Математическая Теория Игр и её Приложения, т.7, в.4, с. 19–39

УДК 517.977.8, 519.83
ББК 22.18

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В КООПЕРАТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ*

Екатерина В. Громова
Леон А. Петросян
Факультет прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: e.v.gromova@spbu.ru, spbuoasis7@peterlink.ru

В статье предлагается новый подход для построения характеристических функций в кооперативных дифференциальных играх. Значение характеристической функции для коалиции S вычисляется в два этапа: сначала находятся оптимальные управления, доставляющие максимум суммарному выигрышу игроков, а затем они используются для игроков, входящих в коалицию S, в то время как оставшиеся игроки из $N \setminus S$ используют стратегии, минимизирующие суммарный выигрыш игроков из S. Построенная таким образом характеристическая функция удовлетворяет свойству супераддитивности. Кроме того, показывается ряд других полезных свойств. В работе также приводится пример вычисления значений характеристической функции для одной дифференциальной игры сокращения объемов вредных выбросов в атмосферу.

---

* Работа выполнена при поддержке грантов СПбГУ 9.38.245.2014, 9.41.723.2015.

Ключевые слова: кооперативные игры, характеристическая функция, дифференциальные игры, супераддитивность.

1. Введение

В настоящее время в теории игр выделяют большое количество классов игр [3, 6], однако принципиально разными по специфике решаемых задач являются некооперативные и кооперативные игры. При изучении оптимального поведения игроков в некооперативных играх последние, как правило, рассматриваются в нормальной форме, т. е. задается система $\Gamma =< N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N} >$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока i, H_i – функция выигрыша игрока i, определенная на $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$. Конфликт интересов игроков состоит в том, что перед каждым игроком i, $i \in N$, стоит задача выбора одной из стратегий $u_i \in X_i$, максимизирующей выигрыш H_i этого игрока, зависящий, в том числе, и от выбранных стратегий других игроков. В этом смысле подход к решению круга задач в некооперативной постановке игры может быть назван «стратегическим» [5].

В кооперативной постановке все игроки перед началом игры договариваются действовать совместно оптимально (кооперируются), т.е. договариваются использовать оптимальные стратегии $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$, максимизирующие суммарный выигрыш $V(N) = \max\limits_{u\in X} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u)$. При достаточно слабых ограничениях на условия достижимости максимума и пр. в кооперативных играх «достаточно просто» найти оптимальные стратегии $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$. В кооперативном варианте игры главной задачей, носящей конфликтный характер, становится проблема справедливого раздела $V(N)$ между игроками. В связи с этим подход к решению задач в кооперативных играх может быть назван «нестратегическим», подчеркивая то, что задача нахождения оптимальных стратегий не носит конфликтный характер и не является основной.

При изучении кооперативных игр выделяют так называемые кооперативные игры с трансферабельной и нетрансферабельной полезностью [20]. Свойство трансферабельности означает, что игроки имеют возможность складывать и делить выигрыши. В трансферабельных кооперативных играх под принципом оптимальности понимают способ раздела суммарного максимального выигрыша, совместно заработанного игроками [5]. Отметим, что в англоязычной литературе вместо словосочетания «принцип оптимальности» используется понятие «кооперативного решения», однако мы будем придерживаться терминологии, введенной Н.Н. Воробьевым в [1]. Согласно [1] под принципом оптимальности C будем понимать некоторое подмножество множества дележей L, т.е. $C \subseteq L$, где $L = \{\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n\}$ (множество дележей) удовлетворяет следующим свойствам:

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i = V(N)$ – групповая рациональность,
- $\xi_i \geq V(\{i\})$ – индивидуальная рациональность.

Как мы видим, определение множества дележей L (и, следовательно, принципа оптимальности C) основано на функции $V(\cdot)$, которая называется характеристической функцией [7]. Отметим, что существуют способы раздела суммарного выигрыша без вычисления $V(S)$ для всех допустимых коалиций S (см. например, пропорциональное решение [20]), однако большинство принципов оптимальности (такие, например, как C-ядро, k-ядро, N-ядро, вектор Шепли [6, 7]) основаны на использовании характеристической функции $V(S)$, $S \subseteq N$. В общем случае кооперативная игра задается как пара $< N, V(\cdot) >$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, $V(S)$, $S \subseteq N$ – характеристическая функция, заданная на множестве допустимых коалиций. Изначально значение характеристической функции $V(S)$ интерпретировалось как максимальный гарантированный выигрыш коалиции S, который она может получить, действуя независимо от других игроков [5, 16]. Однако в настоящий момент под характеристической функцией, как правило, понимается отображение, ставящее в соответствие любой допустимой коалиции S величину, показывающую «силу» данной коалиции [7]. В теории кооперативных игр существуют различные способы построения характеристической функции. Некоторые из них описаны в работе [19], систематизирующей различные современные подходы. Наиболее часто используемые классы характеристических функций могут быть обозначены в порядке их появления как α-, β-, γ-, δ-характеристические функции [9, 17, 19].

В разделе 2 данной статьи приводится критический обзор существующих классов характеристических функций с примерами их использования для класса дифференциальных игр. Некоторые из указанных в разделе 2 недостатков существующих подходов могут быть устранены при использовании нового класса характеристических функций, описанного в разделе 3. Также в разделе 3 доказывается теорема о супераддитивности новой характеристической функции. Раздел 4 содержит пример кооперативной дифференциальной игры, в которой характеристическая функция строится несколькими способами.

