Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.2, с. 49–68

УДК 519.837
ББК 22.18

МОДЕЛЬ МНОГОШАГОВЫХ ИГР С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Ованес Л. Петросян*
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
e-mail: petrosian.ovanes@yandex.ru

Рассмотрена новая модель многошаговых игр с полной информацией, в которой у игроков есть возможность управлять временем для принятия решения. На каждом шаге игры игроки выбирают одну из конечного числа альтернатив и время, которое им потребуется для ее выполнения. Выигрыши игроков зависят от траектории, образованной выбором альтернатив и времени затраченного игроками для ее выполнения на каждом шаге. В качестве принципа оптимальности используется абсолютное ε-равновесие по Нэшу. Работа является продолжением работы [5].

Ключевые слова: полная информация, равновесие по Нэшу, время реализации альтернативы.

1. Введение

Рассмотрена следующая многошаговая игра с полной информацией. Как и в классической постановке, игра задана на древовидном графе. В каждой позиции этого графа число основных альтернатив конечно и фиксировано, для каждой основной альтернативы определен замкнутый интервал параметров. В случае когда все элементы

* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9-38-205-2014).

этого интервала положительны, их можно интерпретировать как время. Элементы временного интервала можно интерпретировать, как время, которые может потребоваться игроку для выполнения основной альтернативы. Каждой основной альтернативе в многошаговой игре с учетом времени реализации альтернативы соответствует бесконечное число альтернатив (промежутков времени, в течение которого можно выполнить эту альтернативу), основную альтернативу в связке со всевозможными значениями времени выполнения этой альтернативы будем называть пучком альтернатив. Похожая модель была рассмотрена в [5], но эта модель отличается более общей постановкой. В данной постановке игроки на каждом шаге выбирают одну из основных альтернатив и время, за которое они хотят выполнить эту альтернативу, а в [5] игроки выбирают момент времени, в который они хотят выполнить основную альтернативу.

Стратегия игрока в данной модели – это отображение, которое каждому элементу из множества очередности ставит в соответствие пару – основную альтернативу и время, в течение которого можно выполнить эту альтернативу. Если ситуация в игре выбрана игроками, то путь в игре определяется единственным образом. Этот путь состоит из последовательности основных альтернатив и соответствующих значений времен, выбранных игроками. Выигрыши заданы в окончательных позициях. В многошаговых играх с учетом времени реализации альтернативы абсолютное равновесие по Нэшу может не существовать. В статье приведен пример игры, в которой не существует абсолютного равновесия по Нэшу. Доказано существование абсолютного ε-равновесие по Нэшу для любого $\varepsilon > 0$.

2. Разница между моделью классической многошаговой игры с полной информацией и многошаговой игры с учетом времени реализации альтернативы

Модель многошаговой игры с учетом времени реализации альтернативы отличается от модели многошаговой игры с полной информацией. Напомним для полноты классическое определение конечной многошаговой игры с полной информацией без учета времени реализации альтернативы. Обозначим конечную многошаговую игру с полной информацией через Γ и граф через $G = (X, F)$, где X – это конечное множество позиций и F – это многозначное отображение из X в X. Позицию в игре Γ будем обозначать через z, тогда $\forall z \in X, F_z \subset X$.

Рассмотрим разбиение множества позиций X:

$$X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i, \quad X_k \cap X_l = \emptyset, \quad k \neq l,$$

где $F_z = \emptyset$ для $z \in X_{n+1}$. Множество X_i, $i = 1, \dots, n$ – это множество очередности игрока i и множество X_{n+1} – это множество окончательных позиций в игре.

Пару позиций (z', z''), где $z'' \in F_{z'}$ назовем дугой $p = (z', z'')$. Под путем в игре Γ будем понимать последовательность дуг $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$, где

$$p_1 = (z_1', z_1''), \quad p_2 = (z_2', z_2''), \quad \dots, \quad p_k = (z_k', z_k'')$$
$$z_1' = z_0, \quad z_1'' = z_2', \quad z_2'' = z_3', \quad \dots, \quad z_{k-1}'' = z_k',$$

где z_0 – начальная позиция в древовидном графе Γ. Обозначим отрезки пути в графе Γ, последний элемент которого является позицией z через $p_z = (p_1, \dots, p_{k'})$, где $p_{k'} = (z_k', z)$.

Множество всех позиций, кроме начальной позиции в игре, принадлежащих отрезку пути p_z обозначим через L_z.

На множестве окончательных позиций X_{n+1} определены выигрыши

$$H_1(z), \dots, H_n(z), \quad z \in X_{n+1}.$$

Стратегией игрока i называется отображение u_i, которое каждой позиции $z \in X_i$ однозначно ставит в соответствие позицию $y \in F_z$. Обозначим множество всевозможных стратегий игрока i через U_i. $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ – ситуация в игре Γ, где $u_i \in U_i$ – это стратегия игрока i. Определим функцию выигрыша K_i, для каждого игрока $i = 1, \dots, n$ в игре Γ следующим образом:

$$K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = H_i(z_l), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $z_l \in X_{n+1}$ – это окончательная позиция в пути, которая соответствует ситуации $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ в игре Γ. Функция K_i, $i = 1, \dots, n$ определена на множестве ситуаций $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$. Таким образом многошаговая игра с полной информацией в нормальной форме имеет следующий вид

$$\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}),$$

где N – это множество игроков.

Определим теперь многошаговую игру с учетом времени реализации альтернативы. Она отличается от игры Γ и определена на расширении графа G. Обозначим расширение графа G через $\overline{G}(Y, \Phi)$. Позиция в графе $\overline{G}$ имеет следующий вид:

$$\overline{z} = \{z, \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z\}, \quad z_1, z_2, \dots, z \in L_z, \quad z \in X$$
$$\tau_{z_1} \in [t_{z_1}, T_{z_1}], \quad \tau_{z_2} \in [t_{z_2}, T_{z_2}], \quad \dots, \quad \tau_z \in [t_z, T_z]$$

где X – это множество позиций на графе G и $[t_{z_1}, T_{z_1}], [t_{z_2}, T_{z_2}], \dots,$ $[t_z, T_z]$ – замкнутые временные интервалы, в течение которых основные альтернативы $z_1, z_2, \dots, z$ могут быть осуществлены. Множество всех позиций в графе $\overline{G}$ обозначим через Y. Таким образом, множество позиций в новом графе $\overline{G}$ бесконечно. Многозначное отображение Φ строится следующим образом:

$$\Phi_{\overline{z}} = \bigcup_{\substack{z' \in F_z \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \{z', \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z, \tau_{z'}\} = \bigcup_{\substack{z' \in F_z \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \overline{z}.$$

Набор позиций $(\overline{z}', \overline{z}'')$, где $\overline{z}' = \left\{z', \tau_{z'_1}, \tau_{z'_2}, \dots, \tau_{z'}\right\}$, $\overline{z}'' = \left\{z'', \tau_{z''_1},\right.$ $\left.\tau_{z''_2}, \dots, \tau_{z''}\right\}$, $\overline{z}'' \in \Phi_{\overline{z}'}$ для каждой возможной пары значений $\tau_{z'}, \tau_{z''}$ назовем дугой $p' = (\overline{z}', \overline{z}'')$. Под путем в игре $\overline{\Gamma}$ будем понимать последовательность дуг $\overline{p}' = (\overline{p}'_1, \overline{p}'_2, \dots, \overline{p}'_k)$, где

$$\overline{p}'_1 = (\overline{z}'_1, \overline{z}''_1), \quad \overline{p}'_2 = (\overline{z}'_2, \quad \overline{z}''_2), \quad \dots, \quad \overline{p}'_k = (\overline{z}'_k, \overline{z}''_k)$$
$$\overline{z}'_1 = \overline{z}_0, \quad \overline{z}''_1 = \overline{z}'_2, \quad \overline{z}''_2 = \overline{z}'_3, \quad \dots, \quad \overline{z}''_{k-1} = \overline{z}'_k$$

для любых возможных значений $\tau_{z'_i}, \tau_{z''_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. В многошаговой игре с учетом времени реализации альтернативы длина $l(\overline{p})$ пути $\overline{p}' = (\overline{p}'_1, \overline{p}'_2, \dots, \overline{p}'_k)$ – это количество дуг в пути или количество различных позиций z минус одна в графе Γ, $l(\overline{p}') = k$.

