

УДК 519.833.2

ББК В 11

ГОЛОСОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ СОВМЕСТНОГО НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

АННА А. ИВАШКО*

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
e-mail: aivashko@krc.karelia.ru

В работе рассматривается некооперативная игра m лиц наилучшего выбора с полной информацией о значениях качеств поступающих претендентов. Принятие совместного решения происходит путем голосования игроков. Найдены оптимальные пороговые стратегии и выигрыши игроков в зависимости от значения порога голосования. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: игра наилучшего выбора, пороговая стратегия, голосование.

1. Введение

В работе рассматривается следующая некооперативная игра m лиц с принятием совместного решения путем голосования. Пусть комиссия из m человек (игроков) хочет принять на работу специалиста. Всего имеется n претендентов на свободное место. Претенденты поступают последовательно по одному в каждый момент времени.

©2015 А.А. Ивашко

* Работа поддержана грантом РФФИ, проект 10-01-00033_а и Отделением математических наук РАН

Каждый игрок при собеседовании с текущим претендентом наблюдает значение отдельного его качества, например, знание иностранного языка, навыки работы на компьютере и т.д. Значение качества каждого претендента для каждого игрока определяется равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$ случайной величиной. Качества одного претендента для разных игроков являются независимыми. Каждый игрок после собеседования с очередным претендентом голосует: принять или отвергнуть его. Претендент принимается, если при голосовании не менее k ($1 \leq k \leq m$) членов комиссии согласны его принять, и тогда игра заканчивается. Каждый игрок получает в качестве выигрыша значение качества выбранного специалиста. В противном случае он отвергается и рассматривается следующий, при этом к отвергнутому претенденту нельзя будет вернуться в дальнейшем. Если в игре остался только один претендент, то игроки вынуждены его принять. Каждый игрок стремится максимизировать свой ожидаемый выигрыш.

Данная игра относится к классу задач наилучшего выбора с полной информацией о значениях качеств поступающих претендентов. Игры с двумя участниками и известной функцией распределения значений качеств специалистов рассмотрены в работах [4, 8, 9]. Задача голосования с отсутствием информации о значениях качеств претендентов была исследована в работе [2]. Другие постановки задачи наилучшего выбора с несколькими игроками рассмотрены, например, в работах [1, 3, 5, 7].

В работе [6] найдено решение в задаче наилучшего совместного выбора с полной информацией и принятием решения большинством голосов. В представленной работе рассмотрено обобщение данной задачи на случай принятия текущего претендента, если количество голосов больше или равно определенному значению порога голосования. Оказывается, что при увеличении порога голосования, каждый игрок может получить больший выигрыш, чем при большинстве голосов. Найдены оптимальные пороговые стратегии и выигрыши игроков. Исследовано поведение порога голосования и выигрышей игроков для случая $m = 3$ и для больших значений m и n .

2. Случай трех игроков

Рассмотрим случай трех игроков. Пусть комиссия из трех человек

хочет принять на работу специалиста. Всего имеется n претендентов на свободное место. Рассмотрим многошаговую игру, в которой на каждом шаге происходит собеседование с текущим претендентом. Пусть на шаге i в игре имеется i претендентов. При собеседовании с текущим претендентом каждый игрок наблюдает значение его качества. Основываясь на этой информации, он решает принять или отвергнуть его. Если при голосовании по крайней мере k ($1 \leq k \leq m$) игроков решили принять текущего претендента, то претендент принимается, и игра заканчивается. В противном случае претендент отвергается, и игроки переходят на шаг $i - 1$, где в игре осталось $i - 1$ претендентов. По условию задачи к отвергнутому претенденту нельзя вернуться в дальнейшем. Если все претенденты кроме последнего отвергнуты, то игроки вынуждены его принять. Каждый игрок стремится максимизировать ожидаемое значение качества выбранного специалиста.

Введем обозначения: x – значение качества текущего претендента для игрока 1, y – для игрока 2 и z – для игрока 3, u_i, v_i, w_i – ожидаемые выигрыши игроков 1, 2 и 3 на шаге i , соответственно.