2. Характеристические функции в кооперативных играх

2.1. Супераддитивность характеристической функции

Кооперативной игрой в форме характеристической функции будем называть пару $< N, V >$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, $V(S)$, $S \subseteq N$ – характеристическая функция.

Под характеристической функцией будем понимать отображение из множества всех возможных коалиций

$$V(\cdot) : 2^N \to R,$$

$$V(\emptyset) = 0,$$

ставящее в соответствие каждой коалиции S величину суммарного выигрыша, который игроки из данной коалиции S могут себе обеспечить, действуя самостоятельно.

Важным свойством является свойство супераддитивности характеристической функции:

$$V(S_1 \cup S_2) \geq V(S_1) + V(S_2), \qquad \forall S_1, S_2 \subseteq N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset. \tag{2.1}$$

В настоящее время в работах по кооперативной теории игр выполнение свойства супераддитивности характеристической функции $V(S)$ часто не требуется [7, 18, 19]. Однако использование супераддитивной функции при решении различных задач в области кооперативной теории игр как в статической, так и в динамической постановке, дает ряд преимуществ, а именно, супераддитивность 1) побуждает игроков создавать все большие коалиции и в итоге объединиться в гранд-коалицию N, 2) придает понятный смысл вектору Шепли (компонента дележа для каждого игрока равна его среднему вкладу в благосостояние гранд-коалиции при определенном механизме ее формирования) [7], 3) необходима при построении сильно-динамически устойчивых принципов оптимальности [2].

Таким образом, более оправданно во многих аспектах иметь супераддитивную характеристическую функцию.

2.2. Различные способы построения характеристических функций

Вопрос построения характеристической функции является одним из основных в кооперативной теории игр. В настоящее время известны различные способы построения характеристических функций в кооперативных играх.

В данной статье мы анализируем только два подхода из представленных выше, а именно, изучаем свойства так называемых α- и δ-характеристических функций, поскольку в предложенном нами новом подходе будут устранены некоторые из недостатков указанных классов характеристических функций. Отметим лишь, что β-характеристические функции для некоторых достаточно широких классов игр [17] совпадают с α-характеристическими функциями. При построении δ -характеристической функции [9] постулируется, что сформированная коалиция использует равновесие по Нэшу с остальными игроками, играя как один игрок (см. также [15]).

2.3. α-характеристическая функция

При построении α-характеристических функций используется классический подход Дж. Неймана, О. Моргенштерна, сформулированный в 1944 году в работе [16]. Согласно данному подходу под $V(S)$ понимается максимальный гарантированный выигрыш коалиции S, а сама $V(S)$ может быть вычислена на основе вспомогательной антагонистической игры $\Gamma_{S,N\setminus S}$ между коалицией S и анти-коалицией $N \setminus S$.

В общем случае

$$V^{\alpha}(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \mathrm{val}\ \Gamma_{S,N\setminus S}, & S \subset N, \\ \sup\limits_{u_1,u_2,\dots u_n} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u_1, u_2, \dots, u_n), & S = N, \end{cases} \tag{2.2}$$

где val $\Gamma_{S,N\setminus S}$ есть значение антагонистической игры между коалициями S и $N \setminus S$ с функцией выигрыша $\sum\limits_{i\in S} H_i(u_1,\ldots,u_n)$. Доказано [5], что $V^\alpha(S)$ является супераддитивной функцией, т.е. удовлетворяет свойству (2.1).

Использование α-характеристической функции долгое время представлялось единственно возможным способом построения кооперативной игры, а задание характеристической функции $V(S)$ как максимального гарантированного выигрыша коалиции S формулировалось как определение характеристической функции. Данный подход имеет ряд неоспоримых преимуществ: при его использовании имеется четко сформулированная математическая задача с понятной прикладной интерпретацией, кроме того, построенная характеристическая функция супераддитивна. В то же время, стоит выделить следующие проблемы, возникающие при построении характеристической функции по методу Неймана, Моргенштерна. Во-первых, необходимо решить $2^n - 1$ задач оптимизации сложного вычислительного характера, особенно в динамических и дифференциальных играх. Во-вторых, с точки зрения экономических приложений предположение о том, что игроки из $N \setminus S$ будут образовывать анти-коалицию, т.е. играть против коалиции S, является мало реальным. Кроме того, возникает вопрос о существовании значения антагонистической игры val $\Gamma_{S,N\setminus S}$. Исходя из последнего, достаточно часто характеристическая функция определяется через нижнее значение игры, а именно

$$V^\alpha(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \sup\limits_{\substack{u_i,\\ i\in S}} \inf\limits_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} H_i(u_1,u_2,\ldots,u_n), & S \subset N, \\ \sup\limits_{u_1,u_2,\ldots u_n} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u_1,u_2,\ldots,u_n), & S = N. \end{cases} \tag{2.3}$$

При условии достижимости $\max\limits_{\substack{u_i,\\ i\in S}} \sum\limits_{i\in S} H_i$, $\min\limits_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} H_i$, характеристическая функция часто задается следующим образом:

$$V^\alpha(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \max\limits_{\substack{u_i,\\ i\in S}} \min\limits_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} H_i(x_0,u_1,\ldots,u_n), & S \subset N, \\ \max\limits_{u_1,u_2,\ldots u_n} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u_1,u_2,\ldots,u_n), & S = N. \end{cases}$$

Тем не менее, в области дифференциальных игр, характеристическая функция (2.3), редко может быть получена в аналитическом виде в силу серьезных вычислительных сложностей. При построении α-характеристической функции нередко возникают разрывные решения, встает вопрос о существовании и единственности решений уравнений типа Гамильтона-Якоби-Беллмана в том случае, если используется класс стратегий с обратной связью, да и сам вопрос о выборе класса стратегий становится крайне актуальным. Таким образом, первоначальная задача кооперативной теории о разделе максимального суммарного выигрыша игроков, заработанного ими совместно, сводится к нахождению стратегий и задача из «нестратегической» приобретает стратегический характер.

