Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.2, с. 69–84

УДК 519.83
ББК 22.18

О СИЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ C-ЯДРА*

Артем А. Седаков
Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики –
процессов управления
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35
e-mail: a.sedakov@spbu.ru

Важным свойством решения кооперативной динамической игры является его устойчивость. Существование устойчивого решения дает возможность игрокам его реализовать, не нарушая кооперативное соглашение. В работе в качестве решения рассматривается c-ядро, и формулируется условие его сильной динамической устойчивости. Когда c-ядро таковым не является, показывается, что в некоторых случаях решение можно реализовать, но при помощи сильной динамически устойчивой процедуры распределения его элементов. Приводится явный вид такой процедуры.

Ключевые слова: динамические игры, кооперация, c-ядро, сильная динамическая устойчивость.

1. Введение

При исследовании кооперативного поведения в динамических играх много внимания уделяется вопросу исполнения игроками взятых на себя обязательств по реализации кооперативного соглашения для

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (14-01-31141) и Санкт-Петербургского государственного университета (9.38.245.2014).

получения предписанного им решения. Этот вопрос является важным, поскольку своими действиями игроки могут нарушить соглашение на некотором шаге игры, тем самым не реализовав оговоренное решение. Если решение является (сильно) динамически устойчивым, такой вопрос не стоит остро, т.к. игрокам становится нецелесообразно пересматривать решение и нарушать выбранное соглашение. В случае же если решение неустойчиво, у игроков появляются основания не придерживаться соглашения. Данное свойство решений динамических игр было впервые отмечено в [2]. С целью предотвращения нарушения соглашения позднее в [5] была предложена схема выплат, получившая название процедуры распределения дележа, которая обеспечивает реализацию решения.

В литературе по теории игр и их приложениям в качестве решения часто применяется c-ядро [7]. Например, в работе [10] приводится задача совместного управления уровнем загрязнения некоторого региона, а при помощи c-ядра распределяются затраты, понесенные в связи с загрязнением, без дополнительного анализа динамической устойчивости решения. C-ядро рассматривается и в качестве решение задачи группового преследования, моделируемой кооперативной дифференциальной игрой [1], [12]. В этих работах отмечается динамическая неустойчивость c-ядра, которое реализуется при помощи найденной в явном виде динамически устойчивой процедуры распределения его элементов. В [8] устанавливается факт динамической неустойчивости c-ядра в кооперативных играх при коммуникационных ограничениях. В частности, для двухшаговых сетевых игр, показывается, что решение может быть реализовано посредством динамически устойчивой процедуры распределения элементов c-ядра, но найденное неявное представление такой процедуры осложняет ее поиск. Динамически устойчивая процедура распределения элементов ядра строится и для динамической модели управления запасами, рассматриваемой в игровой постановке [13]. Альтернативная схема распределения элементов решения по шагам игры, основанная на свойствах c-ядра, рассматривается, например, в работе [9], где для задачи охраны окружающей среды предлагается схема трансферных платежей, построенная на комбинации выигрышей при некооперативном и кооперативном поведении игроков.

В качестве решения кооперативной динамической игры в настоящей работе также рассматривается c-ядро. Стоит отметить, что в динамических играх, которые часто изначально рассматриваются с некооперативной точки зрения, но допускающие кооперацию игроков, для построения кооперативного решения нужно определить характеристическую функцию. Мы будем строить эту функцию в смысле Неймана и Моргенштерна как значение некоторой оптимизационной задачи на максимин, а определив эту функцию, найдем c-ядро игры. Поскольку мы заинтересованы в нахождении механизмов реализации кооперативного решения, то разумно предположить непустоту c-ядра. Другой подход к построению c-ядра в динамических играх рассматривается, например, в [11].

В статье мы приводим условия существования сильной динамической устойчивости c-ядра, а в случае невыполнения этих условий, формулируем условия существования сильной динамически устойчивой процедуры распределения его элементов. Приведенные условия позволяют найти указанную процедуру в явном виде, тем самым определяя механизм пошаговых выплат игрокам с целью реализации оговоренного всеми игроками решения. Само определение сильной динамической устойчивости кооперативного решения было впервые сформулировано в [3], где был построен новый сильно динамически устойчивый интегрированный принцип оптимальности на базе этого решения. В работе [4] на базе кооперативного решения строится регуляризованный принцип оптимальности, для которого приводится в явном виде сильно динамически устойчивая процедура распределения элементов решения.