Например, если $k = 2$, то на i -ом шаге игру можно изобразить в виде матрицы, где стратегиями игроков являются П – принять и О – отклонить

$$M_i(x, y, z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{П} & \text{О} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{П} \\ \text{О} \end{matrix} & \begin{pmatrix} (x, y, z) & (x, y, z) \\ (x, y, z) & (u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1}) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{П} & \text{О} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{О} \\ \text{О} \end{matrix} & \begin{pmatrix} (x, y, z) & (u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1}) \\ (u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1}) & (u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1}) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Из вида матрицы получаем, что для игроков 1, 2 и 3 стратегия П доминирует стратегию О при $x \geq u_{i-1}$, $y \geq v_{i-1}$ и $z \geq w_{i-1}$ соответственно. Аналогичный вывод можно сделать и для $k = 1, 3$.

Тогда выигрыш первого игрока на шаге i имеет вид

$$u_i = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \left[u_{i-1}(I_0 + \dots + I_{k-1}) + x(I_k + \dots + I_3) \right],$$

где $i = 2, 3, \dots, n$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $k = 1, 2, 3$; I_l – индикатор события, при котором l игроков приняли решение принять текущего претендента, $l = 0, 1, 2, 3$.

В силу симметрии положим $u_i = v_i = w_i$, тогда выигрыши игроков для различных значений k имеют вид:

$$k = 1,$$

$$u_i = \frac{u_{i-1}^2}{2} [(1 - u_{i-1})^2 + 2u_{i-1}(1 - u_{i-1})] + u_{i-1}^4 + \frac{1 - u_{i-1}^2}{2} [u_{i-1}^2 + (1 - u_{i-1})^2 + 2u_{i-1}(1 - u_{i-1})] = \frac{1}{2}(1 + u_{i-1}^4);$$

$$k = 2,$$

$$u_i = \frac{u_{i-1}^2}{2} (1 - u_{i-1})^2 + u_{i-1}^2 [u_{i-1}^2 + 2u_{i-1}(1 - u_{i-1})] + \frac{1 - u_{i-1}^2}{2} [2(1 - u_{i-1})u_{i-1} + (1 - u_{i-1})^2] + (1 - u_{i-1})u_{i-1}^3 = u_{i-1} + (1 - u_{i-1})^2 \left(\frac{1}{2} - u_{i-1}^2 \right);$$

$$k = 3,$$

$$u_i = u_{i-1}^2 [u_{i-1}^2 + 2u_{i-1}(1 - u_{i-1}) + (1 - u_{i-1})^2] + \frac{1 - u_{i-1}^2}{2} (1 - u_{i-1})^2 + (1 - u_{i-1})u_{i-1} [u_{i-1}^2 + 2u_{i-1}(1 - u_{i-1})] = u_{i-1} + \frac{(1 - u_{i-1})^4}{2}.$$

Случай $k = 2$ был рассмотрен в работе [6]. Авторами доказано, что для этого случая $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Сравним значения полученных выигрышей с выигрышами в задачах с одним и двумя участниками.

В задаче с одним участником ожидаемые выигрыши представляют собой последовательность Мозера и имеют вид

$$u_1 = 1/2, u_i = \frac{1 + u_{i-1}^2}{2}, i = 2, \dots, n.$$

В задаче с двумя игроками вопрос о выборе объекта, если игроки приняли различные решения, может решаться арбитром. В работе [8] рассмотрена игра, в которой арбитр вынуждает игроков сделать одинаковые решения с вероятностью p . Выигрыши игроков для симметричного случая $p = 1/2$ имеют вид

$$u_1 = 1/2, u_i = \frac{1}{4}(3u_{i-1}^2 - u_{i-1} + 2), i = 2, \dots, n.$$

В табл. 1 приводятся численные результаты выигрышей на первом шаге u_n для задач с одним игроком ($m = 1$), с двумя игроками ($m = 2, p = 1/2$) и с тремя игроками с голосованием ($m = 3$) для различных значений n .