Рассмотрим следующий пример, который основан на одной экономической задаче из [13].

Пример 1. Имеется $n = 3$ игрока, $a_i(t) \in [0; \bar{a}]$ – управление игрока i, $i = 1, 2, 3$. Функция выигрыша игрока имеет вид

$$J_i\left(a_i, g_0\right) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left(\pi \left[\beta - \sum_{h=1}^{3} G_h(t)\right] G_i(t) - \frac{c}{2} a_i^2(t)\right) dt, \qquad (2.4)$$

где динамика задается уравнением

$$\dot{G}_i(t) = \kappa a_i(t); \quad G_i(0) \triangleq g_0 > 0; \quad i \in \{1, 2, 3\}, \qquad \kappa > 0. \qquad (2.5)$$

Рассмотрим все возможные коалиции S из двух игроков: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и найдем выражение для характеристической функции $V(S, g_0)$ для таких коалиций. В данном случае в качестве аргумента характеристической функции включено также начальное состояние фазовой переменной g_0 для учета динамической составляющей игры.

Для построения α-характеристической функции (2.3) необходимо решить уравнение следующего типа [10, 12] для всех возможных вариантов двухэлементных коалиций $S \subset N$:

$$\rho V^{\alpha}(S, G) =$$

$$= \max_{\substack{a_h \\ h \in S}} \min_{\substack{a_k \\ k \in N \setminus S}} \{\pi \sum_{h \in S} [\beta - \sum_{j=1}^{3} G_j] G_h - \frac{c}{2} \sum_{h \in S} a_h^2 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V^{\alpha}(S, G)}{\partial G_j} a_j\},$$

где $a_h = \{a_i\}_{i\in S}$, $V^\alpha(S,G)$ – функция Беллмана в соответствующей задаче максимизации выигрыша для коалиции S, т.е.

$$V^\alpha(S,G(\tau)) = \max_{\substack{a=\{a_i\}_{i=1}^n \\ a_i\in[0,\bar a]}} \int_\tau^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left[\beta-\sum_{h=1}^3 G_h(t)\right]G_i(t)-\frac{c}{2}a_i^2(t)\right)dt,$$

где фазовая переменная $G=\{G_1,G_2,G_3\}$ изменяется согласно (2.5).

Имеем следующие оптимальные управления для игроков из коалиции S:

$$a_h = \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial V^\alpha(S,G)}{\partial G_h} > 0, & \text{если } \frac{\partial V^\alpha(S,G)}{\partial G_h} > 0,\ h\in S,\\ 0, & \text{если } \frac{\partial V^\alpha(S,G)}{\partial G_h} \le 0,\ h\in S \end{cases} \tag{2.6}$$

и оставшегося игрока k:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{\partial V^\alpha(S,G)}{\partial G_k} \ge 0,\\ \bar a, & \text{если } \frac{\partial V^\alpha(S,G)}{\partial G_k} < 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Очевидно, что задача свелась к рассмотрению следующих случаев:

Вариант 1.1: $a_i = 0$, $i = 1,2,3$.

Вариант 1.2: $a_h = 0$, $h\in S$, $a_k = \bar a$.

Вариант 2.1: $a_h > 0$, $h\in S$, $a_k = 0$.

Вариант 2.2: $a_h > 0$, $h\in S$, $a_k = \bar a$.

Содержательный интерес представляет вариант 2.2. В этом случае характеристическая функция имеет следующий вид [11, 12]:

$$V^\alpha(S,g_0) = \alpha+\gamma_A(G_i+G_j)+\gamma_B G_k+\frac{\varepsilon_A}{2}(G_i^2+G_j^2)+\frac{\varepsilon_B}{2}G_k^2+ \\ +\eta_A G_iG_j+\eta_B(G_iG_k+G_jG_k),$$

где коэффициенты находятся из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c\rho\alpha &= \gamma_A^2+\gamma_B\bar a,\\ c\rho\gamma_A &= \gamma_A\varepsilon_A+\gamma_A\eta_A+c\pi\beta+\eta_B\bar a,\\ c\rho\gamma_B &= 2\gamma_A\eta_B+\varepsilon_B\bar a,\\ c\rho\varepsilon_A &= \varepsilon_A^2+\eta_A^2-2c\pi,\\ c\rho\varepsilon_B &= 2\eta_B^2,\\ c\rho\eta_A &= 2\varepsilon_A\eta_A-2c\pi,\\ c\rho\eta_B &= \varepsilon_A\eta_B+\eta_A\eta_B-c\pi. \end{aligned}$$

Заметим, что данная система алгебраических уравнений имеет четыре решения. Таким образом, характеристическая функция не может быть построена однозначно. Данная ситуация усугубляется наличием остальных вариантов 1.1, 1.2, 2.1, что связано с использованием $\max\min$ в определении характеристической функции, поскольку для $\max\min$ решение часто находится на границе компакта. В настоящее время в литературе встречается подход, связанный с «отсеиванием» результатов при неединственном решении уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана при помощи экономической интерпретации (см., например, [8]). Однако математический аппарат для такого «отсеивания» не разработан.

