

УДК 519.9

ББК 22.18

ГАРАНТИРУЮЩИЕ СТРАТЕГИИ ДЛЯ БЕЗОПАСНОГО УКЛОНЕНИЯ ОТ ЗАХВАТА И ВЫХОДА ИЗ ОКРУЖЕНИЯ

ИГОРЬ И. ШЕВЧЕНКО*

ТИНРО-Центр

6900091, Владивосток, пер. Шевченко, 4

Дальневосточный федеральный университет

6900091, Владивосток, ул. Суханова, 8

e-mail: igor.shevchenko@tinro-center.ru

Рассматривается конфликтная ситуация, в которой перед быстрым убегающим E , окруженным на плоскости медленными преследователями из группы $P_{j_1, \dots, j_n} = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$, $n \geq 3$, стоит задача – выйти из окружения, оставаясь на расстоянии, не меньшем чем $r \geq 0$. Сначала оценивается минимальное гарантированное расстояние от E до одного из преследователей P_a , $a \in \{j_1, \dots, j_n\}$, на всевозможных прямолинейных движениях E . Далее с использованием полученных результатов рассчитываются гарантированные оценки до группы из двух преследователей $P_{b,c} = \{P_b, P_c\}$, $b, c \in \{j_1, \dots, j_n\}$, $b \neq c$, реализующиеся в процессе маневрирования, при котором E обязательно пересекает отрезок, соединяющий текущие положения преследователей, и состояние переходит в часть игрового пространства, где у E есть стратегия, при применении которой исключается уменьшение расстояния до любого из преследователей. Также описывается подход к анализу игр с группой

©2015 И.И. Шевченко

* Работа выполнена в рамках программы «Исследование игр преследования-уклонения с несколькими участниками».

P_{j_1, \dots, j_n} , $n \geq 3$, в которых E стремится выйти из окружения, проникнув между некоторыми двумя выбранными им преследователями P_b и P_c , и перейти в ту часть игрового пространства, где он может, двигаясь прямолинейно, увеличивать расстояние до всех преследователей. Сравнивая рассчитанные гарантированные расстояния с r для всевозможных вариантов выбора b и c и оставшихся назначений для $a \notin \{b, c\}$, можно найти наилучший из них, а также выделить предыстории игры, для которых возможен безопасный выход из окружения при применении сформированных стратегий уклонения.

Ключевые слова: максимизация минимального расстояния, безопасное проникновение между двумя преследователями, стратегии с памятью.

1. Введение

Возобновившийся интерес к решению конкретных игр со многими преследователями и/или убегающими связан с появлением подвижных автономных агентов и необходимостью формирования стратегий в конфликтных средах при различных информационных условиях, а также управлений для уклонения от столкновений или отслеживания заданной траектории [24, 29, 30]. К различным постановкам таких игр приводит, например, применение концепции гарантированного результата при моделировании конфликтных ситуаций, где одна из сторон использует искусственно организованную неполноту информации, например, запуск ложных целей [1, 18].

В классических постановках антагонистических дифференциальных игр двух лиц (см., например, [2, 8]) требуется построить функцию цены игры и определить соответствующие оптимальные стратегии игроков. В работах Л.С. Понтрягина и его коллег (см., например, [13]) рассмотрены также игры, в которых оцениваются наилучшие гарантированные результаты только для одной стороны.

Наличие нескольких преследователей и/или убегающих отражается на размерности игрового пространства, структуре областей достижимости, условиях окончания, функционалах качества, критериях оптимальности и т.д. Эти особенности зачастую делают невозможным напрямую использовать известные подходы из теории игр двух

лиц при анализе игр с несколькими преследователями/убегающими. Поэтому типичным в исследовании таких игр является подход, в рамках которого на основе тех или иных предположений строятся некоторые стратегии преследования/уклонения и для них оцениваются гарантированные результаты.

Различные постановки и результаты их исследований, ссылки на работы, посвященные исследованию дифференциальных игр преследования/уклонения со многими участниками, а также обзоры литературы по этой тематике могут быть найдены в [3–7, 10–12, 14, 16–21, 23–30].

Одним из способов формирования стратегий в играх со многими участниками является анализ всевозможных альтернатив для назначения ролей игроков, например, при распределении порядка захвата убегающих и выбор наилучшего варианта. На основе решений игр с фиксированными распределениями ролей, формируются более эффективные стратегии, если дополнительно исследовать устойчивость соотношения различных альтернатив вдоль соответствующих оптимальных траекторий. Для той части состояний, где исходная альтернатива может перестать быть самой предпочтительной в процессе развития игры, формулируются и исследуются вспомогательные игры [19, 28]. Эта процедура конструирования стратегий сходна с методом Айзекса [2], где решение может строиться комбинированием нескольких семейств характеристик основного уравнения.

Гладкие аппроксимации функций минимума и максимума могут быть использованы при генерировании локально градиентных стратегий в играх преследования-уклонения [27, 29], а также при формировании управлений для уклонения от столкновений или отслеживания заданной траектории [30].

Пусть по плоскости перемещаются убегающий E и группа преследователей $P_{j_1, \dots, j_n} = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$, $n \geq 3$. Определим расстояние от E до P_{j_1, \dots, j_n} равным минимальному из евклидовых расстояний от E до каждого P_{j_l} , $l = 1, \dots, n$. Пусть убегающий E окружен преследователями (находится внутри выпуклой оболочки множества исходных положений преследователей) и стремится избежать поимки – сближения с P_{j_1, \dots, j_n} до заданного расстояния $r \geq 0$. E может попытаться вырваться из окружения, перейдя в ту часть игрового пространства,

где у него имеется стратегия, которая гарантирует увеличение расстояние до всех убегающих. Для осуществления такого маневра E может потребоваться пересечь отрезок, соединяющий текущие позиции каких-то двух преследователей.