Таблица 1. Выигрыши игроков при $m = 1, 2, 3$ для различных значений n

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$		
	u_n	$p = 1/2$ u_n	$k = 1$ u_n	$k = 2$ u_n	$k = 3$ u_n
10	0.861	0.659	0.5436	0.677	0.646
20	0.920	0.666	0.543	0.700	0.702
$n \rightarrow \infty$	1	$2/3$	0.544	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$	1

Как видно из таблицы, при небольшом числе шагов выигрыш на первом шаге в задаче с тремя игроками и принятием решения большинством голосов больше, чем в задаче с единогласным принятием решения. Но при больших значениях n наибольший выигрыш в задаче с тремя игроками достигается в случае единогласного принятия решения.

Теорема 2.1. Для задачи с тремя игроками и единогласным принятием решения $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Доказательство. Выигрыши игроков в данной задаче имеют вид

$$u_1 = 1/2, u_i = u_{i-1} + \frac{(1 - u_{i-1})^4}{2}, i = 2, \dots, n.$$

Докажем, что $1/2 \leq u_n < 1$ для $n \geq 1$.

Доказательство проведем по индукции. Получим $u_1 = 1/2 < 1$, $1/2 < u_2 = 1/2 + 1/2^5 < 1$ и т.д.

Предположим, что утверждение $1/2 \leq u_n < 1$ верно. Покажем, что $1/2 < u_{n+1} < 1$, т.е.

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} = u_n + \frac{(1 - u_n)^4}{2} < 1,$$

что эквивалентно

$$(1 - u_n) \left(1 - \frac{(1 - u_n)^3}{2} \right) > 0,$$

$$u_n + \frac{(1 - u_n)^4}{2} > \frac{1}{2},$$

Данные неравенства выполняются, учитывая, что $1/2 \leq u_n < 1$.

Последовательность u_n возрастает и $u_n < 1$, следовательно она имеет предел. Этот предел u удовлетворяет уравнению

$$u = u + \frac{(1 - u)^4}{2},$$

и равен $u = 1$. □

Теорема 2.2. *В задаче с тремя игроками для $n \geq 20$ выигрыши на первом шаге при единогласном принятии решения больше, чем выигрыши при принятии решения большинством голосов.*

Доказательство. Обозначим выигрыши в задаче с единогласным принятием решения u'_n , а u_n – выигрыши в задаче с принятием решения большинством голосов. Тогда необходимо доказать неравенство $u'_n > u_n$ для $n \geq 20$.

Доказательство этого утверждения проведем по индукции. Для $n < 20$ последовательно проверяем

$$u'_1 = 1/2 = u_1; u'_2 = 0.531 < u_2 = 0.562; \dots; u'_{19} = 0.698 < u_{19} = 0.699.$$

Для $n = 20$ $u'_{20} = 0.702 > u_{20} = 0.700$. Предположим, что утверждение $u'_n > u_n$ верно для $n \geq 20$. Докажем его для $u'_{n+1} > u_{n+1}$.

Для этого необходимо доказать неравенство

$$u'_n + \frac{(1 - u'_n)^4}{2} > u_n + (1 - u_n)^2 \left(\frac{1}{2} - u_n^2 \right).$$

Рассмотрим функции, соответствующие левой и правой частям неравенства:

$$f(x) = x + \frac{(1 - x)^4}{2} \text{ и } g(x) = x + (1 - x)^2 \left(\frac{1}{2} - x^2 \right), \quad x > 1/2.$$

Получим $f(x) > g(x)$ при $x > \frac{2}{3}$.

Учитывая, что $u'_n > u_n$, получим

$$f(u'_n) > g(u_n).$$

Следовательно неравенство верно, что доказывает утверждение теоремы. \square

3. Случай m игроков

Теперь рассмотрим задачу с m игроками. Текущий претендент принимается, если по крайней мере k членов комиссии согласны его принять, $1 \leq k \leq m$.