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру. В разделе 2 рассматривается конечношаговая кооперативная динамическая игра и определяется ее решение – c-ядро. Раздел 3 посвящен исследованию сильной динамической устойчивости c-ядра, результатом которого является формулировка условия его сильной динамической устойчивости. В разделе 4 исследуется вопрос реализации c-ядра в случае его неустойчивости, вводя в рассмотрение процедуру распределения его элементов. Здесь же формулируются условия сильной динамической устойчивости введенной процедуры. Для иллюстрации полученных результатов в работе приводятся примеры.

2. Модель

Пусть N – конечное множество игроков, $|N| = n \geqslant 2$, а X – конечное множество состояний. Обозначим через $b_i(x)$ поведение игрока $i \in N$ в состоянии $x \in X$, а множество всех поведений игрока i в x – как $B_i(x)$. Пусть $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$ и $B(x) = B_1(x) \times \ldots \times B_n(x)$.

Рассмотрим ℓ-шаговую игру $\Gamma(x_1, \ell)$ на множестве X, начинающуюся в состоянии x_1. Динамика игры задается отображением T, которое каждому набору $(x, b(x))$ ставит в соответствие единственное состояние $T(x, b(x)) \in X$, а игра происходит следующим образом. В начальном состоянии $x_1 \in X$ игроки выбирают свои поведения $b_i(x_1) \in B_i(x_1)$, $i \in N$, получают выигрыши на первом шаге $h_1(x_1, b(x_1)), \ldots, h_n(x_1, b(x_1))$ и переходят в состояние $x_2 = T(x_1, b(x_1)) \in X$. В x_2 игроки выбирают поведения $b_i(x_2) \in B_i(x_2)$, $i \in N$, получают выигрыши на втором шаге $h_1(x_2, b(x_2)), \ldots, h_n(x_2, b(x_2))$ и переходят в состояние $x_3 = T(x_2, b(x_2)) \in X$ и т.д. На последнем шаге ℓ в состоянии $x_\ell \in X$ игроки выбирают поведения $b_i(x_\ell) \in B_i(x_\ell)$, $i \in N$, получают выигрыши на этом шаге $h_1(x_\ell, b(x_\ell)), \ldots,$ $h_n(x_\ell, b(x_\ell))$, и после этого игра заканчивается.

Стратегией u_i игрока $i \in N$ назовем отображение, которое каждому состоянию $x \in X$ единственным образом предписывает поведение $b_i(x) \in B_i(x)$, т. е. $u_i(x) = b_i(x)$. Ситуацией в игре $\Gamma(x_1, \ell)$ назовем набор стратегий $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Последовательность $(x_1, \ldots, x_\ell)$, где $x_{t+1} = T(x_t, b(x_t))$, $t = 1, \ldots, \ell-1$, назовем траекторией в игре $\Gamma(x_1, \ell)$, соответствующей ситуации u. Заметим, что любая ситуация в игре однозначно определяет поведение игроков в каждом состоянии, а, следовательно, соответствующая такой ситуации траектория также определяется единственным образом.

Если в игре $\Gamma(x_1, \ell)$, реализуются ситуация u и соответствующая ей траектория $(x_1, \ldots, x_\ell)$, выигрыш игрока $i \in N$ вдоль этой траектории определяется как $\sum\limits_{t=1}^{\ell} h_i(x_t, b(x_t))$. Поскольку ситуация в игре однозначно определяет траекторию, выигрыш игрока может быть представлен функцией от ситуации:

$$K_i(x_1, u) = \sum_{t=1}^{\ell} h_i(x_t, b(x_t)), \quad i \in N. \tag{2.1}$$

Рассмотрим кооперативный вариант игры $\Gamma(x_1, \ell)$, в которой предполагается, что все игроки выбирают такой набор стратегий $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$, при котором суммарный выигрыш всех игроков в игре $\Gamma(x_1, \ell)$ максимален:

$$\sum_{i \in N} K_i(x_1, u^*) \;=\; \max_u \sum_{i \in N} K_i(x_1, u). \tag{2.2}$$

Ситуацию $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ из (2.2) назовем кооперативной ситуацией, а соответствующую ей траекторию $(x_1^*, \ldots, x_\ell^*)$, где $x_1^* = x_1$ – кооперативной траекторией. Таким образом, взяв за основу игру $\Gamma(x_1^*, \ell)$, можно построить ее кооперативный вариант $\Gamma_C(x_1^*, \ell) = (N, v(\cdot, x_1^*, \ell))$, который задается тем же множеством игроков N и характеристической функцией $v(\cdot, x_1^*, \ell)$. Эта функция задана на множестве всех подмножеств множества N, и для некоторого непустого подмножества (коалиции) $S \subseteq N$ ее значение $v(S, x_1^*, \ell)$ показывает силу этой коалиции. Определим силу коалиции в соответствии с подходом Неймана и Моргенштерна, в котором $v(S, x_1^*, \ell)$ есть максимальный выигрыш, который может гарантировать себе коалиция S, даже когда все остальные игроки могут объединиться в одну коалицию $N \setminus S$ и действовать против S. Формально, $v(S, x_1^*, \ell)$ является значением задачи на максимин:

$$v(S, x_1^*, \ell) \;=\; \max_{u_i, i \in S} \min_{u_j, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i(x_1^*, u), \quad S \subset N. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует, что

$$v(N, x_1^*, \ell) = \sum_{i \in N} K_i(x_1^*, u^*). \tag{2.4}$$

Дополнительно положим $v(\varnothing, x_1^*, \ell) = 0$. Далее для упрощения обозначений $v(S, x_1^*, \ell)$ будем обозначать как $v^1(S)$.

Дележом в игре $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ назовем вектор $\xi(v^1) = (\xi_1(v^1), \ldots, \xi_n(v^1))$, который удовлетворяет свойствам коллективной рациональности $\sum\limits_{i \in N} \xi_i(v^1) = v^1(N)$ и индивидуальной рациональности $\xi_i(v^1) \geqslant v^1(\{i\})$, $i \in N$. Множество дележей в игре $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ обозначим через $I(v^1)$.

Решением игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ называется правило, которое этой игре ставит в соответствие подмножество $M(v^1) \subseteq I(v^1)$. В работе будем считать, что в качестве решения $M(v^1)$ игры выбирается c-ядро, т.е. множество

$$C(v^1) = \Big\{\xi(v^1) \in I(v^1) : \sum_{i \in S} \xi_i(v^1) \geqslant v^1(S), S \subset N\Big\}.$$

Таким образом, в $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$, игроки реализуют кооперативную ситуацию u^* двигаясь по кооперативной траектории $(x_1^*, \ldots, x_\ell^*)$ и получая в качестве общего выигрыша величину $v^1(N)$. А далее эта величина распределяется между игроками в виде дележа из решения $C(v^1)$.

В дальнейшем нам понадобится определить подыгру $\Gamma(x_t, \ell - t + 1)$ игры $\Gamma(x_1, \ell)$, которая по прошествии $t - 1$ шага с момента начала игры $\Gamma(x_1, \ell)$ начинается в состоянии x_t и длится $\ell - t + 1$ шаг, $t = 2, \ldots, \ell$. Стратегия $(u_i)^t$, $t = 2, \ldots, \ell$ игрока $i \in N$ в этой подыгре есть сужение его стратегии u_i в игре $\Gamma(x_1, \ell)$ на подыгру $\Gamma(x_t, \ell - t + 1)$. Ситуацией в подыгре $\Gamma(x_t, \ell - t + 1)$ назовем набор стратегий $(u)^t = ((u_1)^t, \ldots, (u_n)^t)$. Последовательность $(x_t, \ldots, x_\ell)$, определяемую ситуацией $(u)^t$, назовем траекторией в подыгре $\Gamma(x_t, \ell - t + 1)$, соответствующей $(u)^t$.

Выигрыш игрока $i \in N$ в подыгре $\Gamma(x_t, \ell - t + 1)$ при реализации ситуации $(u)^t$ может быть представлен функцией от этой ситуации:

$$K_i^t(x_t, (u)^t) = \sum_{j=t}^{\ell} h_i(x_j, b(x_j)), \quad t = 2, \ldots, \ell.$$

Определим вдоль кооперативной траектории кооперативные подыгры $\Gamma_C(x_t^*, \ell - t + 1) = (N, v(\cdot, x_t^*, \ell - t + 1))$ игр $\Gamma(x_t^*, \ell - t + 1)$, $t = 2, \ldots, \ell$, в которых характеристические функции $v(\cdot, x_t^*, \ell - t + 1)$ определяются аналогично формулам (2.3) и (2.4):

$$v(S, x_t^*, \ell - t + 1) = \max_{(u_i)^t, i \in S} \min_{(u_j)^t, j \in N \setminus S} \sum_{i \in S} K_i^t(x_t^*, (u)^t), \ S \subset N, \quad (2.5)$$

$$v(N, x_t^*, \ell - t + 1) = \max_{(u_i)^t, i \in N} \sum_{i \in N} K_i^t(x_t^*, (u)^t) = \sum_{i \in N} K_i^t(x_t^*, (u^*)^t). \quad (2.6)$$

Дополнительно положим $v(\varnothing, x_t^*, \ell - t + 1) = 0$.

Для упрощения обозначений $v(S, x_t^*, \ell - t + 1)$ будем обозначать как $v^t(S)$, а пошаговые выигрыши игроков $h_i(x_t^*, b(x_t^*))$ вдоль кооперативной траектории – как h_i^t, $i \in N$ и $h^t = (h_1^t, \ldots, h_n^t)$, $t = 1, \ldots, \ell$.