Рассмотрим разбиение множества позиций Y:

$$Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} Y_i, \quad Y_k \cap Y_l = \emptyset, \quad k \neq l,$$

где $\Phi_{\overline{z}} = \emptyset$ для $\overline{z} \in Y_{n+1}$.

Y_i – множество очередности i-го игрока, имеющее следующий вид:

$$\overline{z} = \left\{z, \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z\right\}, \quad z \in X_i.$$

Y_{n+1} – множество окончательных позиций, имеющее следующий вид:

$$\overline{z} = \left\{z, \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z\right\}, \quad z \in X_{n+1}.$$

Выигрыши $\overline{H}_1(\overline{z}), \dots, \overline{H}_n(\overline{z})$, $\overline{z} \in Y_{n+1}$ определены на множестве окончательных позиций Y_{n+1}. Функции $\overline{H}_i(\overline{z}) = \overline{H}_i\left(z, \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z\right)$, $i = 1, \dots, n$ непрерывно зависят от параметров $\tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \dots, \tau_z$ и равномерно ограничены на компактном множестве $\prod\limits_{z' \in L_z} [t_{z'}, T_{z'}]$. Стратегией игрока i является отображение $\overline{u}_i$, которое каждой позиции $\overline{z} \in Y_i$ ставит в соответствие позицию $\overline{z}' \in \Phi_{\overline{z}}$. Обозначим множество всевозможных стратегий игрока i через $\overline{U}_i$. $\overline{u} = (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_i, \dots, \overline{u}_n)$ – ситуация в игре $\overline{\Gamma}$. Определим функцию выигрыша $\overline{K}_i$ для каждого игрока $i = 1, \dots, n$ в игре $\overline{\Gamma}$ по правилу:

$$\overline{K}_i(\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_i, \dots, \overline{u}_n) = \overline{H}_i(\overline{z}_l), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\overline{z}_l \in Y_{n+1}$ – окончательная позиция, которая соответствует ситуации $(\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_i, \dots \overline{u}_n)$ в игре $\overline{\Gamma}$. Функция $\overline{K}_i$, $i = 1, \dots, n$ определена на множестве ситуаций $\overline{U} = \prod\limits_{i=1}^{n} \overline{U}_i$. Длиной игры $\overline{\Gamma}$ будем называть длину самого длинного пути в игре $\overline{\Gamma}$. В силу построения длины игр Γ и $\overline{\Gamma}$ совпадают.

Таким образом многошаговая игра с учетом времени реализации альтернативы может быть определена, как игра в нормальной форме:

$$\overline{\Gamma} = (N, \{\overline{U}_i\}_{i \in N}, \{\overline{K}_i\}_{i \in N}).$$

Предположим, что все пути в игре $\overline{\Gamma}$ имеют одинаковую длину пути l, тогда игра происходит следующим образом:

1. Пусть $\overline{z}_0 = (z_0) \in Y_{i_1}$ тогда игрок i_1 выбирает

$$\overline{z}_1 = (z_1, \tau_1) \in \Phi_{\overline{z}_0} = \bigcup_{\substack{z' \in F_{z_0} \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \{z', \tau_{z'}\}$$

2. Если $\overline{z}_1 = (z_1, \tau_1) \in Y_{i_2}$ тогда игрок i_2 выбирает

$$\overline{z}_2 = (z_2, \tau_1, \tau_2) \in \Phi_{\overline{z}_1} = \bigcup_{\substack{z' \in F_{z_1} \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \{z', \tau_{z_1}, \tau_{z'}\}$$

...

k. Если $\overline{z}_{k-1} = (z_{k-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) \in Y_{i_k}$ тогда игрок i_k выбирает

$$\overline{z}_k = (z_k, \tau_1, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k) \in \Phi_{\overline{z}_{k-1}} = \bigcup_{\substack{z' \in F_{z_{k-1}} \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \left\{z', \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \ldots, \tau_{z_{k-1}}, \tau_{z'}\right\}$$

...

l. Если $\overline{z}_{l-1} = (z_{l-1}, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}) \in Y_{i_l}$ тогда игрок i_l выбирает

$$\overline{z}_l = (z_l, \tau_1, \ldots, \tau_{l-1}, \tau_l) \in \Phi_{\overline{z}_{l-1}} = \bigcup_{\substack{z' \in F_{z_{l-1}} \\ \tau_{z'} \in [t_{z'}, T_{z'}]}} \left\{z', \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \ldots, \tau_{z_{l-1}}, \tau_{z'}\right\}$$

и игра заканчивается.

3. Существование абсолютного ε-равновесия по Нэшу.

Перейдем к вопросу существования и нахождения абсолютного равновесия по Нэшу. Предположим, что в игре $\overline{\Gamma}$ существует ситуация абсолютного равновесия по Нэшу $\overline{u}^*$, тогда по определению усечение этой ситуации в любой подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}}$ является ситуацией абсолютного равновесия в этой подыгре. Обозначим через $V_i(\overline{z})$ выигрыш i-го игрока игрока в усеченной ситуации $\overline{u}^*$ на подыгру $\overline{\Gamma}_{\overline{z}}$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть E – однозначное отображение, которое каждой тройке $\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k}$ ставит в соответствие некий элемент из множества $\Phi_{\overline{z}_k}$ $(E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k}) \in \Phi_{\overline{z}_k})$ и $\bigcup_{\substack{z_k \in F_{z_{k-1}} \\ \tau_{z_k} \in [t_{z_k}, T_{z_k}]}} E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k}) = \Phi_{\overline{z}_k}$. Имеет место следующая теорема:

Теорема 3.1. *Функция $V_i(\overline{z})$, $i \in N$ удовлетворяет следующей системе функциональных рекуррентных уравнений (3.1) (типа урав-*

нений Беллмана [1]):

$$V_i(\overline{z}_{k-1}) = \max_{z_k \in F_{z_{k-1}}} \left\{ \max_{\tau_{z_k} \in [t_{z_k}, T_{z_k}]} V_i\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k})\right) \right\} = \\ = V_i(E(\overline{z}_{k-1}, z_k^*, \tau^*_{z_k^*})), \quad \forall i \in N$$

$$V_j(\overline{z}_{k-1}) = V_j\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k^*, \tau^*_{z_k^*})\right), \quad \forall j \neq i, \quad j \in N$$

$$V_i\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k})\right) = H_i(z_k, \tau_{z_1}, \ldots, \tau_{z_{k-1}}, \tau_{z_k}) = H_i(\overline{z}_k), \;\; \overline{z}_k \in Y_{n+1} \quad (3.1)$$

Вывод этих уравнений вполне аналогичен выводу соответствующих уравнений для многошаговых игр с полной информацией.