2.4. δ-характеристическая функция

В работе Л.А. Петросяна, Дж. Заккура [18] был предложен конструктивный подход для построения δ-характеристической функции. $V(S)$ как сила коалиции S может быть вычислена следующим образом: игроки из S максимизируют свой суммарный выигрыш $\sum\limits_{i\in S} H_i(u_S, u^{NE}_{N\setminus S})$, в то время как оставшиеся игроки из множества $N\setminus S$ используют равновесные по Нэшу стратегии $u^{NE}_{N\setminus S} = \{u^{NE}_j\}_{j\in N\setminus S}$. Таким образом, имеем 2-этапную процедуру для построения характеристической функции: 1) находим равновесные по Нэшу стратегии $\{u^{NE}_i\}$ для всех игроков $i \in N$, 2) «замораживаем» равновесные по Нэшу стратегии u^{NE}_j для игроков $j \in N \setminus S$, а для игроков из коалиции S находим максимум их суммарного выигрыша по $u_S = \{u_i\}_{i\in S}$. Таким образом, имеем следующее определение характеристической функции:

$$V^\delta(S) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \sup\limits_{\substack{u_i,\, i\in S \\ u_j = u^{NE}_j,\, j\in N\setminus S}} \sum\limits_{i\in S} H_i(u_S, u^{NE}_{N\setminus S}), & S \subset N, \\ \sup\limits_{u_1,u_2,\dots u_n} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u_1, u_2, \dots, u_n), & S = N. \end{cases} \tag{2.8}$$

Определенная таким образом характеристическая функция имеет следующие преимущества. Во-первых, очевидно, что при построении характеристической функции (2.8) требуется меньшее количество вычислительных операций по сравнению с характеристической функцией (2.3). К тому же, построение значений $V^\delta(\cdot)$ основано на уже определенном равновесии по Нэшу, что существенно упрощает дальнейшие вычисления. В-третьих, данное определение характеристической функции имеет понятную экономическую интерпретацию, а именно то, что игроки, не вступившие в коалицию S не будут образовывать анти-коалицию $N \setminus S$, что соответствует их «неагрессивному» поведению во многих приложениях теории игр в области экологического менеджмента и пр. (см. [10, 14, 15]).

Тем не менее, следует выделить следующие недостатки предложенного подхода. Отметим, что построенная по формуле (2.8) δ-характеристическая функция не является супераддитивной в общем случае в отличие от α-характеристической функции (2.3). Кроме того, крайне актуальным становится вопрос о существовании и единственности равновесия по Нэшу. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Найдем равновесие по Нэшу в дифференциальной игре, сформулированной в примере 1. Имеем следующую задачу оптимизации

$$V_i(G(\tau)) = \max_{a_i\in[0,\bar{a}]} \int_\tau^\infty e^{-\rho t}\left(\pi\left[\beta - \sum_{h=1}^{3} G_h(t)\right] G_i(t) - \frac{c}{2}a_i^2(t)\right) dt, \ i \in N, \tag{2.9}$$

где фазовая переменная $G = \{G_1, G_2, G_3\}$ изменяется согласно (2.5).

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для функции $V_i(G)$:

$$\rho V_i(G) = \max_{a_i\in[0,\bar{a}]} \left\{\pi\left[\beta - \sum_{j=1}^{3} G_j\right] G_i - \frac{c}{2}a_i^2 + \frac{\partial V_i}{\partial G_i}a_i\right\}. \tag{2.10}$$

Имеем

$$a_i(G) = \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial V_i}{\partial G_i} > 0, & \text{если } \frac{\partial V_i}{\partial G_i} > 0 \\ 0, & \text{если } \frac{\partial V_i}{\partial G_i} \le 0. \end{cases}$$

Тогда имеем два варианта:

$$V_i(G) = \frac{1}{2\rho c}\left(\frac{\partial V_i}{\partial G_i}\right)^2 + \frac{\pi}{\rho}\left[\beta - \sum_{j=1}^{3} G_j\right] G_i, \quad \text{если } a_i > 0, \tag{2.11}$$

$$V_i(G) = \frac{\pi}{\rho}\left[\beta - \sum_{j=1}^{3} G_j\right] G_i, \quad \text{если } a_i = 0.$$

Таким образом, для второго случая из (2.11) сразу получаем явный вид $V_i(G)$. Для первого случая, аналогично примеру 1, ищем решение в виде [11, 12]

$$V_i(G) = \alpha + \gamma_A G_i + \frac{\varepsilon_A}{2} G_i^2 + (\eta_A G_i + \gamma_B)(G_j + \\ + G_k) + \frac{\varepsilon_B}{2}(G_j^2 + G_k^2) + \eta_B G_j G_k,$$

где $\alpha, \gamma_A, \gamma_B, \varepsilon_A, \varepsilon_B, \eta_A, \eta_B$, ε_A находятся из системы

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{\gamma_A^2}{2c\rho}, \\ c\rho\gamma_A & = & \gamma_A\varepsilon_A + c\pi\beta, \quad c\rho\gamma_B = \gamma_A\eta_A, \\ c\rho\varepsilon_A & = & \varepsilon_A^2 - 2\pi c, \quad c\rho\varepsilon_B = \eta_A^2, \\ c\rho\eta_A & = & \varepsilon_A\eta_A - \pi c, \; c\rho\eta_B = \eta_A^2. \end{array}$$

Данная система алгебраических уравнений имеет четыре решения. Таким образом, равновесие по Нэшу не является единственным.