Дележом в подыгре $\Gamma_C(x_t^*, \ell - t + 1)$, $t = 2, \dots, \ell$ назовем вектор $\xi(v^t) = (\xi_1(v^t), \dots, \xi_n(v^t))$, который удовлетворяет свойствам коллективной рациональности $\sum_{i \in N} \xi_i(v^t) = v^t(N)$ и индивидуальной рациональности $\xi_i(v^t) \geqslant v^t(\{i\})$, $i \in N$. Множество дележей в подыгре $\Gamma_C(x_t^*, \ell - t + 1)$ обозначим через $I(v^t)$.

Решением подыгры $\Gamma_C(x_t^*, \ell - t + 1)$ называется правило, которое этой подыгре ставит в соответствие подмножество $M(v^t) \subseteq I(v^t)$. В качестве решения $M(v^t)$ подыгры также выберем c-ядро:

$$C(v^t) = \Big\{\xi(v^t) \in I(v^t) : \sum_{i \in S} \xi_i(v^t) \geqslant v^t(S), S \subset N\Big\}.$$

3. Сильная динамическая устойчивость c-ядра

Предположим, что вдоль кооперативной траектории $(x_1^*, \dots, x_\ell^*)$ решение не пусто. Другими словами, для каждого состояния x_t^*, $t = 1, \dots, \ell$, непусто c-ядро $C(v^t)$. Если это не так, то начиная с шага, когда впервые нарушается условие непустоты решения, в подыгре у игроков отсутствует возможность придерживаться выбранного решения.

Перед началом игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ игроки договариваются следовать кооперативной траектории, и по окончании игры они ожидают получить дележ из решения $C(v^1)$ этой игры. Рассмотрим какой-то промежуточный шаг $t = 2, \dots, \ell - 1$. В этот момент каждый из игроков должен выбрать поведение $b_i(x_t^*)$, $i \in N$ в состоянии x_t^*, предписанное его стратегией u_i^*. К шагу t каждый из них уже получил выигрыш $\sum\limits_{j=1}^{t-1} h_i^j$. Но если в x_t^* игроки пересчитают решение, то решением будет $C(v^t)$. Тогда чтобы игроки и далее продолжали движение по кооперативной траектории нужно, чтобы полученный выигрыш к этому шагу вместе с дележом из решения $C(v^t)$ был дележом исходного решения $C(v^1)$, на которое все игроки договорились перед началом игры, т. е. должно выполняться следующее условие: $\sum\limits_{j=1}^{t-1} h^j + \xi(v^t) \in C(v^1)$ для всех $\xi(v^t) \in C(v^t)$ и $t = 2, \dots, \ell - 1$.

Определение 3.1. *C-ядро кооперативной динамической игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ называется сильно динамически устойчивым, если спра-*

ведливы включения:

$$\sum_{j=1}^{t-1} h^j \oplus C(v^t) \subseteq C(v^1), \quad t = 2, \ldots, \ell, \tag{3.1}$$

где под записью $\sum\limits_{j=1}^{t-1} h^j \oplus C(v^t)$ *поднимается множество* $\{\sum\limits_{j=1}^{t-1} h^j + +\xi(v^t) : \xi(v^t) \in C(v^t)\}$.

Включение (3.1) означает, что вектор суммарных выигрышей игроков в кооперативной динамической игре $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$, полученных к некоторому промежуточному шагу t вместе с любым элементом c-ядра $C(v^t)$, который является решением в подыгре, начинающейся в x_t^*, принадлежит решению игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$, т.е. принадлежит $C(v^1)$.

Пусть v_1 и v_2 – две характеристические функции при фиксированном множестве игроков N. Для любой коалиции $S \subseteq N$ определим функцию $[v_1 - v_2](S) = v_1(S) - v_2(S)$, а под $C(v_1 - v_2)$ будем понимать c-ядро, построенное по функции $[v_1 - v_2]$.

Приведем условие сильной динамической устойчивости c-ядра.