Ситуация абсолютного равновесия может не существовать, это показано на примере. Однако, можно доказать существование ε-абсолютного равновесия по Нэшу в описанной игре для любого $\varepsilon > 0$:

Теорема 3.2. *В игре $\overline{\Gamma}$ существует ситуация абсолютного ε-равновесия по Нэшу $\overline{u}^*_\varepsilon$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по длине игры $\overline{\Gamma}$. Пусть длина игры равна единице, тогда может ходить лишь один из игроков, пусть это будет игрок i_1. Построим ситуацию равновесия в этой игре:

Определение ситуации абсолютного ε-равновесия необходимо выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{u}^*_\varepsilon : \overline{K}_i(\overline{u}^*_\varepsilon) \geqslant \overline{K}_i(\overline{u}^*_\varepsilon | \overline{u}_i) - \varepsilon, \quad \forall \overline{u}_i \in \overline{U}_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Так как длина игры равна единице, очевидно, что игрок i_1 должен максимизировать свой выигрыш в игре:

$$\overline{K}^*_{i_1} = \max_{z_1 \in F_{z_0}} \left\{ \sup_{\tau_{z_1} \in [t_{z_1}, T_{z_1}]} H_{i_1}(z_1, \tau_{z_1}) \right\}. \tag{3.3}$$

Так как по построению функция $H_i(\overline{z})$, где $\overline{z} = \{z, \tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \ldots, \tau_z\}$, равномерно ограничена и непрерывна по всем $\tau_{z_1}, \tau_{z_2}, \ldots, \tau_z$, то можно утверждать, что $\forall z_1 \in F_{z_0}, \sup\limits_{\tau_{z_1} \in [t_{z_1}, T_{z_1}]} H_i(z_1, \tau_{z_1})$ существует и достигается при некоторой стратегии $\overline{u}^*$. Следовательно в этом случае существует абсолютное равновесие по Нэшу, которое очевидным образом является ε-равновесием для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь длина игры $\overline{\Gamma}$ равняется k и $\overline{z}_0 \in X_{i_1}$ (т.е. в начальной позиции $\overline{z}_0 = z_0$ ходит игрок i_1). Рассмотрим семейство подыгр $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}, \quad \overline{z}_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}$, длина каждой из которых не превосходит $k-1$. Предположим, что теорема справедлива для всех игр, длина которых не превосходит $k-1$, и докажем ее для игры k. Поскольку подыгры $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}, \quad \overline{z}_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}$, имеют длину не более $k-1$, по предположению индукции для них теорема справедлива и тем самым $\forall \varepsilon > 0$ существует ситуация абсолютного ε-равновесия по Нэшу. Обозначим для каждой подыгры $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}, \quad \overline{z}_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}$ эту ситуацию через

$$(\overline{u}^*_\varepsilon)^{\overline{z}_1} = \left[(\overline{u}_1^{*\varepsilon})^{\overline{z}_1}, \ldots, \overline{u}_n^{*\varepsilon})^{\overline{z}_1}\right],$$

а выигрыш в этой ситуации через $\overline{K}((\overline{u}^*_\varepsilon)^{\overline{z}_1})$.

Докажем, что следующий набор стратегий образует ситуацию абсолютного ε-равновесия по Нэшу в игре длины k.

1. $\forall i \neq i_1$, $\overline{u}_i^{*\varepsilon} = (\overline{u}_i^{*\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1}, \quad \overline{z}_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}$,

   где $(\overline{u}_i^{*\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1}$ существует по предположению.

2. Если $i = i_1$, то $\forall \overline{z}'_1 \in Y_{i_1} \backslash \overline{z}_0 \quad \overline{z}'_1 \neq \overline{z}_0$, $\overline{u}_i^{*\varepsilon}(\overline{z}'_1) = \overline{u}_{i_1}^{*\varepsilon}(\overline{z}'_1) = (\overline{u}_{i_1}^{*\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1}(\overline{z}'_1)$,

   где $(\overline{u}_{i_1}^{*\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1}$ существует по предположению.

3. Если $i = i_1$, то $\overline{u}_i^{*\varepsilon}(\overline{z}_0) = \overline{u}_{i_1}^{*\varepsilon}(\overline{z}_0) = \overline{z}_1^\varepsilon$, где $\overline{z}_1^\varepsilon$ определяется из неравенства:

$$\overline{K}_{i_1}((\overline{u}^*_{\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1^\varepsilon}) \geqslant \sup_{\overline{z}'_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}} \overline{K}_{i_1}((\overline{u}^*_{\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}'_1}) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Обозначим функцию выигрыша в ситуации $\overline{u}^*_\varepsilon$ через $\overline{K}_i(\overline{u}^*_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$.

По построению сужение $(\overline{u}_i^{*\frac{\varepsilon}{2}})^{\overline{z}_1}$ стратегии $\overline{u}_i^{*\frac{\varepsilon}{2}}$ является стратегией, входящей в абсолютное $\frac{\varepsilon}{2}$-равновесие по Нэшу игры $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}$, $\overline{z}_1 \in \Phi_{\overline{z}_0}$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что стратегии $\overline{u}_i^{*\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, n$ образуют ситуацию абсолютного ε-равновесия по Нэшу в игре Γ. Пусть $i \neq i_1$, по построению стратегии $\overline{u}_i^{*\varepsilon}$, после выбора игроком i_1 позиции $\overline{z}_1^{\varepsilon}$ на первом шаге игра $\overline{\Gamma}$ переходит в подыгру $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1^{\varepsilon}}$, поэтому

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\overline{u}_{\varepsilon}^{*} : \overline{K}_i(\overline{u}_{\varepsilon}^{*}) = \overline{K}_i((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*})^{\overline{z}_1^{\varepsilon}}) \geqslant \overline{K}_i((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*}|\overline{u}_i)^{\overline{z}_1^{\varepsilon}}) - \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \overline{K}_i(\overline{u}_{\varepsilon}^{*}|\overline{u}_i) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\overline{u}_i \in \overline{U}_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \quad i \neq i_1, \qquad (3.5)$$

при переходе из подыгры $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1^{\varepsilon}}$ в игру $\overline{\Gamma}$ выигрыш игроков $i \neq i_1$ не меняется, так как они не совершают никаких действий, поэтому последнее соотношение в неравенстве (3.5) верно, поскольку $(\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*})^{\overline{z}_1^{\varepsilon}}$ – ситуация абсолютного $\frac{\varepsilon}{2}$-равновесия в подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1^{\varepsilon}}$.