Обозначим x^j – значение качества претендента на шаге i для j -го игрока, и u_i^j – ожидаемый выигрыш j -го игрока на i -том шаге, $j = 1, \dots, m$. Также, как и ранее, для j -го игрока оптимально принять текущего претендента, если $x^j \geq u_{i-1}^j$. В силу симметрии $u_i^1 = u_i^2 = \dots = u_i^m = u_i$ и $x^1 = x^2 = \dots = x^m = x$. Тогда выигрыши игроков имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}, \\ u_i &= \int_0^{u_{i-1}} u_{i-1}(J_0 + \dots + J_{k-1})dx + \int_{u_{i-1}}^1 u_{i-1}(J_0 + \dots + J_{k-2})dx + \\ &\quad + \int_0^{u_{i-1}} x(J_k + \dots + J_{m-1})dx + \int_{u_{i-1}}^1 x(J_{k-1} + \dots + J_{m-1})dx = \\ &= \int_0^{u_{i-1}} \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l dx + \int_{u_{i-1}}^1 \sum_{l=0}^{k-2} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l dx + \\ &\quad + \int_0^{u_{i-1}} x \sum_{l=k}^{m-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l dx + \int_{u_{i-1}}^1 x \sum_{l=k-1}^{m-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l dx = \\ &= u_{i-1}^2 \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l + (1-u_{i-1})u_{i-1} \sum_{l=0}^{k-2} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l + \\ &\quad + \frac{u_{i-1}^2}{2} \sum_{l=k}^{m-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l + \frac{1-u_{i-1}^2}{2} \sum_{l=k-1}^{m-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l = \\ &= \frac{1}{2} + \left(u_{i-1} - \frac{1}{2}\right) \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l + \frac{(1-u_{i-1})^2}{2} C_{m-1}^{k-1} u_{i-1}^{m-k} (1-u_{i-1})^{k-1}, \end{aligned}$$

где $i = 2, \dots, n$, J_l – вероятность того, что решение о выборе сделали точно l игроков (не считая рассматриваемого), $l = 0, 1, \dots, m-1$.

Тогда получим рекуррентную формулу для выигрышей игроков:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}, \\ u_i &= \frac{1}{2} + \left(u_{i-1} - \frac{1}{2}\right) \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l u_{i-1}^{m-1-l} (1-u_{i-1})^l + \frac{(1-u_{i-1})^2}{2} C_{m-1}^{k-1} u_{i-1}^{m-k} (1-u_{i-1})^{k-1}, \end{aligned}$$

где $i = 2, \dots, n$.

Обозначим α – порог голосования, который удовлетворяет соотношению $\alpha = \frac{k}{m}$, $0 < \alpha \leq 1$.

В табл. 2 приводятся численные результаты выигрышей u_n для различных m и k при $n = 100$, k^* и α^* – значения k и α , при которых выигрыш является наибольшим.

Таблица 2. Значения выигрышей u_n для различных m и k при $n = 100$

k	1	2	3	4	5	6	7	k^*	α^*		
$m = 1$ u_n	0.981							1	1		
$m = 3$ u_n	0.544	0.707	0.816							3	1
$m = 4$ u_n	0.519	0.598	0.762	0.740						3	0.75
$m = 5$ u_n	0.509	0.540	0.650	0.757	0.677					4	0.8
$m = 6$ u_n	0.504	0.526	0.586	0.694	0.722	0.626				5	0.83
$m = 7$ u_n	0.502	0.514	0.550	0.624	0.712	0.683	0.586	5	0.71		

Из таблицы видно, что для $m = 3$ наибольшее значение выигрыша на первом шаге получается при составе комиссии из трех человек.

Из формулы для вычисления выигрышей игроков и из данных таблицы следует, что при увеличении порога голосования k от 1 до $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$ выигрыши увеличиваются. Интересно отметить тот факт, что при небольшом составе комиссии для получения наибольшего выигрыша недостаточно принятия решения большинством голосов.

Теорема 3.1. Для фиксированного $n \geq 1$ $\lim_{m \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Докажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Докажем по индукции, что при $m \rightarrow \infty$ $u_i = \frac{1}{2} + \varepsilon_i$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Проверяем $u_1 = \frac{1}{2}$,

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} C_{m-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2} + \varepsilon_2, \text{ где } \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0.$$

Пусть $u_{n-1} = \frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_{n-1} = 0$ выполняется. Докажем, что равенство верно для n