Утверждение 3.1. *Пусть для каждого* $t = 2, \ldots, \ell$ *непусто* c*-ядро* $C(v^1 - v^t)$. *Если вдоль кооперативной траектории пошаговые выигрыши игроков удовлетворяют следующим ограничениям:*

$$\sum_{j=1}^{t-1} h^j \in C(v^1 - v^t), \quad t = 2, \ldots, \ell, \tag{3.2}$$

то c*-ядро кооперативной динамической игры является сильно динамически устойчивым.*

Доказательство. Ввиду непустоты c-ядра $C(v^1 - v^t)$, выполнение условия (3.2) означает, что $\sum\limits_{i \in S} \sum\limits_{j=1}^{t-1} h_i^j \geqslant v^1(S) - v^t(S)$ для всех $t = 2, \ldots, \ell$ или $\sum\limits_{i \in S} \sum\limits_{j=1}^{t-1} h_i^j + v^t(S) \geqslant v^1(S)$. Ввиду непустоты c-ядер вдоль кооперативной траектории, в частности, непустоты $C(v^t)$, для любого его элемента $\xi(v^t) \in C(v^t)$ тем более будет справедливо $\sum\limits_{i \in S} (\sum\limits_{j=1}^{t-1} h_i^j + \xi_i(v^t)) \geqslant v^1(S)$, $t = 2, \ldots, \ell$. Это означает, что элемент

$\sum_{j=1}^{t-1} h^j + \xi(v^t)$ содержится в $C(v^1)$. В силу произвольности выбора $\xi(v^t)$ для любого $t = 2, \ldots, \ell$ получаем (3.1). Тем самым выполнение (3.2) показывает сильную динамическую устойчивость c-ядра игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$. $\square$

Пример 3.1. Рассмотрим трехшаговую кооперативную динамическую игру трех лиц, т. е. $N = \{1, 2, 3\}$ и $\ell = 3$, в которой множество состояний $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для каждого состояния из X зададим множество поведений игроков: $B_1(x_1) = B_2(x_2) = B_3(x_3) = \{A, B\}$. Это означает, что игрок 1 принимает решение только в состоянии x_1, игрок 2 принимает решение в состоянии x_2, а игрок 3 принимает решение в состоянии x_3. Пусть отображение T имеет вид: $T(x_1, A) = x_2$, $T(x_1, B) = \varnothing$, $T(x_2, A) = x_3$, $T(x_2, B) = \varnothing$, $T(x_3, A) = T(x_3, B) = \varnothing$. Выигрыши игроков следующие: $h(x_1, A) = (6, 6, 6)$, $h(x_1, B) = h(x_2, A) = h(x_2, B) = h(x_3, B) = (3, 3, 3)$, $h(x_3, A) = (2, 2, 2)$. Набором кооперативных стратегий в игре является набор (u_1^*, u_2^*, u_3^*): $u_1^* = \{u_1^*(x_1) = B\}$, $u_2^* = \{u_2^*(x_2) = B\}$, $u_3^* = \{u_3^*(x_3) = B\}$, и этот набор определяет кооперативную траекторию (x_1^*, x_2^*, x_3^*), где $x_1^* = x_1$, $x_2^* = x_2$, $x_3^* = x_3$, а максимальный суммарный выигрыш игроков равен 27. Используя формулы (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6), находим значения характеристических функций вдоль кооперативной траектории (см. табл. 1, строки 2–4).

Таблица 1. Значения характеристических функций для примера 3.1.

S	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v^1(S)$	27	16	12	12	6	6	6
$v^2(S)$	18	10	6	12	3	5	3
$v^3(S)$	9	4	6	6	2	2	3
$[v^1 - v^2](S)$	9	6	6	0	3	1	3
$[v^1 - v^3](S)$	18	12	6	6	4	4	3

Заметим, что не пусты c-ядра $C(v^1)$, $C(v^2)$ и $C(v^3)$, поэтому воспользовавшись утверждением 3.1, построим характеристические функции $[v^1 - v^2]$ и $[v^1 - v^3]$ (табл. 1, строки 5–6). Нетрудно показать, что $C(v^1 - v^2) \neq \varnothing$ и $C(v^1 - v^3) \neq \varnothing$, для которых $h^1 = (3, 3, 3) \in C(v^1 - v^2)$, $h^1 + h^2 = (6, 6, 6) \in C(v^1 - v^3)$. Это означает, что c-ядро $C(v^1)$ в игре является сильно динамически устойчивым.

4. Процедура распределения элементов c-ядра

К сожалению, не всегда c-ядро игры $\Gamma_C(x_1^*, \ell)$ является сильно динамически устойчивым. В таком случае кооперативное соглашение участников при выбранном решении можно реализовать посредством так называемой процедуры распределения элементов c-ядра. Идея введения такой процедуры заключается в перераспределении пошаговых выигрышей игроков вдоль кооперативной траектории, заменяя их специальным образом подобранными выплатами.