Пусть $\overline{u}_{i_1} \in \overline{U}_{i_1}$ – произвольная стратегия игрока i_1 в игре $\overline{\Gamma}$. Обозначим $\overline{u}_{i_1}(\overline{z}_0) = \overline{z}_1'$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\overline{u}_{\varepsilon}^{*} : \overline{K}_{i_1}(\overline{u}_{\varepsilon}^{*}) = \overline{K}_{i_1}((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*})^{\overline{z}_1^{\varepsilon}}) \geqslant \sup_{\overline{z}_1' \in \Phi_{\overline{z}_0}} \overline{K}_{i_1}((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*})^{\overline{z}_1'}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \overline{K}_{i_1}((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*})^{\overline{z}_1'}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \left(\overline{K}_{i_1}((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*}|\overline{u}_{i_1})^{\overline{z}_1'}) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \overline{K}_{i_1}((\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*}|\overline{u}_{i_1})^{\overline{z}_1'}) - \varepsilon = \overline{K}_{i_1}(\overline{u}_{\frac{\varepsilon}{2}}^{*}|\overline{u}_{i_1}) - \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

Из следующего примера следует, что в игре $\overline{\Gamma}$ ситуация абсолютного равновесия по Нэшу может не существовать, поэтому в общем случае система уравнений [1] для игры $\overline{\Gamma}$ записывается в виде

$$V_i(\overline{z}_{k-1}) = \max_{z_k \in F_{z_{k-1}}} \left\{ \sup_{\tau_{z_k} \in [t_{z_k}, T_{z_k}]} V_i\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k})\right) \right\} =$$
$$= V_i(E(\overline{z}_{k-1}, z_k^*, \tau_{z_k^*}^*)), \quad \forall i \in N$$
$$V_j(\overline{z}_{k-1}) = V_j\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k^*, \tau_{z_k^*}^*)\right), \quad \forall j \neq i, \quad j \in N$$
$$V_i\left(E(\overline{z}_{k-1}, z_k, \tau_{z_k})\right) = H_i(z_k, \tau_{z_1}, \ldots, \tau_{z_{k-1}}, \tau_{z_k}) = H_i(\overline{z}_k), \;\; \overline{z}_k \in Y_{n+1}, \qquad (3.6)$$

где под $V_i(\overline{z}_{k-1})$ понимается любой частичный предел последовательности функций выигрыша в ситуации абсолютного ε-равновесия по Нэшу при $\varepsilon \to 0$.

4. Пример

Рассмотрим игру $\overline{\Gamma}$, порожденную игрой Γ, она происходит на графе $\overline{G} = (Y, \Phi)$ (рис. 9). На первом шаге игры $\overline{\Gamma}$, в позиции $\overline{z}_0$ игрок

$Alpha$ выбирает из двух пучков альтернатив $\overline{z}_1, \overline{z}_2$, т.е. выбирает основную альтернативу z_1 и соответствующий параметр $\tau_{z_1} \in [t_{z_1}, T_{z_1}]$ или соответственно z_2 и $\tau_{z_2} \in [t_{z_2}, T_{z_2}]$ («Принять» или «Отклонить» финансовое предложение от игрока $Beta$ и соответствующий параметр). Для упрощения описания примера, будем считать, что интервалы для параметра $[t_{z_1}, T_{z_1}], [t_{z_2}, T_{z_2}]$ для основных альтернатив z_1, z_2 одинаковые, т.е. $[t_{z_1}, T_{z_1}] = [t_{z_2}, T_{z_2}] = [-5, 7]$. Если игрок $Alpha$ выбирает альтернативу $\overline{z}_1$, тогда игра продолжается, и игрок $Beta$ делает ход. На втором шаге игры Γ в позиции $\overline{z}_1$ игрок $Beta$ выбирает из двух пучков альтернатив $\overline{z}_3, \overline{z}_4$, т.е. выбирает основную альтернативу z_3 и соответствующий ей параметр $\tau_{z_3} \in [t_{z_3}, T_{z_3}]$ или соответственно z_4 и $\tau_{z_4} \in [t_{z_4}, T_{z_4}]$ («Предложить» $Alpha$ более хорошее предложение или «Соревноваться» с игроком $Alpha$). Для упрощения описания примера, будем считать, что интервалы для параметра $[t_{z_3}, T_{z_3}], [t_{z_4}, T_{z_4}]$ для основных альтернатив z_3, z_4 одинаковые, т.е. $[t_{z_3}, T_{z_3}] = [t_{z_4}, T_{z_4}] = [-20, 10]$.

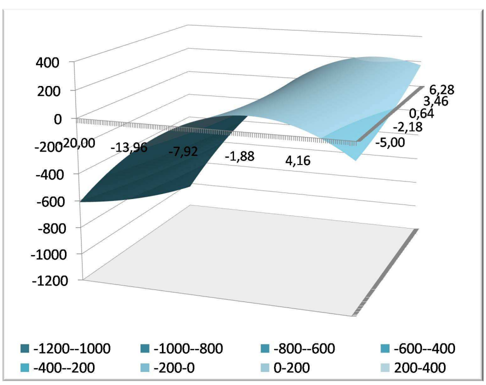

Рисунок 1. $H_{Alpha}(z_3, \tau_{z_1}, \tau_{z_3})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_1} и τ_{z_3}.

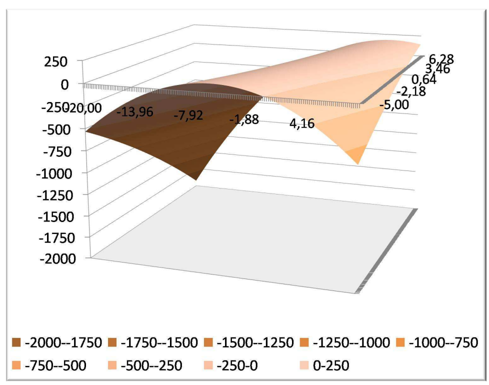

Рисунок 2. $H_{Beta}(z_3, \tau_{z_1}, \tau_{z_3})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_1} и τ_{z_3}.

Функции выигрыша игроков $Alpha$ и $Beta$ для каждой основной альтернативы имеют вид:

$$H_{Alpha}(z_3, \tau_{z_1}, \tau_{z_3}) = \tau_{z_1}^2 - 2\tau_{z_3}^2 + 2\tau_{z_1}\tau_{z_3} + 3\tau_{z_1} + 6\tau_{z_3} + 100,$$
$$H_{Beta}(z_3, \tau_{z_1}, \tau_{z_3}) = 2\tau_{z_3}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_3} + 7\tau_{z_1} - 5\tau_{z_3} + 190,$$
$$H_{Alpha}(z_4, \tau_{z_1}, \tau_{z_4}) = -3\tau_{z_1}^2 - 2\tau_{z_4}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 2\tau_{z_1} + 5\tau_{z_4} + 150,$$

$$H_{Beta}(z_4, \tau_{z_1}, \tau_{z_4}) = -2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96.$$

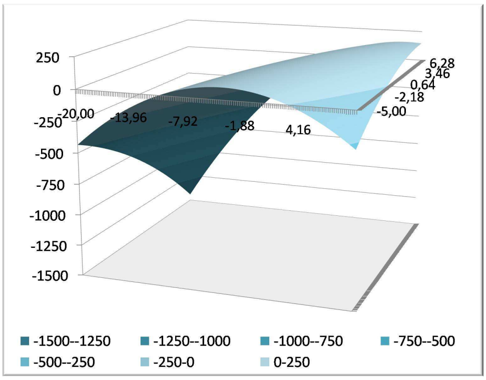

Рисунок 3. $H_{Alpha}(z_4, \tau_{z_1}, \tau_{z_4})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_1} и τ_{z_4}.