3. Новый способ построения характеристических функций

В работе Л.А. Петросяна, Е.В. Громовой [4] была рассмотрена двухуровневая кооперативная дифференциальная игра с коалиционной структурой, где на первом уровне в качестве игроков рассматривались коалиции, а на втором уровне выигрыши, полученные коалициями на первом уровне, распределялись внутри этих коалиций. В данной работе было предложено использовать α -характеристическую функцию для первого уровня кооперации, а для второго уровня предлагался новый подход, позволяющий построить супераддитивную характеристическую функцию, причем с меньшими вычислительными сложностями, чем при использовании максиминного подхода Неймана-Моргенштерна (2.3). Обобщим предложенный в [4] подход.

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ с предписанной продолжительностью $(T - t_0)$ и начальным состоянием x_0 [5]. Динамика игры задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u_1, \dots, u_n), \quad x \in R^n, u_i \in U_i \subset \mathrm{comp} R^k, t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \tag{3.1}$$

Предполагается, что система дифференциальных уравнений (3.1) удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решений для любого набора измеримых управлений $u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)$, а именно: 1) функция f непрерывна на множестве $R^n \times U_1 \times \ldots \times U_l$, 2) функция f удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной κ_1: $||f(x', u_1, \ldots, u_l) - f(x'', u_1, \ldots, u_l)|| \leq \kappa_1 ||x' - x''||$ для всех $x', x'' \in R^n$, 3) $||f(x, u_1, \ldots, u_l)|| \leq \kappa_2(1 + ||x||)$ для всех $(x, u_1, \ldots, u_l) \in (R^n \times U_1 \times \ldots \times U_l)$.

Пусть $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков. Выигрыш i-го игрока определяется следующим образом:

$$H_i(x_0, T - t_0, u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(\tau), u_1(t), \ldots, u_n(t)) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

где $h_i(x, u_1, \ldots, u_n)$ представляет собой непрерывную функцию и $x(t)$ – решение задачи Коши для системы (3.1) при управлениях $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$.

Рассмотрим кооперативный вариант игры. Пусть $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ – оптимальные управления, т.е. такой n-набор управлений, который доставляет максимум суммарному выигрышу игроков:

$$\bar{u} = \arg\max_u \sum_{i=1}^{n} H_i(x_0, T - t_0, u). \tag{3.3}$$

Предполагаем, что максимум в (3.3) достигается. Далее будем использовать сокращенную запись $H_i(x_0, u)$.

Характеристическая функция $V^\zeta(S, x_0, T - t_0)$ как сила коалиции S, $S \subseteq N$ в дифференциальной игре $\Gamma(x_0, T - t_0)$ может быть вычислена следующим образом: игроки из S используют стратегии $\bar{u}_S = \{\bar{u}_i\}_{i \in S}$ из оптимального n-набора $\bar{u}$, в то время как оставшиеся игроки из множества $N \setminus S$ минимизируют выигрыш $\sum\limits_{i \in S} H_i$ коалиции S.

Имеем

$$V^{\zeta}(S, x_0, T - t_0) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \inf\limits_{\substack{u_j \in U_j,\, j \in N \setminus S, \\ u_i = \bar{u}_i,\, i \in S}} \sum\limits_{i \in S} H_i(x_0, \bar{u}_S, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max\limits_{\substack{u_1, u_2, \ldots, u_n, \\ u_i \in U_i,\, i \in N}} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(x_0, u_1, u_2, \ldots, u_n), & S = N, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\bar{u} = \{\bar{u}_i\}_{i \in N}$ — профиль стратегий, на котором достигается максимум суммарного выигрыша всех игроков, $\bar{u}_S = \{\bar{u}_i\}_{i \in S}$.

При условии достижимости максимума и минимума в (3.4), характеристическая функция может быть вычислена следующим образом:

$$V^{\zeta}(S, x_0, T - t_0) = \begin{cases} 0, & S = \{\emptyset\}, \\ \min\limits_{\substack{u_j,\, j \in N \setminus S, \\ u_i = \bar{u}_i,\, i \in S}} \sum\limits_{i \in S} H_i(\bar{u}_S, u_{N \setminus S}), & S \subset N, \\ \max\limits_{\substack{u_1, u_2, \ldots, u_n, \\ u_i \in U_i,\, i \in N}} \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), & S = N. \end{cases}$$

Предложенный способ построения характеристической функции в дифференциальной игре с предписанной продолжительностью легко может быть обобщен для других классов игр.

3.1. Теорема о супераддитивности

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Характеристическая функция (3.4) является супераддитивной функцией.*

Доказательство. Проверим выполнение свойства (2.1) для характеристической функции (3.4).