Определение 4.1. *Система $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^\ell)$, где $\beta^t = (\beta_1^t, \ldots, \beta_n^t)$, $t = 1, \ldots, \ell$, называется процедурой распределения элемента c-ядра $\xi(v^1) \in C(v^1)$, если выполняются следующие условия:*

$$\sum_{t=1}^{\ell} \beta^t = \xi(v^1), \tag{4.1}$$

$$\sum_{i \in N} \beta_i^t = \sum_{i \in N} h_i^t, \quad t = 1, \ldots, \ell. \tag{4.2}$$

Условие (4.1) означает, при применении процедуры распределения элемента c-ядра $\xi(v^1)$ суммарные выплаты любому игроку в игре в точности равны соответствующей ему компоненте вектора $\xi(v^1)$, а условие (4.2) означает, что суммарные выплаты игрокам на каждом шаге игры вдоль кооперативной траектории совпадают с их суммарным выигрышем на этом шаге.

Определение 4.2. *Процедура распределения элемента c-ядра $\xi(v^1) \in C(v^1)$ называется сильно динамически устойчивой, если справедливы включения:*

$$\sum_{j=1}^{t-1} \beta^j \oplus C(v^t) \subseteq C(v^1) \text{ для любого } t = 2, \ldots, \ell, \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \beta^j \in C(v^1). \tag{4.4}$$

Аналогично утверждению 3.1 можно привести условия существования сильной динамически устойчивой процедуры распределения элемента c-ядра $C(v^1)$.

Утверждение 4.1. *Пусть для каждого $t = 2, \ldots, \ell$ непусто с-ядро $C(v^1 - v^t)$. Если процедура распределения элемента с-ядра $C(v^1)$ $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^\ell)$ удовлетворяет следующим ограничениям:*

$$\sum_{j=1}^{t-1} \beta^j \in C(v^1 - v^t), \quad t = 2, \ldots, \ell, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \beta^j \in C(v^1), \tag{4.6}$$

то она сильно динамически устойчива.

Здесь стоит отметить, что условие (4.6) показывает как должны быть подобраны выплаты β^ℓ игрокам на последнем шаге ℓ игры, чтобы β удовлетворяла определению 4.1. К сожалению, данное утверждение не позволяет найти явное представление процедуры распределения элемента c-ядра. Приведем более слабые условия, которым должна удовлетворять сильно динамически устойчивая процедура, позволяющие в явном виде определить выплаты игрокам на каждом шаге.

Утверждение 4.2. *Пусть для каждого $t = 1, \ldots, \ell - 1$ непусто с-ядро $C(v^t - v^{t+1})$. Если процедура распределения элемента с-ядра $C(v^1)$ $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^\ell)$ удовлетворяет следующим ограничениям:*

$$\beta^t \in C(v^t - v^{t+1}), \quad t = 1, \ldots, \ell - 1, \tag{4.7}$$

$$\beta^\ell \in C(v^\ell), \tag{4.8}$$

то она сильно динамически устойчива.

Доказательство. Ввиду непустоты c-ядер, выполнение условия (4.7) означает, что для всех коалиций $S \subseteq N$ справедливо $\sum\limits_{i \in S} \beta_i^t \geqslant v^t(S) - v^{t+1}(S)$, $t = 1, \ldots, \ell - 1$, а условие (4.8) означает, что для всех коалиций $S \subseteq N$ справедливо $\sum\limits_{i \in S} \beta_i^\ell \geqslant v^\ell(S)$. Тогда справедливо и

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{t-1} \beta_i^j &\geqslant v^1(S) - v^2(S) + v^2(S) - v^3(S) + \ldots + v^{t-1}(S) - v^t(S) \\ &= v^1(S) - v^t(S), \quad t = 2, \ldots, \ell, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j=1}^{\ell}\beta_i^j \ \geqslant\ v^1(S). \qquad (4.10)$$

Неравенство (4.9) эквивалентно $\sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{j=1}^{t-1}\beta_i^j+v^t(S)\geqslant v^1(S)$. Ввиду непустоты c-ядер вдоль кооперативной траектории, в частности, непустоты $C(v^t)$, для любого его элемента $\xi(v^t)\in C(v^t)$ тем более будет справедливо $\sum\limits_{i\in S}[\sum\limits_{j=1}^{t-1}\beta_i^j+\xi_i(v^t)]\geqslant v^1(S)$, $t=2,\ldots,\ell$. Это означает, что элемент $\sum\limits_{j=1}^{t-1}\beta^j+\xi(v^t)$ содержится в $C(v^1)$. В силу произвольности выбора $\xi(v^t)$ для любого $t=2,\ldots,\ell$ получаем (4.3). Из неравенства (4.10) сразу следует (4.4). Тем самым процедура распределения элемента c-ядра кооперативной динамической игры $\Gamma_C(x_1^*,\ell)$, определяемая (4.7), (4.8) является сильно динамически устойчивой. $\square$

Замечание 4.1. С помощью утверждения 4.2 посредством процедуры распределения можно реализовать только те элементы c-ядра $C(v^1)$, которые принадлежат множеству

$$\big(C(v^1-v^2)\oplus\ldots\oplus C(v^{\ell-1}-v^\ell)\oplus C(v^\ell)\big)\cap C(v^1),$$

где множество $C(v^1-v^2)\oplus\ldots\oplus C(v^{\ell-1}-v^\ell)\oplus C(v^\ell)$ содержит всевозможные суммы $\beta^1+\ldots+\beta^\ell$, удовлетворяющие (4.7), (4.8).

