int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}_i} [f_i(z\|x_i) - \\ -f_i(z)]\,\nu_i(dx_i)\mu^*(dz) = \int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}_i} f_i(z\|x_i)\nu_i(dx_i)\mu^*(dz) - \\ -\int\limits_{\mathbf{X}} f_i(z)\mu^*(dz)\int\limits_{\mathbf{X}_i}\nu_i(dx_i) \overset{(12),(20)}{=} \Bigg[\int\limits_{\mathbf{X}_1}\dots\int\limits_{\mathbf{X}_{i-1}}\int\limits_{\mathbf{X}_i}\int\limits_{\mathbf{X}_{i+1}}\dots\int\limits_{\mathbf{X}_N} f_i\,(z_1,\dots \\ \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_N)\mu_N^*(dz_N)\dots\mu_{i+1}^*(dz_{i+1})\nu_i(dx_i)\mu_{i-1}^*(dz_{i-1})\dots \\ \dots\mu_1^*(dz_1)\Big] - f_i(\mu^*) = f_i(\mu^*\|\nu_i) - f_i(\mu^*) \ \leqslant 0 \quad \forall\ \nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}.\end{gathered}$$

Отсюда и из (13) следует включение $\mu^*(\cdot) \in \mathfrak{N}$, то есть ситуация в смешанных стратегиях $\mu^*(\cdot)$ будет равновесной по Нэшу для игры (1) (определение 5.1).

Случай 2: $j = N+1$. Для $j = N+1$ неравенство (19) тогда примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}} \varphi_{N+1}(x,z)\nu(dx)\mu^*(dz) \overset{(7)}{=} \int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)\nu(dx)\mu^*(dz) - \\ -\int\limits_{\mathbf{X}}\int\limits_{\mathbf{X}}\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(z)\nu(dx)\mu^*(dz) = \int\limits_{\mathbf{X}}\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)\nu(dx)\int\limits_{\mathbf{X}}\mu^*(dz) - \\ -\int\limits_{\mathbf{X}}\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(z)\mu^*(dz)\int\limits_{\mathbf{X}}\nu(dx) \overset{(20)}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_{\mathbf{X}} f_i(x)\nu(dx) - \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_{\mathbf{X}} f_i(z)\mu^*(dz) \overset{(12)}{=} \\ \overset{(12)}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(\nu) - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(\mu^*) \ \leqslant\ 0 \quad \forall\nu(\cdot) \in \mathfrak{N},\end{gathered}$$

ибо $\mathfrak{N} \subseteq \{\nu\}$. Откуда сразу следует (15) при $\nu^P = \mu^*$, то есть ситуация $\mu^*(\cdot)$ максимальна по Парето для N-критериальной задачи $\widetilde{\Gamma}_v$ из (14) (определение 5.2)

Итак, этот вывод и включение $\mu^*(\cdot) \in \mathfrak{N}$ как раз и завершают доказательство утверждения. □

Замечание 5.1. Другой способ доказательства утверждения 5.1 в [7, с. 13-15] и замечании 3.2.

6. Заключение

Основатель математической теории игр в России Николай Николаевич Воробьев считал [3], что содержание теории игр сводится к ответам на следующие 3 вопроса:

1) В чем состоит оптимальность для данной игры?

2) Существует ли оптимальное решение?

3) Как его найти?

Ответ на первый из этих вопросов для бескоалиционной игры многих лиц: Парето–равновесная ситуация (определение 3.1).

Ответ на второй дается утверждением 5.1: если множества стратегий компактны, а функции выигрыша непрерывны, то существует такое равновесие в смешанных стратегиях.

Оказывается, что ответ на третий вопрос далеко не простой. На первый взгляд кажется, что достаточно по формулам (7) и (8) построить гермейеровскую свертку функций выигрыша, и затем найти седловую точку (10). Тогда минимаксная стратегия, входящая в седловую точку, как раз и будет Парето–равновесной ситуацией (этот способ построения, диктуемый теоремой 4.1, и является центральным результатом настоящей работы). Однако, вопросы построения седловой точки гермейеровской свертки до сих пор не разработаны. Вопрос применения конкретных численных алгоритмов и анализа их сложности остается открытым и будет предметом дальнейших исследований как авторов, так и, надеемся, читателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П., Антипин А.С., Артемьева Л.А. *Регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод решения параметрической многокритериальной задачи равновесного программирования* // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 434. № 4. С. 434–442.

2. Васильев Ф.П., Антипин А.С. *Методы регуляризации для решения неустойчивых задач равновесного программирования со связанными ограничениями* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 1. С. 27–40.

3. Воробьев Н.Н. *Современное состояние теории игр* // Успехи математических наук. 1970. Т. 25. № 2. С. 81–140.

4. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971.

5. Демьянов В.Ф., Малоземов В.И. *Введение в минимакс.* М.: Наука, 1972.

6. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 1. С. 27–44.

7. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 2. С. 3–45.

8. Клейменов А.Ф., Кувшинов Д.Р., Осипов С.И. *Численное построение решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц* // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 120–133.

9. Кононенко А.Ф., Конурбаев Е.М. *Существование равновесных ситуаций в классе позиционных стратегий, оптимальных по Парето для некоторых дифференциальных игр* // Сборник «Теория игр и ее приложения». Кемерово. 1983. с. 105–115.

10. Мамедов М.Б. *Исследование неулучшаемых ситуаций равновесия в нелинейных конфликтно-управляемых динамических системах* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 2. С. 308–317.

11. Мамедов М.Б. *О равновесности по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето* // Известия АН Азерб. ССР, Сер. физ-техн. и матем. наук. 1983. Т. 4. № 2. С. 11–17.

12. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* М.: Наука, 1986.

13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето–оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Физматлит, 2007.

14. Borel E. *La théorie du jeu et les equations inténgrales a noyau symétrique* // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. 1921. V. 173. 1304–1308.

15. Gasko N., Suciu M., Lung R.I., Dumitrescu D. *Pareto-optimal Nash equilibrium detection using an evolutionary approach* // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. 2012. V.4. N.2. P.237–246.

16. Gatti N., Rocco M., Sandhom T. *On the verification and computation of strong Nash equilibrium* // Proceedings of the ACM International Joint Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS), Saint Paul, USA, May 6-10. 2013. P.723–730.

17. Glicksberg I.L. *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points* // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. N 1. P. 170–174.

18. Nash J.F. *Equilibrium points in N-person games* // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. 1950. V. 36. P. 48-49.

19. Starr A.W., Ho Y.C. *Further properties of nonzero–sum differential games* // J. Optimiz. Theory and Appl. 1969. V. 3. N 4. P. 207–219.

20. Von Neumann J. *Zur Theorie der Gesellschaftspiele* // Math. Ann. 1928. V. 100. N 1. P. 295–320.

PARETO–EQUILIBRIUM STRATEGY PROFILE

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Konstantin N. Kudryavtsev, South Ural State University, Cand.Sc. (kudrkn@gmail.com).

Abstract: In the article the strategy profiles that are the Pareto–optimal the Nash equilibriums are considered. Sufficient conditions for existence of the equilibrium for the pure strategies are found. These conditions use the Germier convolutions of the utility functions. For non-cooperative games with compact strategy sets and with continuous utility functions existence of the Pareto–optimal Nash equilibriums in mixed strategies is proved.

Keywords: non-cooperative game, mixed strategies, Nash equilibrium, Pareto optimums.