Игра безопасного проникновения одного убегающего E между двумя преследователями из группы $P_{1,2} = \{P_1, P_2\}$ для случая простых движений всех игроков была сформулирована и исследована в [23] на основе подхода Р. Айзекса [2]. Решение сводится к построению барьеров – гиперповерхностей в пространстве исходных состояний, для которых гарантированное минимальное расстояние равно заданной безопасной дистанции $r > 0$. При этом предполагается, что для исходных состояний на барьере при оптимальном противодействии обеих сторон все игроки сначала движутся прямолинейно до тех пор, пока убегающий E и один из преследователей, например, P_1 не сблизятся до расстояния r . Затем в течение некоторого конечного периода времени E и P_1 движутся вдоль кривых, сохраняя достигнутую дистанцию. Эти криволинейные движения гладко сопрягаются с предварительными и последующими прямолинейными движениями E и P_1 , а P_2 движется прямолинейно в течение всего периода игры. Последний раз минимальное расстояние от E до $P_{1,2}$ достигается в момент, когда евклидовы расстояния от E до P_1 и до P_2 на соответствующих движениях становятся равными r . В дальнейшем E может обеспечить расстояние до $P_{1,2}$, большее чем r . Траектории для исходных состояний на барьерах, где реализуется цена игры, строятся в обратном времени с использованием основного уравнения и его характеристик, начиная из состояний с равноудаленными на расстоянии r преследователями. Предполагается также, что все пространство игры можно заполнить «барьерными» траекториями, соответствующими всевозможным $r > 0$, а по этим траекториям можно восстанавливать оптимальные управления и конструировать позиционные стратегии.

Следует отметить, что на сингулярных поверхностях, которые являются частями решений из [23], соответствующие стратегии являются разрывными по вектору состояния. При оценке гарантированного результата для таких разрывных стратегий возможны несколько вариантов определения пучка соответствующих траекторий [8]. Так

обобщенные решения включают в себя траектории, которые соответствуют всему отрезку значений управляющих воздействий в точках разрыва. Таким образом, в число обобщенных входят решения, которые отличаются от «идеальных» движений, которые используются в рамках подхода Р. Айзекса [2]. Более реалистичным является класс конструктивных решений, который состоит из траекторий, которые являются пределами ломаных Эйлера, когда диаметр разбиения временной оси стремится к нулю, а управления в точках разрыва принимают только два крайних значения [8]. Поэтому оценки гарантированных результатов для этого класса решений могут существенно отличаться от оценок, полученных в [23]. Кроме того, класс позиционных стратегий, в рамках которого строятся стратегии игроков, должен быть заведомо расширен до класса стратегий с памятью (запоминанием траектории), так как E , выбирая управление, вынужден принимать во внимание не только текущее состояние, но и минимальное расстояние, до которого он уже сближался с $P_{1,2}$, а также помнить, пересек ли он отрезок, соединяющий некоторые текущие положения преследователей, в процессе развития игры или нет.

В данной работе считается, что игроки обладают простыми движениями на плоскости. Формулируются и исследуются две базовые задачи оценки гарантированного расстояния: до одного преследователя при заданном прямолинейном движении E и до двух преследователей, когда E пересекает отрезок, соединяющий их некоторые текущие положения. Результаты используются для формирования стратегий уклонения с памятью, для которых можно оценить гарантированные результаты. Полученные при решении базовых задач оценки позволяют также рассчитывать гарантированные расстояния до группы из нескольких преследователей для всех вариантов выбора пары преследователей, между которыми осуществляется выход из окружения, и выбрать наилучший из них.

В работах [6, 16, 21] рассмотрены задачи уклонения убегающего, который может маневрировать, не отклоняясь от значительно номинального движения вдоль фиксированного луча. Для простых движений показано, что использование стратегий уклонения, включающих движение по лучу и дугам логарифмических спиралей, позволяет убегающему избежать точечной встречи с любым числом пресе-

дователей на бесконечном интервале времени [6, 16]. Сконструированная стратегия является кусочно-программной. Для ее реализации требуется конечное число раз принять решение о выборе маневра. Получены также оценки минимального расстояния. В данной работе исследуется проблема максимизации минимального расстояния до преследователей за счет выбора лучей, вдоль которых осуществляется движение и на которых точечная встреча при $r > 0$ заведомо невозможна.

2. Постановки задач

Рассмотрим противодействие на плоскости убегающего E и группы преследователей $P_{j_1, \dots, j_n} = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$, $n > 0$. Пусть z_e, z_{j_l} – векторы состояния игроков, $z = (z_e, z_{j_1}, \dots, z_{j_n})$ – вектор состояния всей системы, Z – множество допустимых состояний. Определим расстояние ρ_{j_1, \dots, j_n} от E до P_{j_1, \dots, j_n} равным минимальному из евклидовых расстояний от E до преследователей из P_{j_1, \dots, j_n} :

$$\rho_{j_1, \dots, j_n}(z) = \min(\rho_{j_1}(z), \dots, \rho_{j_n}(z)),$$

где $\rho_{j_l}(z)$ – евклидово расстояние между E и P_{j_l} в соответствующем состоянии $z \in Z$, $l = 1, \dots, n$. P_{j_1, \dots, j_n} осуществляет r -поймку E в состоянии z , если $\rho_{j_1, \dots, j_n}(z) \leq r$, где $r \geq 0$ задано.