В нижеследующем примере показано, что c-ядро не всегда сильно динамически устойчиво, а также, что сильно динамически устойчивая процедура распределения его элементов не всегда существует.

Пример 4.1. Рассмотрим двухшаговую игру трех лиц, из примера в работе [6], где были найдены кооперативная траектория (x_1^*,x_2^*), выигрыши игроков вдоль нее $h^1=(0,0,0)$, $h^2=(3,6,2)$ и значения характеристических функций, которые представлены в табл. 2 (строки 2–3). Отметим, что вдоль кооперативной траектории непусты c-ядра $C(v^1)$ и $C(v^2)$. Построим характеристическую функцию $[v^1-v^2]$ согласно утверждению 3.1 (табл. 2, строка 4). Проверим выполнение условия (3.2): $h^1\notin C(v^1-v^2)$. Это говорит о сильной динамической неустойчивости c-ядра.

Таблица 2. Значения характеристических функций для примера 4.1.

S	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v^1(S)$	11	9	9	3	1	1	2
$v^2(S)$	11	9	3	3	1	1	2
$[v^1 - v^2](S)$	0	0	6	0	0	0	0

Поскольку c-ядро является неустойчивым, постараемся реализовать кооперативное соглашение посредством сильной динамически устойчивой процедуры распределения его элемента. Воспользуемся утверждением 4.1. Так как $C(v^1 - v^2) = \varnothing$, сильной динамически устойчивой процедуры распределения элемента $C(v^1)$ не существует.

Теперь приведем пример, в котором удается построить сильно динамически устойчивую процедуру распределения элемента c-ядра.

Пример 4.2. Рассмотрим трехшаговую кооперативную динамическую игру из примера 3.1, с той же структурой, но другими выигрышами игроков, а именно: $h(x_1, A) = (12, 0, 0)$, $h(x_1, B) = (3, 3, 3)$, $h(x_2, A) = (0, 9, 0)$, $h(x_2, B) = (3, 3, 3)$, $h(x_3, A) = (0, 0, 6)$, $h(x_3, B) = (3, 3, 3)$. Набор кооперативных стратегий в этой игре, кооперативная траектория и максимальный суммарный выигрыш игроков такие же, как в примере 3.1. Отличаются значения характеристических функций вдоль кооперативной траектории (см. табл. 3, строки 2–4).

Таблица 3. Значения характеристических функций для примера 4.2.

S	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1}	{2}	{3}
$v^1(S)$	27	15	12	0	12	0	0
$v^2(S)$	18	9	0	12	0	9	0
$v^3(S)$	9	0	6	6	0	0	6
$[v^1 - v^2](S)$	9	6	12	–12	12	–9	0
$[v^1 - v^3](S)$	18	15	6	–6	12	0	–6
$[v^2 - v^3](S)$	9	9	–6	6	0	9	–6

Напомним, что $h^1 = h^2 = h^3 = (3, 3, 3)$. Вдоль кооперативной траектории непусты c-ядра $C(v^1)$, $C(v^2)$ и $C(v^3)$. Воспользовавшись утверждением 3.1, построим характеристические функции $[v^1 - v^2]$ и $[v^1 - v^3]$ (табл. 3, строки 5–6). Проверим выполнение условий (3.2). Множества $C(v^1 - v^2) \neq \varnothing$, $C(v^1 - v^3) \neq \varnothing$, а $h^1 \notin C(v^1 - v^2)$,

$h^1 + h^2 \notin C(v^1 - v^3)$. Это говорит о сильной динамической неустойчивости c-ядра. Постараемся реализовать кооперативное соглашение посредством сильной динамически устойчивой процедуры распределения его элементов. Воспользуемся утверждением 4.2. Нетрудно показать, что и множество $C(v^2 - v^3) \neq \varnothing$ (табл. 3, строка 7), следовательно, можно построить сильно динамически устойчивую процедуру распределения элемента $C(v^1)$. Пусть $\beta^1 = (12, -3, 0)$, $\beta^2 = (3, 9, -3)$ и $\beta^3 = (1, 2, 6)$. Указанная процедура предписывает, например, первому игроку на первом шаге выплату 12, на втором шаге выплату 3, а на третьем – 1. При применении этой процедуры реализуется дележ $\xi(v^1) = (16, 8, 3)$, который принадлежит $C(v^1)$. Заметим, что предложенная процедура удовлетворяет и утверждению 4.1, поскольку $\beta^1 + \beta^2 = (15, 6, -3) \in C(v^1 - v^3)$.