Рассмотрим $V^{\zeta}(S, x_0, T - t_0) = \inf\limits_{u_j,\ j \in N \setminus S} \sum\limits_{i \in S} H_i(x_0, \bar{u}_S, u_j),\ S \subset N$, где $S = S_1 \cup S_2$, т.ч. $S_1, S_2 \subset N,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

По определению

$$V^{\zeta}(S_1 \cup S_2, x_0, T - t_0) = \inf_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus(S_1\cup S_2)}} \sum_{i\in(S_1\cup S_2)} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u_j) =$$

$$= \inf_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus(S_1\cup S_2)}} \left(\sum_{i\in S_1} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u_j) + \sum_{i\in S_2} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u_j) \right).$$

Очевидно, что инфимум суммы двух функций не меньше суммы инфимумов этих функций. Кроме того, если множество управлений, по которым берется инфимум, расширить, то результат может только уменьшиться. Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
&V^{\zeta}(S_1 \cup S_2, x_0, T - t_0) = \\
&= \inf_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus(S_1\cup S_2)}} \left(\sum_{i\in S_1} H_i(x_0, \bar{u}_{((S_1\cup S_2)}, u_j) + \sum_{i\in S_2} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u_j) \right) \geq \\
&\geq \inf_{\substack{u'_j \in U_j,\\ j\in N\setminus(S_1\cup S_2)}} \sum_{i\in S_1} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u'_j) + \\
&+ \inf_{\substack{u''_j \in U_j,\\ j\in N\setminus(S_1\cup S_2)}} \sum_{i\in S_2} H_i(x_0, \bar{u}_{(S_1\cup S_2)}, u''_j) \geq \\
&\geq \inf_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus S_1}} \sum_{i\in S_1} H_i(x_0, \bar{u}_{S_1}, u_j) + \inf_{\substack{u_j,\\ j\in N\setminus S_2}} \sum_{i\in S_2} H_i(x_0, \bar{u}_{S_2}, u_j) = \\
&\qquad = V^{\zeta}(S_1, x_0, T - t_0) + V^{\zeta}(S_2, x_0, T - t_0).
\end{aligned}$$

Очевидно, что для коалиций $S = \emptyset$, $S = N$ свойство супераддитивности выполнено тривиальным образом. Тогда

$$V^{\zeta}(x_0, S_1 \cup S_2) \geq V^{\zeta}(x_0, S_1) + V^{\zeta}(x_0, S_2), \ \forall S_1, S_2 \subseteq N, \ S_1 \cap S_2 = \emptyset. \qquad \square$$

3.2. Сравнение с существующими подходами

Итак, проведем сравнительный анализ существующих классов α-, δ-характеристических функций и новой характеристической функции (3.4).

В классическом «максиминном» подходе Неймана-Моргенштерна [16] α-характеристическая функция строится на основе вспомогательной антагонистической игры между коалициями K и $N \setminus K$ (см. рис. 1 a)).

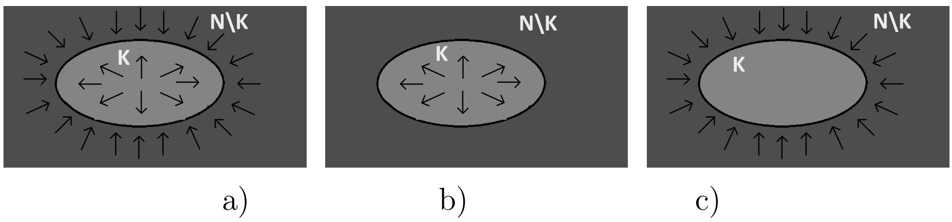

Рисунок 1. К построению a) α-х.ф., b) δ-х.ф., c) ζ-х.ф.

В подходе Петросяна-Заккура [18], основанном на равновесии по Нэшу δ-характеристическая функция строится в два этапа: сначала находим равновесие по Нэшу, затем «замораживаем» равновесные по Нэшу стратегии для игроков из множества $N \setminus K$, а для игроков из коалиции K находим максимум их суммарного выигрыша (см. рис. 1 b)).

В новом подходе ζ-характеристической функции также используется двухэтапная процедура: на первом этапе находим n-набор оптимальных управлений, максимизирующий суммарный выигрыш всех n игроков; на втором этапе для игроков, входящих в коалицию K, используем полученные на первом этапе оптимальные управления, в то время как игроки из множества $N \setminus K$ минимизируют суммарный выигрыш игроков из коалиции K (см. рис. 1 c)).

Построенная ζ-характеристическая функция имеет следующие преимущества. Во-первых, характеристическая функция (3.4) удовлетворяет свойству супераддитивности (см. теорему 1) в отличие от δ-характеристической функции. Во-вторых, она может быть вычислена в два этапа с использованием выражений для оптимальных управлений, что существенно упрощает процесс вычислений по сравнению с построением α-характеристической функции. Отметим, что оптимальные управления, максимизирующие суммарный выигрыш игроков, существуют и могут быть вычислены для широкого класса игр при достаточно слабых ограничениях, а вопрос существования и единственности равновесия по Нэшу для данного класса характеристических функций не является столь существенным, как для класса δ-характеристических функций. Кроме того, заданная новым образом характеристическая функция может быть использована для игр с фиксированными коалиционными структурами, в которых на втором уровне кооперации возникают технические сложности с построением характеристических функций.

4. Пример 3

Рассмотрим пример игры, основанный на работах [4, 14], в котором характеристическую функцию удается построить всеми тремя приведенными выше способами.

В дифференциальной игре управления объемами вредных выбросов в атмосферу участвуют два игрока (страны, фирмы), $N = \{1, 2\}$. Под управлениями игроков понимаются $u_i \in [0; b_i]$, $i = 1, 2$ – объемы вредных выбросов. Задача решается в классе позиционных стратегий $u_i(t, x)$. Фазовой переменной, описывающей изменение состояния системы, является скалярная величина x, соответствующая общему объему загрязнений, $x \in R^1$.