Пусть в начальный момент игры E окружен преследователями из группы P_{j_1, \dots, j_n} , то есть находится внутри выпуклой оболочки множества точек, в которых располагаются преследователи, и стремиться безопасно (избежав r -поймки) вырваться из окружения, применяя некоторую стратегию уклонения с памятью. Для этого ему достаточно, оставаясь на безопасном расстоянии от группы, пересечь отрезок, соединяющий положения некоторых двух преследователей, и перевести состояние в ту часть игрового пространства, где существует стратегия уклонения, которая гарантированно не позволяет ни одному из них уменьшать текущее расстояние.

Пусть уравнение

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u_e(t), u_{j_1, \dots, j_n}(t)), z(0) = z^0, \quad (2.1)$$

где $u_e(t) \in U_e$, $u_{j_1, \dots, j_n}(t) \in U_{j_1, \dots, j_n}$, $U_{j_1, \dots, j_n} = U_{j_1} \times \dots \times U_{j_n}$, $U_e, U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$ – конечномерные компакты, а функция $f : Z \times U_e \times U_{j_1, \dots, j_n} \rightarrow Z$ удо-

влетворяет стандартным требованиям, обеспечивающим существование, единственность и равномерную продолжимость решений для любого заданного начального вектора состояния $z^0 \in Z$. Оно описывает движения игроков и используется исключительно для того, чтобы по известной информации (предыстории, выбранным стратегиям, динамическим возможностям соперников и т.д.) сгенерировать траектории движения и оценить результат противодействия. В работе мы ограничимся рассмотрением только тех движений, которые являются пределами ломанных Эйлера при стремлении к нулю диаметра разбиения временной оси [8, 9].

Пусть $H^{[0,t]}$ – это множество непрерывных функций, которые содержатся в ограниченной области $\{z : z < ce^{kt}\}$, c, k – заданные положительные константы, $t \geq 0$. Стратегией уклонения с памятью назовем набор отображений S всевозможных пар, включающих момент $t \geq 0$ и историю $h^{[0,t]}(\cdot) = \{h(\tau) : \tau \in [0, t]\} \in H^{[0,t]}$, на множество допустимых управлений U_e . Отметим, что программная стратегия отображает начальное состояние в функцию времени, которая принимает значения в U_e . Позиционная стратегия по текущему состоянию z возвращает допустимое управление. Для этих типов стратегий будем считать, что игрок использует только часть информации, которая содержится в истории игры. Соответствующие им гарантированные результаты определяются аналогично; см., например, [8, 9].

Для заданного $t_0 \geq 0$, разбиения $\Delta = (t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots)$ части временной полуоси $[t_0, +\infty)$, $t_{k+1} > t_k$, $t_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \infty$, предыстории $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ и выбранной стратегии уклонения с памятью S обозначим через $Z(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta)$ совокупность непрерывных функций $z(t) : [0, \infty) \rightarrow Z$, для которых существуют абсолютно непрерывные сужения на $[0, \theta]$ для любого $\theta > 0$ и которые при почти всех $t \in [0, \theta]$ удовлетворяют системе

$$z(t) = h^{[0,t_0]}(t), \text{ если } t \in [0, t_0],$$

$$\dot{z}(t) \in \begin{cases} \text{co}\{f(z(t_0), S(t_0, h^{[0,t_0]}(\cdot)), u) : u \in U_{j_1, \dots, j_n}\}, \\ \text{если } t \in (t_0, t_1], \\ \text{co}\{f(z(t_1), S(t_1, h^{[0,t_1]}(\cdot)), u) : u \in U_{j_1, \dots, j_n}\}, \\ \text{если } t \in (t_1, t_2], \\ \dots \\ \text{co}\{f(z(t_k), S(t_k, h^{[0,t_k]}(\cdot)), u) : u \in U_{j_1, \dots, j_n}\}, \\ \text{если } t \in (t_k, t_{k+1}], \\ \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

где $h^{[0,t]}(\tau)$ совпадает с $h^{[0,t_0]}(\tau)$ при $\tau \in [0, t_0]$ и с $z(\tau)$ при $\tau \in [t_0, t_k]$, $k > 0$.

Пусть ρ в состоянии z характеризует близость E и P_{j_1, \dots, j_n} и определен критерий допустимости траекторий. Для заданных начальной истории $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ к моменту $t_0 \geq 0$, стратегии уклонения S с памятью, разбиения Δ и траектории $z(\cdot) \in Z(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta)$ максимизируемый E функционал платы \mathcal{P}_ρ рассчитывается как

$$\mathcal{P}_\rho(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta, z(\cdot)) = \begin{cases} \min(\min_{\tau \in [0, t_0]} \rho(h^{[0,t_0]}(\tau)), \min_{k \in \mathbb{N}} \rho(z(t_k))), \\ \text{если } z(\cdot) \text{ допустима,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Гарантированный результат для E при заданной начальной истории $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ и стратегии S оценивается как (см., например, [2, 3])

$$\mathcal{P}_\rho(h^{[0,t_0]}(\cdot), S) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0^+} \mathcal{P}_\rho(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta), \quad (2.4)$$

где $|\Delta| = \sup_{k \in \mathbb{N}} (t_{k+1} - t_k)$,

$$\mathcal{P}_\rho(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta) = \inf_{z(\cdot) \in Z(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta)} \mathcal{P}_\rho(h^{[0,t_0]}(\cdot), S, \Delta, z(\cdot)).$$

Наилучшей стратегией уклонения считается та, которая обеспечивает максимум (2.4) или значение, сколь угодно близкое к нему; см., например, [2, 3].