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} + \left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right) \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l u_{n-1}^{m-1-l} (1-u_{n-1})^l + \frac{(1-u_{n-1})^2}{2} C_{m-1}^{k-1} u_{n-1}^{m-k} (1-u_{n-1})^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} C_{m-1}^l \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}\right)^{m-1-l} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)^l + \\ &\quad + \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)^2}{2} C_{m-1}^{k-1} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}\right)^{m-k} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Пользуясь интегральной и локальной теоремами Муавра-Лапласа и тем, что $k = \alpha t$, получим

$$u_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_{n-1} \left(\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \right) + \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)^2}{2} \frac{1}{\sqrt{(m-1) \left(\frac{1}{4} - \varepsilon_{n-1}^2\right)}} \varphi(x_2),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \\ x_1 &= \frac{0 - (m-1) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)}{\sqrt{(m-1) \left(\frac{1}{4} - \varepsilon_{n-1}^2\right)}} = - \frac{\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right) \sqrt{m-1}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon_{n-1}^2\right)}}, \\ x_2 &= \frac{\alpha m - 1 - (m-1) \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)}{\sqrt{(m-1) \left(\frac{1}{4} - \varepsilon_{n-1}^2\right)}} = \frac{\left(\alpha - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{n-1}\right)\right) \sqrt{m-1} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{m-1}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \varepsilon_{n-1}^2\right)}}. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$

$$u_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Следовательно, для фиксированного $n \geq 1$ доказано равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$. □

Численные результаты показывают, что для фиксированного m значение порога голосования α^* , при котором достигается наибольшее значение выигрыша, приближается к $\alpha^* = 1$ при увеличении n . Также для фиксированного n значение порога голосования α^* приближается к $1/2$ при увеличении m .

4. Заключение

В работе рассмотрена игра m лиц наилучшего выбора с полной информацией о значениях качеств претендентов. Исследована игра

трех лиц с различным порогом голосования для принятия совместного решения. Показано, что в задаче с тремя игроками выигрыш на первом шаге при единогласном принятии решения больше, чем при принятии решения большинством голосов для $n \geq 20$.

Рассмотрено обобщение задачи на случай m игроков. Найдены оптимальные пороговые стратегии и выигрыши игроков для различных значений порога голосования k . Показано, что при небольшом составе комиссии недостаточно принятие решения большинством голосов.

Автор выражает благодарность проф. Мазалову В.В. за ценные замечания при обсуждении полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнедин А.В. *Многокритериальная задача об оптимальной остановке процесса выбора* // Автоматика и телемеханика. 1980. Т. 7. С. 161–166.
2. Мазалов В.В., Фалько А.А. *Голосование в задаче наилучшего выбора с ранговым критерием* // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. Вып. 4. С. 577–588.
3. Мазалов В.В., Фалько А.А. *Арбитражная процедура в задаче совместного наилучшего выбора для m лиц* // Вестник СПбГУ. 2008. Сер.10, вып. 4. С. 52–59.
4. Baston V., Garnaeв A. *Competition for staff between two department* // Game Theory and Applications. 2005. V. 10. P. 13–26.
5. Ferguson T. *Selection by committee* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2005. V. 7. P. 203–209.
6. Mazalov V., Banin M. *N -person best-choice game with voting* // Game Theory and Applications. 2003. V. 9. P. 45–53.
7. Mazalov V., Nosalskaya T., Tokareva J. *Stochastic Cake Division Protocol* // International Game Theory Review. 2014. V. 16. N. 2. P. 1440009.

8. Mazalov V., Sakaguchi M., Zabelin A. *Multistage arbitration game with random offers* // Game Theory and Applications. 2002. V. 8. P. 95–106.
9. Sakaguchi M. *Optimal stopping games where players have weighted privilege* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2005. V. 7. P. 285–294.

VOTING IN THE FULL-INFORMATION BEST-CHOICE PROBLEM

Anna A. Ivashko, Institute of Applied Mathematical Research
Karelian Research Center of RAS, Cand.Sc. (aivasko@krc.karelia.ru).

Abstract: In the paper the non-cooperative m -person full-information best-choice game is considered. The joint decision is made by voting. The optimal threshold strategies and payoffs of players are given depending on the voting threshold. The results of numerical modelling are presented.

Keywords: best-choice game, threshold strategy, voting.