Динамика изменения загрязнений имеет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} u_i(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Функция выигрыша игрока i, $i = 1, 2$:

$$K_i(0, x_0, u_1, u_2, u_3) = \int\limits_0^T (R_i(u_i(\tau)) - d_i x(\tau)) d\tau, \tag{4.1}$$

где

$$R_i(u_i(t)) = \left(b_i - \frac{1}{2}u_i\right) u_i.$$

Будем накладывать дополнительное ограничение на параметры игры: $b_i \geq d_s T$, где $d_s = d_1 + d_2$ (условие регулярности).

Оптимальные управления могут быть непосредственно найдены при помощи принципа максимума Понтрягина:

$$\bar{u}(t) = (b_1 - d_s(T - t), \quad b_2 - d_s(T - t))\,,$$

где $d_s = d_1 + d_2$. Условие регулярности гарантирует, что $u_i(t) \geq 0$ $\forall t \in [0, T]$.

Для полученных оптимальных управлений имеем значение максимального суммарного выигрыша обоих игроков:

$$V^{\alpha}(N, x_0, T - t_0) = V^{\delta}(N, x_0, T - t_0) = V^{\zeta}(N, x_0, T - t_0) = \tag{4.2}$$
$$= -d_s\,(T - t)\,x_0 + \frac{1}{6}\,(T - t_0)\left(2d_s^2(T - t_0)^2 - 3b_s d_s (T - t_0) + 3\tilde{b}_s\right),$$

где $b_s = b_1 + b_2$, $\tilde{b}_s = b_1^2 + b_2^2$.

Вычислим значение характеристической функции для случая одноэлементных коалиций. Очевидно, что для случая игры с двумя игроками задача имеет упрощенный вид. Для случая α-характеристической функции необходимо найти два максимина (игрок 1 как максимизирующий, игрок 2 как минимизирующий и наоборот), для случая δ-характеристической функции – равновесие по Нэшу и соответствующие этому равновесию выигрыши игроков, для случая ζ-характеристической функции найти минимум выигрыша игрока 2 (1) при использовании оптимального управления игроком 1 (2).

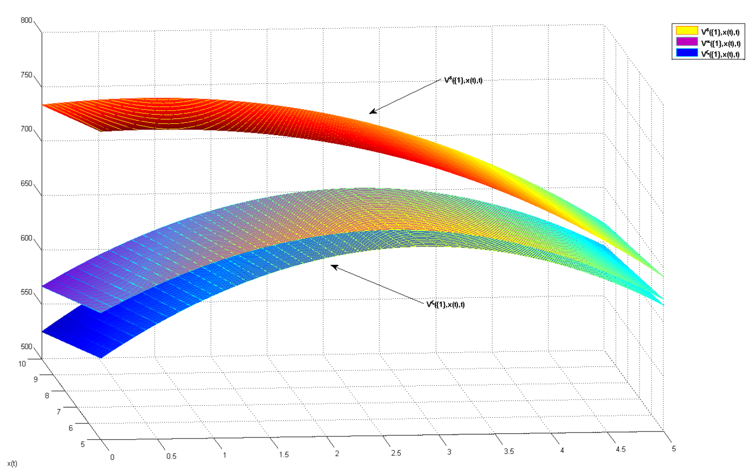

Рисунок 2. $V^{\alpha}(\{1\}, x_0, T - t_0)$, $V^{\delta}(\{1\}, x_0, T - t_0)$, $V^{\zeta}(\{1\}, x_0, T - t_0)$

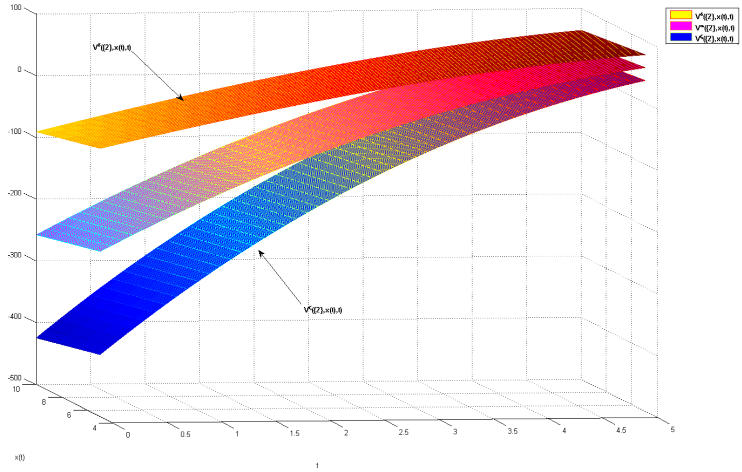

Рисунок 3. $V^{\alpha}(\{2\}, x_0, T-t_0)$, $V^{\delta}(\{2\}, x_0, T-t_0)$, $V^{\zeta}(\{2\}, x_0, T-t_0)$

Для данных классов линейно-квадратичных дифференциальных игр для всех α-, δ-, ζ-характеристических функций будем искать характеристическую функцию в виде $V(x,\cdot) = A(t)x + B(t)$ [12] как решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана:

$$\frac{\partial V(S,x,t)}{\partial t} + \max_{u_i}\left[\frac{\partial V(S,x,t)}{\partial x}\sum_{i=1}^{2} u_i(t) + R_i(u_i(\tau)) - d_i x(\tau)\right] = 0.$$