Прямое применение известных подходов к формированию наилучших стратегий уклонения и исследованию сформулированных задач в общей постановке, например, с использованием формализма уравнений типа Гамильтона–Якоби (см., например, [2, 15, 22]) не представляется возможным. Поэтому мы ограничимся конструированием некоторых конкретных стратегий уклонения с памятью и оценением гарантированных результатов для варианта простых движений всех игроков, когда координаты убегающего $z_e(t) \in \mathbb{R}^2$ и каждого преследователя $z_{j_l}(t) \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{z}_e(t) &= e(\psi(t)), \quad z_e(0) = z_e^0, \\ \dot{z}_{j_l}(t) &= \omega_{j_l} e(\varphi_{j_l}(t)), \quad z_{j_l}(0) = z_{j_l}^0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $t \geq 0$, $e(\alpha) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, $\psi(t), \varphi_{j_l}(t) \in \mathbb{R}$, $\omega_{j_l} \in (0, 1)$, z_e^0 и $z_{j_l}^0$ – начальные позиции, $l = 1, \dots, n$, $n > 0$.

Пусть задана предыстория. Первой базовой является задача оценки минимального расстояния до заданного преследователя, которое гарантируется убегающему при некотором выбранном прямолинейном движении. Вторая базовая задача состоит в выборе направления прямолинейного движения и определении минимального гарантированного расстояния до группы из двух заданных преследователей при маневрировании, в процессе которого убегающий пересекает отрезок, соединяющий некоторые текущие позиции преследователей.

В первой базовой задаче с одним преследователем P_a в качестве меры близости позиций игроков используется евклидово расстояние ρ_a и все траектории являются допустимыми. Во второй базовой задаче против группы $P_{b,c} = \{P_b, P_c\}$ роль расстояния от E до $P_{b,c}$ играет $\rho_{b,c}$ и траектория $z(\cdot)$ является (b, c) -допустимой, если E ровно один раз пересекает отрезок, соединяющий текущие положения P_b и P_c .

Формирование стратегий и выделение для них предысторий, для которых убегающему гарантируется безопасный выход из окружения при трех и более преследователях, может осуществляться на основе решений этих двух базовых задач. Так с применением полученных оценок на прямолинейных движениях можно получить стратегии с памятью и оценить соответствующие гарантированные расстояния до любой пары преследователей, проникая между которыми, E осуществляет выход из окружения, а также отследить минимальное

расстояние до всех остальных преследователей. Так в задаче оценки гарантированного расстояния при выходе E из окружения группой $P_{1,2,3} = \{P_1, P_2, P_3\}$ удаленность до $P_{1,2,3}$ характеризуется с помощью $\rho_{1,2,3}$. Траектория является $(1, 2, 3)$ -допустимой, если E располагается вне треугольника с вершинами в текущих положениях P_1 , P_2 и P_3 при $t > \tau_{1,2,3}$ для некоторого $\tau_{1,2,3} > 0$. У E имеется три альтернативы: он может пытаться выйти из окружения между $\{P_1, P_2\}$, $\{P_1, P_3\}$ и $\{P_2, P_3\}$, оценивая при этом гарантированное расстояние до P_3 , P_2 и P_1 соответственно.

3. E против P_a

Для того, чтобы на выбранном прямолинейном движении E оценить гарантированное расстояние до некоторого преследователя P_a , $a \in \{j_1, \dots, j_n\}$, воспользуемся системой координат, в которой при заданной истории $h^{[0,t]}(\cdot)$, $t \geq t_0$, начало совпадает с позицией E в момент $t = t_0$, а ось абсцисс направлена на позицию P_a в тот же момент. Пусть E при $t \geq t_0$ движется в верхнюю полуплоскость вдоль луча, который образует угол $\psi_a \in [0, \pi]$ с осью абсцисс, а P_a выбирает движение под некоторым углом $\varphi_a \in [0, 2\pi)$ для того, чтобы минимизировать минимальное расстояние до E вдоль соответствующих прямолинейных движений на промежутке времени $(-\infty, +\infty)$; см. рис. 1. Движения E в нижнюю полуплоскость при $\psi_a \in [-\pi, 0]$ и соответствующие им движения P_a под углом $\varphi_a \in [-2\pi, 0)$ анализируются аналогично с использованием симметричности траекторий относительно оси абсцисс.