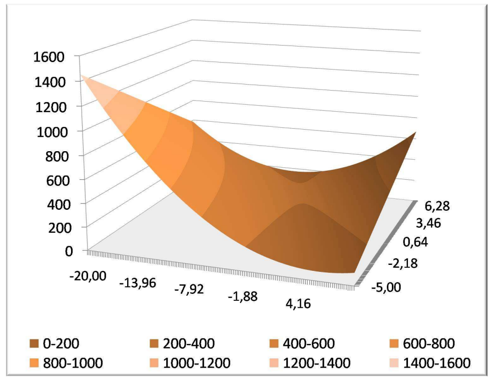

Рисунок 4. $H_{Beta}(z_4, \tau_{z_1}, \tau_{z_4})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_1} и τ_{z_4}.

Если игрок *Alpha* в позиции $\overline{z}_0$ выбирает альтернативу $\overline{z}_2$, тогда игра продолжается и игрок *Beta* делает ход. На втором шаге игры Γ в позиции $\overline{z}_2$ игрок *Beta* выбирает из двух пучков альтернатив $\overline{z}_5, \overline{z}_6$, т.е. выбирает основную альтернативу z_5 и соответствующий параметр $\tau_{z_5} \in [t_{z_5}, T_{z_5}]$ или соответственно z_6 и $\tau_{z_6} \in [t_{z_6}, T_{z_6}]$. Во всех описанных случаях $(\overline{z}_3, \overline{z}_4, \overline{z}_5, \overline{z}_6)$ игра заканчивается и игроки *Alpha* и *Beta* получают выигрыши в зависимости от позиции $z_i, i = 3, \ldots, 6$, в которой игра прекращается и от времени, которое выбирали игроки на предыдущих шагах $\tau_i, i = 1, \ldots, 6$. Для упрощения описания примера, будем считать, что интервалы для параметра $[t_{z_5}, T_{z_5}], [t_{z_6}, T_{z_6}]$ соответствующие основным альтернативам z_5, z_6 одинаковые, т.е. $[t_{z_5}, T_{z_5}] = [t_{z_6}, T_{z_6}] = [-20, 10]$. Функции выигрыша игроков *Alpha* и *Beta* для каждой основной альтернативы имеют вид:

$$H_{Alpha}(z_5, \tau_{z_2}, \tau_{z_5}) = -2\tau_{z_2}^2 + 3\tau_{z_5}^2 + \tau_{z_2}\tau_{z_5} + 2\tau_{z_2} + 2\tau_{z_5} + 90,$$
$$H_{Beta}(z_5, \tau_{z_2}, \tau_{z_5}) = 3\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_5}^2 + 4\tau_{z_2}\tau_{z_5} - 9\tau_{z_2} + 8\tau_{z_5} + 157,$$
$$H_{Alpha}(z_6, \tau_{z_2}, \tau_{z_6}) = -\tau_{z_2}^2 - 3\tau_{z_6}^2 + 5\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 10\tau_{z_2} + 6\tau_{z_6} + 80,$$
$$H_{Beta}(z_6, \tau_{z_2}, \tau_{z_6}) = -\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_2} + 8\tau_{z_6} + 112.$$

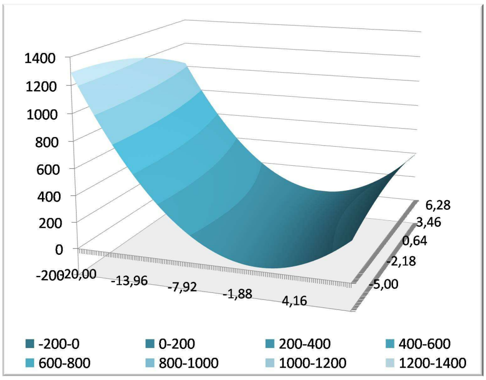

Рисунок 5. $H_{Alpha}(z_5, \tau_{z_2}, \tau_{z_5})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_2} и τ_{z_5}.

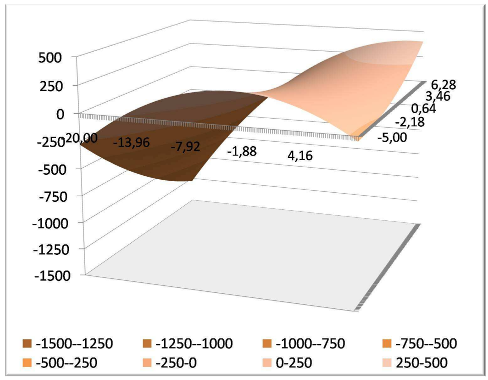

Рисунок 6. $H_{Beta}(z_5, \tau_{z_2}, \tau_{z_5})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_2} и τ_{z_5}.

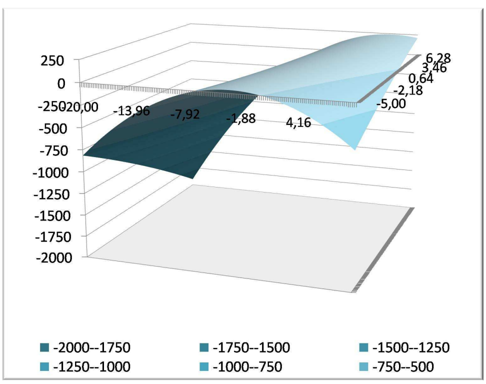

Рисунок 7. $H_{Alpha}(z_6, \tau_{z_2}, \tau_{z_6})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_2} и τ_{z_6}.

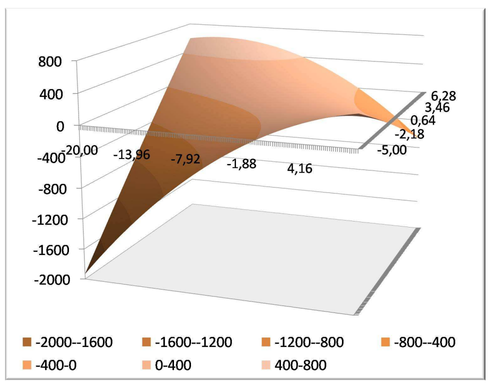

Рисунок 8. $H_{Beta}(z_6, \tau_{z_2}, \tau_{z_6})$. Оси x и y соответствуют τ_{z_2} и τ_{z_6}.

Игра $\overline{\Gamma}$ имеет вид, изображенный на рис. 9.

Будем использовать стандартную процедуру обратной индукции, чтобы найти абсолютное равновесие по Нэшу в этой игре. Обратную индукцию будем строить по длине пути $l(\overline{p}) = 2$. Нам необходимо будет решить подыгры $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_i}$ для любого фиксированного набора $\tau_{z'} \in L_{z_i}$. Рассмотрим подыгру $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}$, где в позиции $\overline{z}_1 = (z_1, \tau_{z_1})$

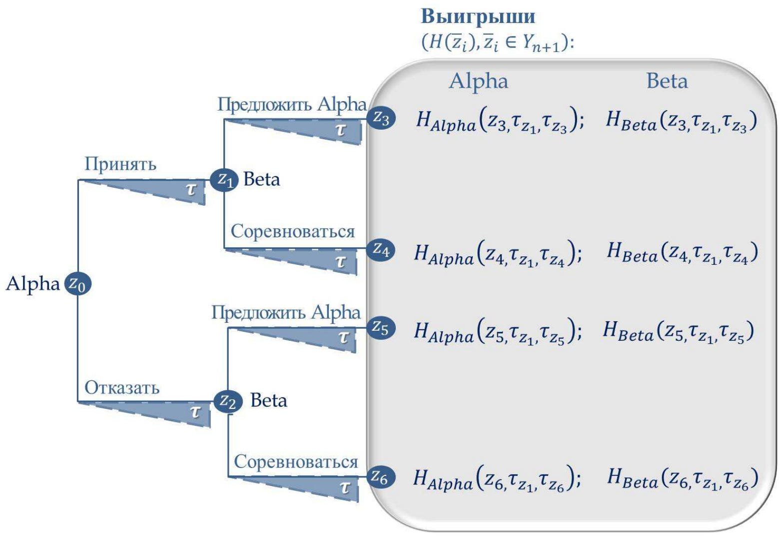

Рисунок 9.