Получаем

$$V^{\alpha}(\{1\}, x_0, T-t_0) =$$
$$\frac{1}{6}\left(T-t_0\right)\left(d_1^2(T-t_0)^2 - 3b_s d_1(T-t_0) + 3{b_1}^2 - 6x_0 d_1\right),$$
$$V^{\delta}(\{1\}, x_0, T-t_0) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(T-t_0\right)\left((d_1^2 + 2d_2 d_1)(T-t_0)^2 - 3b_s d_1(T-t_0) + 3{b_1}^2 - 6x_0 d_1\right),$$
$$V^{\zeta}(\{1\}, x_0, T-t_0) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(T-t_0\right)\left((2d_1 d_s - d_s^2)(T-t_0)^2 - 3b_s d_1(T-t_0) + 3{b_1}^2 - 6x_0 d_1\right),$$

$$V^{\alpha}(\{2\}, x_0, T-t_0) =$$
$$\frac{1}{6}(T-t_0)\left(d_2^2(T-t_0)^2 - 3b_s d_2(T-t_0) + 3{b_2}^2 - 6x_0 d_2\right),$$
$$V^{\delta}(\{2\}, x_0, T-t_0) =$$
$$= \frac{1}{6}(T-t_0)\left((d_2^2 + 2d_1 d_2)(T-t_0)^2 - 3b_s d_2(T-t_0) + 3{b_2}^2 - 6x_0 d_2\right),$$
$$V^{\zeta}(\{2\}, x_0, T-t_0) =$$
$$= \frac{1}{6}(T-t_0)\left((2d_2 d_s - d_s^2)(T-t_0)^2 - 3b_s d_2(T-t_0) + 3{b_2}^2 - 6x_0 d_2\right).$$

Заметим, что в данном примере полученные значения характеристической функции для одноэлементных коалиций отличаются лишь коэффициентом перед $(T-t_0)^2$. Кроме того, на качественном уровне α-, δ-, ζ-характеристические функции ведут себя примерно одинаково.

Графическое изображение полученных результатов приведено на рис. 2, 3. Заметим, что для приведенного примера выполняется неравенство:
$$V^{\zeta}(\cdot) \le V^{\alpha}(\cdot) \le V^{\delta}(\cdot),$$
что требует дальнейшего анализа и обобщения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. М.: «Наука», 1985.

2. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Сильно динамически устойчивое кооперативное решение в одной дифференциальной игре управления вредными выбросами* // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 140–159.

3. Мазалов В.В. *Математическая теория игр и ее приложения.* СПб.: «Лань», 2010.

4. Петросян Л.А., Громова Е.В. *Двухуровневая кооперация в коалиционных дифференциальных играх* // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, вып. 3. С. 193–203.

5. Петросян Л.А., Данилов Н.А. *Устойчивые решения неантагонистических дифференциальных игр с транзитивными выигрышами* // Вестник ЛГУ. 1979. № 1. С. 46–54.

6. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб: БХВ-Петербург, 2012.

7. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. *Кооперативные игры: решения и аксиомы.* СПб.: Изд-во Европ. универс., 2004.

8. Bass F.M., Krishamoorthy A., Prasad A. and Sethi S.P. *Generic and brand advertising strategies in a dynamic duopoly* // Marketing Science. 2005. V. 24(4). P. 556–568.

9. Chander P. *The gamma-core and coalition formation* // International Journal of Game Theory. 2007. V. 35. P. 539–556.

10. Dockner E.J., Jorgensen S., van Long N. and Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science.* Cambridge University Press, 2000.

11. Engwerda J. *LQ dynamic optimization and differential games.* John Wiley & Sons, 2005.

12. Haurie A. et al. *Games and dynamic games.* World Scientific Books, 2012.

13. Jorgensen S., Gromova E. *Sustaining Cooperation in a Differential Game of Advertising Goodwill Accumulation* // submitted to EJOR, 2015

14. Kostyunin S., Palestini A. and Shevkoplyas E. *On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms* // SIAM Journal of Optimization Theory and Applications. 2014. V. 163, no. 2. P. 660–673.

15. Mazalov V., Rettieva A. *Fish wars with many players* // Int. Game Theory Rev. 2010. V. 12, no. 4. P. 385–405.

16. von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1953.

17. Ordeshook P.C. *Game theory and political theory: An introduction.* Cambridge University Press, 1986.

18. Petrosjan L., Zaccour G. *Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction* // J. of Economic Dynamics and Control. 2003. V. 27, no. 3. P. 381–398.

19. Reddy P.V., Zaccour G. *A friendly computable characteristic function.* GERAD Research Report G-2014-78.

20. Yeung D.W.K., Petrosjan L.A. *Cooperative stochastic differential games.* Springer Science & Business Media, 2006.

ON A APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF CHARACTERISTIC FUNCTION FOR COOPERATIVE DIFFERENTIAL GAMES

Ekaterina V. Gromova, Saint-Petersburg State University, Cand.Sc. (e.v.gromova@spbu.ru).
Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University, Dr.Sc., prof. (spbuoasis7@peterlink.ru).

Abstract: The paper presents a novel approach to the construction of characteristic functions for cooperative differential games. The characteristic function of coalition S is computed in two stages: first, optimal control strategies maximizing the total payoff of the players; next, the cooperative optimal strategies are used by the players from the coalition S while the left-out players from $N \setminus S$ use the strategies minimizing the total payoff of the players from S. The characteristic function defined in this way is superadditive. In addition, it possesses a number of other useful properties. To illustrate this result we compute characteristic function for a specific differential game of pollution control.

Keywords: cooperative games, characteristic function, differential games, superadditivity.