Обозначим через d_a расстояние между E и P_a в состоянии $h^{[0,t]}(t_0)$, а через $\sigma_a(t, \psi_a, \varphi_a, d_a)$ расстояние между ними вдоль соответствующих прямолинейных движений в момент $t = t' - t_0$, $t' \in (-\infty, +\infty)$, $\psi_a \in [0, \pi]$, $\varphi_a \in [0, 2\pi)$. Как функция времени, σ_a^2 представляет собой параболу. Поэтому легко показать, что P_a , выбирая угол движения

$$\varphi_a^*(\psi_a) = \begin{cases} \pi - \arcsin \omega_a^{-1} \sin \psi_a, & \text{если } \psi_a \in [0, \psi_a^{(0)}], \\ \psi_a + \alpha_a, & \text{если } \psi_a \in (\psi_a^{(0)}, \pi], \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\alpha_a = \arccos \omega_a$, $\psi_a^{(0)} = \pi/2 - \alpha_a$, обеспечивает на соответствующих траекториях минимум по $\varphi_a \in [0, 2\pi]$ минимального по $t \in (-\infty, +\infty)$

значения σ_a , равный

$$\sigma_a^*(\psi_a, d_a) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_a \in [0, \psi_a^{(0)}], \\ d_a |\cos(\psi_a + \alpha_a)|, & \text{если } \psi_a \in (\psi_a^{(0)}, \pi], \end{cases} \quad (3.2)$$

который достигается в момент

$$\tau_a^*(\psi_a, d_a) = \begin{cases} d_a \omega_a^{-1} \sin \psi_a / \sin(\arcsin \omega_a^{-1} \sin \psi_a - \psi_a), \\ \text{если } \psi_a \in [0, \psi_a^{(0)}], \\ d_a \sin(\psi_a + \alpha_a) / \sin \alpha_a, & \text{если } \psi_a \in (\psi_a^{(0)}, \pi]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Пусть $t_0 \geq 0$ и $S_a^{t_0, \psi_a}$ – это стратегия, при которой E для любой предыстории $h^{[0, t]}(\cdot)$ к моменту $t \geq t_0$ выбирает движение вдоль луча, который определяется следующим образом: в системе координат, которая строится по состоянию $h^{[0, t]}(t_0)$ и в которой начало координат совпадает с позицией E в момент $t = t_0$, а ось абсцисс направлена на позицию P_a , он составляет угол $\psi_a \in [0, \pi]$ с осью абсцисс.

Утверждение 1. Пусть $t_0 \geq 0$, $h^{[0, t]}(\cdot)$ – это история к моменту $t \geq t_0$, $\psi_a^{(1)} = \pi - \alpha_a$ и в состоянии $h^{[0, t]}(t_0)$ расстояние от E до P_a равно d_a . Тогда

$$\mathcal{P}_{\rho_a}(h^{[0, t]}(\cdot), S_a^{t_0, \psi_a}) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\psi_a| \in [0, \psi_a^{(0)}], \\ \min(\min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_a(h^{[0, t]}(\tau)), \sigma_a^*(\psi_a, d_a)), \\ \text{если } |\psi_a| \in (\psi_a^{(0)}, \psi_a^{(1)}), \\ \min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_a(h^{[0, t]}(\tau)), & \text{если } |\psi_a| \in [\psi_a^{(1)}, \pi]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $\psi_a \in [0, \pi]$. При $\psi_a \in [0, \psi_a^{(0)}]$ P_a , выбирая в каждый момент $t = t_k \in [t_0, \tau_a^*)$ (см. (3.3)) движение к общей с E «точке прицеливания» $E\tau_a^*$, сможет совершить ε -встречу для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, если $|\Delta| \rightarrow 0+$.

При $\psi_a \in (\psi_a^{(0)}, \psi_a^{(1)})$ глобальный минимум σ_a по t достигается в момент $t = \tau_a^* \geq t_0$. Если P_a в каждый момент $t = t_k \in [t_0, \tau_a^*)$ выбирает движение в направлении $\varphi_a^* = \psi_a + \alpha_a$ к «точке прицеливания»