игрок $Beta$ делает ход. Позиция z_1 – это начальная позиция в этой подыгре, а τ_{z_1} – это время, которое потребовалось игроку $Alpha$ на предыдущем шаге игры $\overline{\Gamma}$ для реализации основной альтернативы z_1. В этой подыгре игрок $Beta$ выбирает между двумя пучками альтернатив $\overline{z}_3 = (z_3, \tau_{z_1}, \tau_{z_3})$ и $\overline{z}_4 = (z_4, \tau_{z_1}, \tau_{z_4})$ $(\Phi_{\overline{z}_1} = \{\overline{z}_3, \overline{z}_4\})$. Так как $\overline{z}_3, \overline{z}_4 \in Y_{n+1}$, следовательно, выигрыш игрока $Beta$ определен следующим образом:

$$V_{Beta}(\overline{z}_1) = \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_3}\in[t_{z_3}, T_{z_3}]} (2\tau_{z_3}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_3} + 7\tau_{z_1} - 5\tau_{z_3} + 190);$$
$$\max_{\tau_{z_4}\in[t_{z_4}, T_{z_4}]} (-2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96)\Big\}.$$

Нетрудно заметить, что выбор основной альтернативы (z_3, z_4) игрока $Beta$ на втором шаге в позиции z_1 зависит от времени затраченного игроком $Alpha$ на первом шаге для реализации основной альтернативы, τ_{z_1}. В рассматриваемой подыгре игрок $Beta$ должен выбрать основную альтернативу z_4 для любого $\tau_{z_1} \in [t_{z_1}, T_{z_1}]$:

1. $\tau_{z_1} \in [-5; 6, 2)$, значение игры в этом случае для игрока $Alpha$ и $Beta$:

$$V_{Beta}(\overline{z}_1) = \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_3}\in[t_{z_3},T_{z_3}]} (2\tau_{z_3}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_3} + 7\tau_{z_1} - 5\tau_{z_3} + 190);$$
$$\sup_{\tau_{z_4}\in[t_{z_4},T_{z_4}]} (-2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96)\Big\} =$$
$$= \sup_{\tau_{z_4}\in[t_{z_4},T_{z_4}]} (-2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96) =$$
$$= -2\tau_{z_1}^2 - 3(-20)^2 + 6\tau_{z_1}(-20) + 8\tau_{z_1} - 3(-20) + 96$$
$$V_{Alpha}(\overline{z}_1) = V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_1, z_4, -20)\Big) =$$
$$= -3\tau_{z_1}^2 - 2(-20)^2 + 4\tau_{z_1}(-20) + 2\tau_{z_1} + 5(-20) + 150$$
(Так как в позиции $\overline{z}_1$ игрок *Alpha* не делает ход)

2. $\tau_{z_1} \in [6,2;7]$, значение игры в этом случае для игрока *Alpha* и *Beta*:

$$V_{Beta}(\overline{z}_1) = \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_3}\in[t_{z_3},T_{z_3}]} (2\tau_{z_3}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_3} + 7\tau_{z_1} - 5\tau_{z_3} + 190);$$
$$\sup_{\tau_{z_4}\in[t_{z_4},T_{z_4}]} (-2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96)\Big\} =$$
$$= \sup_{\tau_{z_4}\in[t_{z_4},T_{z_4}]} (-2\tau_{z_1}^2 - 3\tau_{z_4}^2 + 6\tau_{z_1}\tau_{z_4} + 8\tau_{z_1} - 3\tau_{z_4} + 96) =$$
$$= -2\tau_{z_1}^2 - 3(10)^2 + 6\tau_{z_1}(10) + 8\tau_{z_1} - 3(10) + 96$$
$$V_{Alpha}(\overline{z}_1) = V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_1, z_4, 10)\Big)$$
$$= -3\tau_{z_1}^2 - 2(10)^2 + 4\tau_{z_1}(10) + 2\tau_{z_1} + 5(10) + 150$$

Постараемся объяснить тот факт, что абсолютное равновесие в игре $\overline{\Gamma}$ может не существовать. Очевидно, что для любых начальных состояний в подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}$ у игрока *Beta* всегда существует максимизирующая стратегия, т.е. равновесная по Нэшу стратегия в этой подыгре. Она заключается в максимизации выигрыша $(V_{Beta}(E(\overline{z}_1, z, \tau_z)))$ на компактном множестве. Однако, функция $V_{Alpha}(E(\overline{z}_1, z, \tau_z))$ при фиксированной основной альтернативе z может оказаться разрывной функцией от параметра, потому что игроку *Beta* для одного интервала для τ_{z_1} ($\tau_{z_1} \in [-5; 6,2)$) выгодно выбрать одну альтернативу, а для другого интервала ($\tau_{z_1} \in [6,2; 7]$) другую.

Разрыв функции $V_{Alpha}\left(E(\overline{z}_1, z, \tau_z)\right)$ происходит в точке $\tau_{z_1} = 6,2$ (Рис. 10).

Таким образом, $\forall \tau_{z_1} \in [-5; 7]$ оптимальные стратегии игрока *Beta* и выигрыши игроков *Alpha* и *Beta* определены. На следующем графике изображены функции выигрышей игроков *Alpha* и *Beta* в случае когда игрок *Beta* использует ε-равновесные стратегии в подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_1}$ в зависимости от параметра τ_{z_1}:

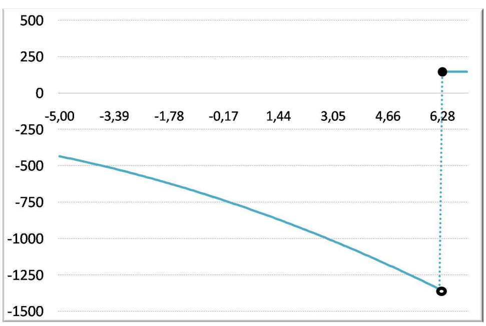

Рис. 10: $V_{Alpha}(\overline{z}_1)$. Ось x соответствуют τ_{z_1}. Черные точки на графике определяют интервалы описанные выше.

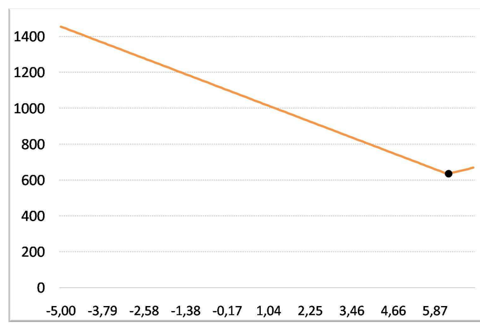

Рис. 11: $V_{Beta}(\overline{z}_1)$. Ось x соответствуют τ_{z_1}. Черные точки на графике определяют интервалы описанные выше.