Рассмотрим другой элемент c-ядра $\tilde{\xi}(v^1) = (17, 2, 8) \in C(v^1)$. Несложно проверить, что $\tilde{\beta}^1 = (15, -8, 2)$, $\tilde{\beta}^2 = (1, 8, 0)$, $\tilde{\beta}^3 = (1, 2, 6)$ является сильно динамически устойчивой процедурой распределения этого элемента. Действительно, следуя формулам (4.5), (4.6) из утверждения 4.1, заключаем, что $\tilde{\beta}^1 \in C(v^1 - v^2)$, $\tilde{\beta}^1 + \tilde{\beta}^2 \in C(v^1 - v^3)$, $\tilde{\beta}^1 + \tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta}^3 \in C(v^1)$. Однако, эту процедуру распределения невозможно получить с помощью формул (4.7), (4.8) из утверждения 4.2, поскольку $\tilde{\beta}^2 \notin C(v^2 - v^3)$, несмотря на то, что $\tilde{\beta}^1 \in C(v^1 - v^2)$ и $\tilde{\beta}^3 \in C(v^3)$. Данное обстоятельство и показывает, что с помощью утверждения 4.2 можно найти не все сильно динамически устойчивые процедуры распределения элементов c-ядра.

5. Заключение

В работе исследовался вопрос сильной динамической устойчивости c-ядра кооперативных конечношаговых динамических игр. Были приведены условия, которые гарантируют его сильную динамическую устойчивость. При невыполнении таких условий элементы c-ядра были реализованы с использованием процедуры перераспределения выигрышей игроков вдоль кооперативной траектории. Найдены условия, гарантирующие сильную динамическую устойчивость процедуры распределения элементов c-ядра, а также явный вид такой процедуры. Полученные результаты проиллюстрированы на примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панкратова Я.Б. *Решение кооперативной дифференциальной игры группового преследования* // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 2. С. 57–78.

2. Петросян Л.А. *Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1977. № 19. С. 46–52.

3. Петросян Л.А. *Построение сильно-динамически устойчивых решений в кооперативных дифференциальных играх* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1992. № 2. С. 33–38.

4. Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1993. № 4. С. 35–40.

5. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. *Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами* // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: математика, механика, астрономия. 1979. № 1. С. 52–59.

6. Петросян Л.А., Седаков А.А., Бочкарев А.О. *Двухступенчатые сетевые игры* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5. № 4. С. 84–104.

7. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб: Изд-во Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2004.

8. Gao H., Petrosyan L., Sedakov A. *Strongly Time-consistent Solutions for Two-stage Network Games* // Procedia Computer Science. 2014. V. 31. P. 255–264.

9. Germain M., Tulkens H., Magnus A. *Dynamic core-theoretic cooperation in a two-dimensional international environmental model* // Mathematical Social Sciences. 2010. V. 59. P. 208–226.

10. Jørgensen S. *A dynamic game of waste management* // Journal of Economic Dynamics and Control. 2010. V. 34. No. 2. P. 258–265.

11. Kranich L., Perea A., Peters H. *Core concepts for dynamic TU games* // International Game Theory Review. 2005. V. 7. No. 1. P. 43–61.

12. Kwon O.-H., Tarashnina S. *On a time-consistent solution of a cooperative differential time-optimal pursuit game* // Journal of the Korean Mathematical Society. 2002. V. 39. No. 5. P. 745–764.

13. Toriello A., Uhan N.A. *Dynamic cost allocation for economic lot sizing games* // Operations Research Letters. 2014. V. 42. No. 1. P. 82—84.

THE STRONG TIME-CONSISTENT CORE

Artem A. Sedakov, Saint Petersburg State University, Cand.Sc. (a.sedakov@spbu.ru).

Abstract: Time consistency is one of desirable properties of any solution of a cooperative dynamic game. If a solution is time consistent, players do not need to break a cooperative agreement. In the paper, we consider the core as the solution and provide conditions for its strong time consistency. When the core is not strongly time consistent, we show that in some cases its elements can be realized by means of a strongly time-consistent imputation distribution procedure. An explicit form of the procedure is proposed.

Keywords: dynamic games, cooperation, core, strong time consistency.