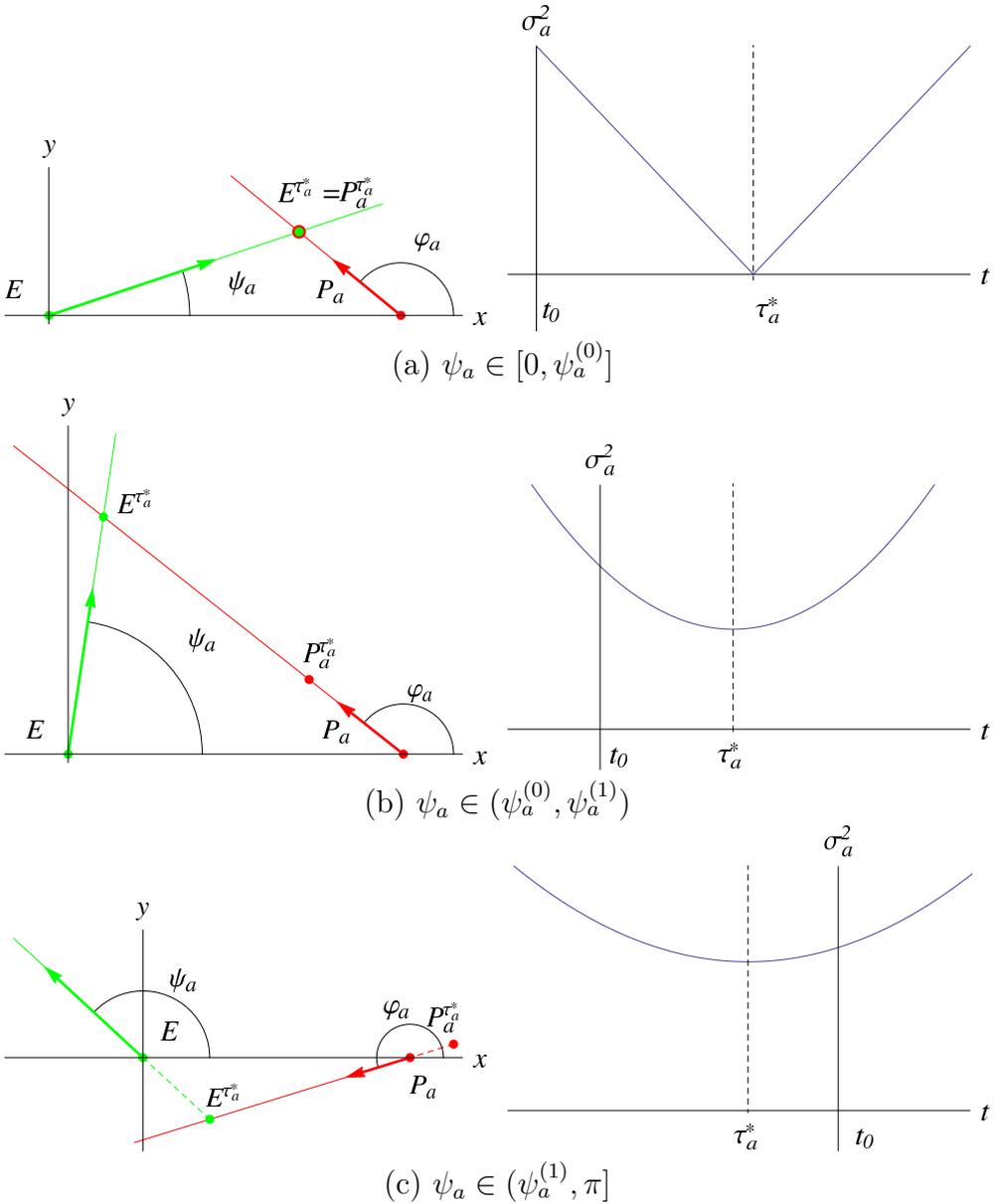


Рисунок 1. Траектории игроков, на которых реализуются гарантированные оценки в первой базовой задаче, и графики $\sigma_a^2(t, \psi_a, \varphi_a^*(\psi_a), d_a)$ при фиксированных ψ_a, d_a

$P_a^{\tau_a^*}$, то при $|\Delta| \rightarrow 0+$ в некоторый момент t_k , близкий к τ_a^* , он может оказаться на расстоянии, сколь угодно близком к σ_a^* . Продолжив движение при $t_k > \tau_a^*$ от своей «точки прицеливания» $E^{\tau_a^*}$, E не позволит P_a оказаться ближе при любом маневрировании.

Если $\psi_a \in (\psi_a^{(1)}, \pi]$, то $\tau_a^* < t_0$ и минимальное по $t \geq t_0$ расстояние достигается при $t = t_0$. Поэтому P_a ни при каком выборе управления при $t \geq t_0$ не может оказаться ближе к E . \square

Построенная стратегия $S_a^{t_0, \psi_a}$ предписывает E направление движения, определяемое «точкой прицеливания» $E^{\tau_a^*}$, которая рассчитывается в момент $t = t_0$ по предыстории; см. рис. 1. В свою очередь, P_a может обеспечить себе наилучший результат, лишь используя ту же самую «точка прицеливания» при $\psi_a \in [0, \psi_a^{(1)}]$. Если $\psi_a \in (\psi_a^{(1)}, \pi]$, то любое поведение P_a , включая движение к «точке прицеливания», не позволяет ему сократить начальное расстояние до E .

4. E против $P_{b,c}$

Будем предполагать, что игра начинается при $t = 0$ и затем на допустимых траекториях E должен ровно один раз пересечь отрезок, соединяющий текущие положения P_b и P_c , $b, c \in \{j_1, \dots, j_n\}, b \neq c$. Сформируем некоторые «разумные» стратегии уклонения с памятью и оценим для них гарантированные расстояния до $P_{b,c}$.

История игры $h^{[0,0]}(\cdot)$ представляет собой начальное состояние z^0 . Зафиксируем $t_0 \geq 0$ и воспользуемся редуцированным пространством, в котором при заданной истории $h^{[0,t]}(\cdot), t \geq t_0$, начало координат совпадает с позицией E в момент $t = t_0$, ось абсцисс направлена на позицию одного из двух преследователей P_b , а другой преследователь P_c располагается в верхней полуплоскости, если в соответствии с предысторией $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ E к моменту $t = t_0$ еще не пересек отрезок, соединявший текущие положения P_b и P_c , на отрицательной части оси абсцисс в момент его пересечения и в нижней/верхней полуплоскости после его пересечения. Таким образом, в момент $t = t_0$ состояние игры в зависимости от $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ описывается трехмерным вектором $(d_b, d_c, \gamma_{b,c})$, где d_b и d_c – расстояния от E до P_b и P_c , $d_b, d_c \geq 0$, $\gamma_{b,c} \in [0, 2\pi)$ – угол, под которым E «видны» P_b и P_c . При этом оси координат ориентированы так, чтобы $\gamma_{b,c} \in [0, \pi)$ до пересечения отрезка, соединяющего текущие положения P_b и P_c , $\gamma_{b,c} = \pi$ в момент