Рассмотрим подыгру $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_2}$, где в позиции $\overline{z}_2 = (z_2, \tau_{z_2})$ игрок *Beta* делает ход. Позиция z_2 – это начальная позиция в этой подыгре, а τ_{z_2} – это время, которое потребовалось игроку *Alpha* на предыдущем шаге игры $\overline{\Gamma}$ для реализации основной альтернативы z_2. В этой подыгре игрок *Beta* выбирает между двумя пучками альтернатив $\overline{z}_5 = (z_5, \tau_{z_2}, \tau_{z_5})$ и $\overline{z}_6 = (z_6, \tau_{z_1}, \tau_{z_6})$ ($\Phi_{\overline{z}_2} = \{\overline{z}_5, \overline{z}_6\}$). Так как $\overline{z}_5, \overline{z}_6 \in Y_{n+1}$, следовательно, выигрыш игрока *Beta* определен следующим образом:

$$V_{Beta}(\overline{z}_2) = \max\Bigg\{ \sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5}, T_{z_5}]} (3\tau_{z_1}^2 - 2\tau_{z_5}^2 + 4\tau_{z_1}\tau_{z_5} - 9\tau_{z_1} + 8\tau_{z_5} + 157); \\ \sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6}, T_{z_6}]} (-\tau_{z_1}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_1}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_1} + 8\tau_{z_6} + 112)\Bigg\}.$$

Нетрудно заметить, что выбор основной альтернативы (z_5, z_6) игрока *Beta* на втором шаге в позиции z_2 зависит от параметра τ_{z_2}. Рассмотрим несколько случаев, когда $\tau_{z_2} \in [-5;-3,2)$, $\tau_{z_2} \in [-3,2;-2,2)$, $\tau_{z_2} \in [-2,2;3,2)$, $\tau_{z_2} \in [3,2;7]$:

1. $\tau_{z_2} \in [-5;-3,2)$, значение игры в этом случае для игрока *Alpha* и *Beta*:

$$V_{Beta}(\overline{z}_2) =$$

$$= \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5},T_{z_5}]} (3\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_5}^2 + 4\tau_{z_2}\tau_{z_5} - 9\tau_{z_2} + 8\tau_{z_5} + 157);$$

$$\sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]} (-\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_2} + 8\tau_{z_6} + 112)\Big\} =$$

$$= \sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]} (-\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_1} + 8\tau_{z_6} + 112)\} =$$

$$= -\tau_{z_2}^2 - 2(10)^2 - 10\tau_{z_2}(10) + 12\tau_{z_2} + 8(10) + 112$$

$$V_{Alpha}(\overline{z}_2) = V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_2, z_6, 10)\Big) =$$

$$= -\tau_{z_2}^2 - 3(10)^2 + 5\tau_{z_2}(10) + 10\tau_{z_2} + 6(10) + 80$$

2. $\tau_{z_2} \in [-3,2;-2,2)$, значение игры в этом случае для игрока *Alpha* и *Beta*:

$$V_{Beta}(\overline{z}_2) =$$

$$= \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5},T_{z_5}]} (3\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_5}^2 + 4\tau_{z_2}\tau_{z_5} - 9\tau_{z_2} + 8\tau_{z_5} + 157);$$

$$\sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]} (-\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_2} + 8\tau_{z_6} + 112)\Big\} =$$

$$= \sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]} (-\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^2 - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6} + 12\tau_{z_2} + 8\tau_{z_6} + 112) =$$

$$= -\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_6}^{*\,2} - 10\tau_{z_2}\tau_{z_6^*} + 12\tau_{z_2} + 8\tau_{z_6}^* + 112$$

$$V_{Alpha}(\overline{z}_2) = V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_2, z_6, \tau_6^*)\Big) =$$

$$= -\tau_{z_2}^2 - 3\tau_{z_6}^{*\,2} + 5\tau_{z_2}\tau_{z_6}^* + 10\tau_{z_2} + 6\tau_{z_6}^* + 80$$

3. $\tau_{z_2} \in [-2,2;3,2)$, значение игры в этом случае для игрока *Alpha* и *Beta*:

$$V_{Beta}(\overline{z}_2) =$$

$$= \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5},T_{z_5}]} (3\tau_{z_2}^2 - 2\tau_{z_5}^2 + 4\tau_{z_2}\tau_{z_5} - 9\tau_{z_2} + 8\tau_{z_5} + 157);$$

$$\sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]}(-\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_6}^2-10\tau_{z_2}\tau_{z_6}+12\tau_{z_2}+8\tau_{z_6}+112)\Big\}=$$

$$=\sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5},T_{z_5}]}(3\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_5}^2+4\tau_{z_2}\tau_{z_5}-9\tau_{z_2}+8\tau_{z_5}+157)=$$

$$=3\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_5}^{*\,2}+4\tau_{z_2}\tau_{z_5}^*-9\tau_{z_2}+8\tau_{z_5}^*+157$$

$$V_{Alpha}(\overline{z}_2)=V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_2,z_5,\tau_5^*)\Big)=$$

$$=-2\tau_{z_2}^2+3\tau_{z_5}^{*\,2}+\tau_{z_2}\tau_{z_5}^*+2\tau_{z_2}+2\tau_{z_5}^*+90$$

4. $\tau_{z_2}\in[3,2;7]$, значение игры в этом случае для игрока $Alpha$ и $Beta$:

$$V_{Beta}(\overline{z}_2)=$$

$$=\max\Big\{\sup_{\tau_{z_5}\in[t_{z_5},T_{z_5}]}(3\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_5}^2+4\tau_{z_2}\tau_{z_5}-9\tau_{z_2}+8\tau_{z_5}+157);$$

$$\sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]}(-\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_6}^2-10\tau_{z_2}\tau_{z_6}+12\tau_{z_2}+8\tau_{z_6}+112)\Big\}=$$

$$=\sup_{\tau_{z_6}\in[t_{z_6},T_{z_6}]}(-\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_6}^2-10\tau_{z_2}\tau_{z_6}+12\tau_{z_2}+8\tau_{z_6}+112)=$$

$$=-\tau_{z_2}^2-2\tau_{z_6}^{*\,2}-10\tau_{z_2}\tau_{z_6}^*+12\tau_{z_2}+8\tau_{z_6}^*+112$$

$$V_{Alpha}(\overline{z}_2)=V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_2,z_6,\tau_6^*)\Big)=$$

$$=-\tau_{z_2}^2-3\tau_{z_6}^{*\,2}+5\tau_{z_2}\tau_{z_6}^*+10\tau_{z_2}+6\tau_{z_6}^*+80.$$

Заметим, что для любых начальных состояний в подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_2}$ у игрока $Beta$ всегда существует максимизирующая стратегия. Функция $V_{Alpha}\left(E(\overline{z}_2,z,\tau_z)\right)$ при фиксированной основной альтернативе z является разрывной функцией от параметра. Игроку $Beta$ для одного интервала для τ_{z_2} $(\tau_{z_2}\in[-5;-3,2))$ выгодно выбрать одну альтернативу, а для другого интервала $(\tau_{z_2}\in[-3,2;-2,2))$ другую и т.д. Разрывы функции $V_{Alpha}\left(E(\overline{z}_2,z,\tau_z)\right)$ происходят в точках $\tau_{z_2}=-2,2$ и $\tau_{z_2}=3,2$ (рис. 12).

Таким образом, $\forall\tau_{z_2}\in[-5;7]$ оптимальные стратегии игрока $Beta$ и выигрыши игроков $Alpha$ и $Beta$ определены. На следующем графике изображены функции выигрышей игроков $Alpha$ и $Beta$ в случае когда игрок $Beta$ использует ε-равновесные стратегии в подыгре $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_2}$ в зависимости от параметра τ_{z_2}:

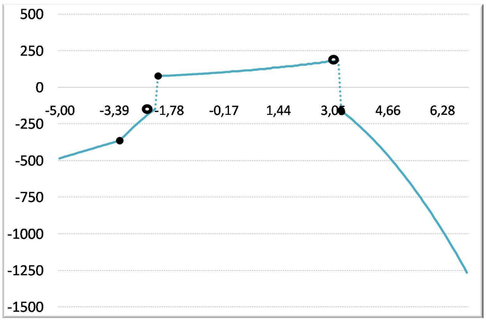

Рис. 12: $V_{Alpha}(\overline{z}_2)$. Ось x соответствуют τ_{z_2}. Черные точки на графике определяют интервалы описанные выше.

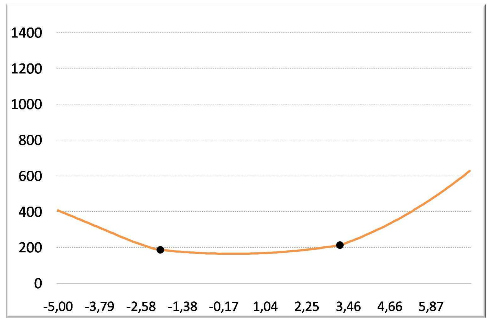

Рис. 13: $V_{Beta}(\overline{z}_2)$. Ось x соответствуют τ_{z_2}. Черные точки на графике определяют интервалы описанные выше.

Рассмотрим теперь подыгру $\overline{\Gamma}_{\overline{z}_0}$, где в позиции $\overline{z}_0 = (z_0)$ игрок $Alpha$ делает ход. Позиция z_0 – это начальная позиция в этой подыгре и во всей игре. В этой подыгре игрок $Alpha$ выбирает между двумя пучками альтернатив $\overline{z}_1 = (z_1, \tau_{z_1})$ и $\overline{z}_2 = (z_2, \tau_{z_2})$ $(\Phi_{\overline{z}_0} = \{\overline{z}_1, \overline{z}_2\})$. Выигрыш игрока $Alpha$ определен следующим образом:

$$V_{Alpha}(\overline{z}_0) = \max\Big\{ \sup_{\tau_{z_1}\in[t_{z_1},T_{z_1}]} V_{Alpha}(E(\overline{z}_0, z_1, \tau_{z_1}));$$
$$\sup_{\tau_{z_2}\in[t_{z_2},T_{z_2}]} V_{Alpha}(E(\overline{z}_0, z_2, \tau_{z_2}))\Big\} =$$
$$= \sup_{\tau_{z_2}\in[t_{z_2},T_{z_2}]} V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_0, z_2, \tau_{z_2})\Big) = V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_0, z_2, \tau^*_{z_2})\Big) =$$
$$= V_{Alpha}\Big(E(\overline{z}_0, z_2, 3,1)\Big) = V_{Alpha}(\overline{z}_5; 3,1; 5,2)) = 183,3 - \varepsilon$$
$$V_{Beta}(\overline{z}_0) = V_{Beta}\left(E(\overline{z}_0, z_2, 3,1)\right) = V_{Beta}(\overline{z}_5; 3,1; 5,2)) = 210,1 - \varepsilon.$$

Таким образом, оптимальное управление, которое реализуется в построенном абсолютном ε-равновесии по Нэшу $\overline{u}^*_\varepsilon$ в игре $\overline{\Gamma}$ имеет вид:

$$\overline{u}^{*\varepsilon}_{Aplha}(\overline{z}_0) = \overline{u}^*_{Aplha}(\overline{z}_0) = (z_2; 3,1 - \varepsilon');$$
$$\overline{u}^{*\varepsilon}_{Beta}(\overline{z}_2) = (z_6; 3,1 - \varepsilon'; 5,2).$$

Выигрыши игроков $Alpha$ и $Beta$ в сформировавшейся ситуации абсолютного равновесия по Нэшу $\overline{u}^*_t$ имеют следующий вид:

$$\overline{K}^{*}_{Aplha} = 183,3 - \varepsilon; \quad \overline{K}^{*}_{Beta} = 210,1 - \varepsilon.$$

5. Заключение

Построена модель многошаговых игр с учетом времени реализации альтернативы. Показано существование ситуации ε-равновесия для любого $\varepsilon > 0$ и приведен пример когда абсолютное равновесие в игре не существует из-за потери непрерывности функции выигрыша на множестве стратегий игроков. Модель многошаговых игр с учетом времени реализации альтернативы может быть успешно использована в бизнес или научных приложениях, где время – решающий параметр в процессе принятия стратегического решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р.Э. *Динамическое программирование* // М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1960.

2. Кун Г. *Позиционные игры и проблемы информации* // Сб. игры под ред. Н.Н. Воробьева и И.Н. Врублевской. М.:«Наука». 1967. С. 13–40.

3. Nash J. *Non-cooperative Games* // Annals of Mathematics. 1998. V. 54. P. 284–295.

4. Papayoanou P. *Game Theory of Business*. Probalistic Publishing. 2010.

5. Petrosian O., Babadzhanjanz L. *Multistage Game Model with Time-claiming Alternatives* // Contributions to Game Theory and Management. 2015. V. 8. P. 252–267.

6. Petrosyan L., Zenkevich N. *Game Theory*. World Scientific Publisher. 1996.

7. Reinhard S. *Multistage Game Models and Delay Supergames* // Theory and Decision. 1998. V. 44. P. 1–36.

ON THE GAME WITH PERFECT INFORMATION WITH TIME-CLAIMING ALTERNATIVES

Ovanes L. Petrosian, St. Petersburg State University, PhD student (petrosian.ovanes@yandex.ru).

Abstract: The following finite stage game with perfect information is considered. In each vertex of the game tree belonging to the set of personal moves of player the finite number of basic alternatives is fixed and for each given basic alternative a closed time interval is defined. The elements of this time interval are interpreted as time necessary to perform basic alternative in a given vertex. Each basic alternative in the multistage game with Time-claiming alternatives is associated with an infinite number of alternatives, the basic alternative with corresponding time values we shall call bunch of alternatives. As usual the strategy of player is a mapping which corresponds to each vertex from the set of personal moves of the player the range consisting from the index of basic alternative, time necessary to realize this alternative and all time values, which is chosen by the players on the previous stages. If the n-tuple of strategies is chosen by players the trajectory of the game path can be uniquely defined. This path consists from the sequence of basic alternatives and corresponding time parameters chosen by players. Payoff function of player for each trajectory of the game continuously depends upon all time values, which is chosen by the players to perform the basic alternative along the trajectory and it is a uniformly bounded function. However it is proved that payoff function of the player not necessary continuously depends upon his strategy (part of his strategy, time necessary to realize basic alternative). This makes impossible the existence of subgame perfect Nash equilibrium. The example of this case is presented and the existence of subgame perfect ε-Nash equilibrium is proved.

Keywords: perfect information, Nash equilibrium, time-claiming alternative.