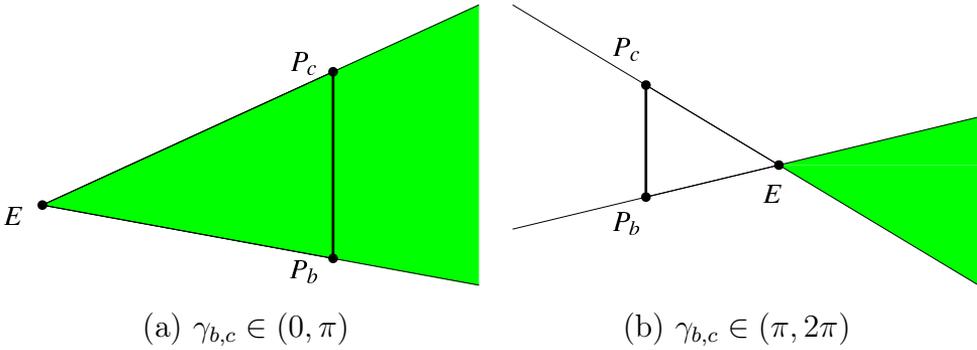


Рисунок 2. Допустимые направления движения E при фиксированном $\gamma_{b,c}$

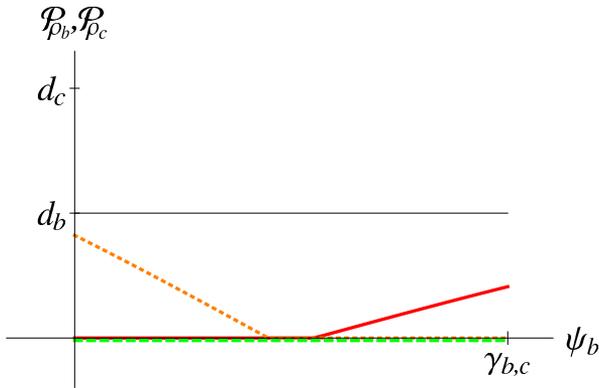
пересечения и $\gamma_{b,c} \in (0, 2\pi]$ после пересечения.

Пусть заданы $t_0 \geq 0$, $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ и $\psi_b \in (0, \gamma_{b,c})$. Если $\gamma_{b,c} \in (0, \pi)$ и E при $t \geq t_0$ движется под углом $\psi_b \in (0, \gamma_{b,c})$, то E обязательно пересечет отрезок, соединяющий положения P_b и P_c в момент t_0 . Если же $\psi_b \in (\pi, \pi + \gamma_{b,c})$, то пересечения заведомо не будет. Если $\gamma_{b,c} \in [\pi, 2\pi)$, то при движении под углом $\psi_b \in (\gamma_{b,c} - \pi, \pi)$ пересечение исключается; см. рис. 2. Поэтому ψ_b целесообразно выбирать из интервала $(0, \gamma_{b,c})$ до момента пересечения отрезка, соединяющего текущие положения P_b и P_c , и из $(\pi, \pi + \gamma_{b,c})$ или $\psi_b \in (\gamma_{b,c} - \pi, \pi)$ после этого момента в зависимости от реализовавшегося состояния.

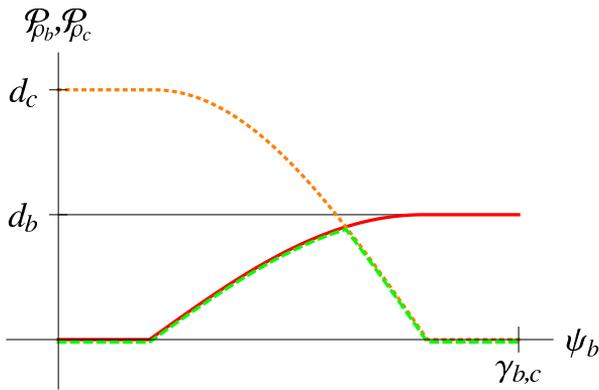
Пусть $S_{b,c}^{t_0, \psi_b}$ – это стратегия с памятью, при которой E в момент игры $t \geq t_0$ для истории $h^{[0,t]}(\cdot)$ выбирает движение вдоль луча, который в редуцированном пространстве, соответствующем состоянию $h^{[0,t]}(t_0)$, составляет угол $\psi_b \in [0, \pi)$ с направлением на P_b . При этом угол ψ_c с направлением на P_c вычисляется как

$$\psi_c(\psi_b, \gamma_{b,c}) = \begin{cases} -(\gamma_{b,c} - \psi_b), & \text{если } (\gamma_{b,c} - \psi_b) \in (0, \pi], \\ (\gamma_{b,c} - \psi_b) - 2\pi & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.1)$$

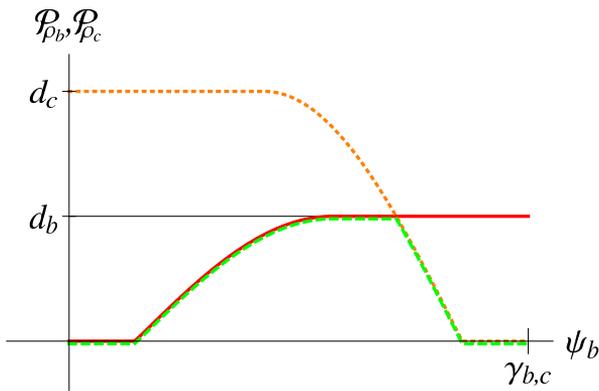
Таким образом, если E применяет стратегию $S_{b,c}^{t_0, \psi_b}$, то гарантированный результат соответствуют стратегии $S_b^{t_0, \psi_b}$ для P_b и $S_c^{t_0, \psi_c}$ при $\psi_c = \psi_c(\psi_b, \gamma_{b,c})$ (см. (4.1)) для P_c .



(a) $\gamma_{b,c} \in [0, \gamma_{b,c}^{(0)}]$



(b) $\gamma_{b,c} \in (\gamma_{b,c}^{(0)}, \gamma_{b,c}^{(1)})$



(c) $\gamma_{b,c} \in (\gamma_{b,c}^{(1)}, 2\pi)$

Рисунок 3. Гарантированные расстояния \mathcal{P}_{ρ_b} и \mathcal{P}_{ρ_c} для стратегии уклонения $S_{b,c}^{t_0, \psi_b}$ при различных ψ_b и $\gamma_{b,c}$

Утверждение 2. Пусть начальной истории $h^{[0,t_0]}(\cdot)$ соответствует вектор состояния $(d_b(t_0), d_c(t_0), \gamma_{b,c}(t_0))$, $d_b(t_0), d_c(t_0) > 0$, $\gamma_{b,c}(t_0) \in (0, 2\pi)$. Гарантированный результат $\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{t_0, \psi_b})$ при выборе им стратегии $S_{b,c}^{t_0, \psi_b}$ с параметром $\psi_b \in (0, \gamma_{a,b}(t_0))$ при любом $t \geq t_0$ может быть оценен как $\min(\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{t_0, \psi_b}), \mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c}))$, и в частности он равен

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } \psi_b \in (0, \psi_b^{(0)}] \text{ или } |\psi_c| \in (0, \psi_c^{(0)}], \\ \min(\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{t_0, \psi_b}), \min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_c(h^{[0,t]}(\tau))), \\ \text{если } \psi_b \in (\psi_b^{(0)}, \psi_b^{(1)}] \text{ и } |\psi_c| > \psi_c^{(1)}, \\ \min(\min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_b(h^{[0,t]}(\tau)), \mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c})), \\ \text{если } \psi_b > \psi_b^{(1)} \text{ и } |\psi_c| \in (\psi_c^{(0)}, \psi_c^{(1)}], \\ \min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_{b,c}(h^{[0,t]}(\tau)), \text{ если } \psi_b > \psi_b^{(1)} \text{ и } |\psi_c| > \psi_c^{(1)}, \end{array} \right.$$

где $\psi_c = \psi_c(\psi_b, \gamma_{b,c})$ (см. (4.1)).

Доказательство. Действительно, E гарантирует минимальное расстояние $\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{t_0, \psi_b})$ до P_b и $\mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c})$ до P_c . Следовательно, гарантированное расстояние до $P_{b,c}$ будет всегда равно их минимуму. При этом, если хотя бы один из углов ψ_b или $|\psi_c|$ достаточно мал (первое условие), то E не может избежать точечной встречи с $P_{b,c}$. Кроме того, если кто-нибудь из преследователей P_b или P_c может сократить расстояние до E с момента $t = t_0$ (второе и третье условие), то нужно рассчитать гарантированное значение и сравнить с уже достигнутым для заданной предыстории. Если же ψ_b или $|\psi_c|$ достаточно велики и ни один из преследователей не может обеспечить сближение при $t \geq t_0$ (четвертое условие), то минимальное расстояние определяется исключительно по предыстории. \square

Рассмотрим задачу выбора значения параметра $\psi_b \in (0, \gamma_{b,c})$ стратегии $S_{b,c}^{t_0, \psi_b}$, при котором на промежутке $t \in [0, +\infty)$ максимизируется минимальное гарантированное расстояние от E до $P_{b,c}$. На рис. 3 изображены примеры зависимостей гарантированных расстояний до преследователей от ψ_b для исходного состояния $d_b(t_0), d_c(t_0), \gamma_{b,c}(t_0)$ при $\gamma_{b,c}(t_0)$ из различных диапазонов. Пунктиром дан минимум из \mathcal{P}_{ρ_b} и \mathcal{P}_{ρ_c} . Для вариантов, приведенных на рис. 3 (а) и (с), выбор

оптимального значения ψ_b не является однозначным: для (а) гарантированный результат вообще не зависит от выбора ψ_b , а для (с) оптимальное значение достигается на всех ψ_b из соответствующего отрезка. Только для варианта на рис. 3 (b) максимуму соответствует единственное значение ψ_b .

Утверждение 3. Пусть $t_0 \geq 0$ и $h^{[0,t]}(\cdot)$ – это история к моменту $t \geq t_0$ и $(d_b(t_0), d_c(t_0), \gamma_{b,c}(t_0))$ – это редуцированные координаты в состоянии $h^{[0,t]}(t_0)$ и $\gamma_{b,c}(t_0) \in (\gamma_{b,c}^{(0)}, \gamma_{b,c}^{(1)})$, где

$$\begin{aligned} \gamma_{b,c}^{(0)} &= \psi_b^{(0)} + \psi_c^{(0)}, \\ \gamma_{b,c}^{(1)} &= \psi_b^{(1)} + \psi_c^{(1)} - \arccos \min(d_b(t_0), d_c(t_0)) / \max(d_b(t_0), d_c(t_0)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть также

$$\begin{aligned} d_b(t_0) &= \min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_b(h^{[0,t_0]}(\tau)), \\ d_c(t_0) &= \min_{\tau \in [0, t_0]} \rho_c(h^{[0,t_0]}(\tau)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Существует единственное значение $\psi_b = \psi_b^-(t_0) \in (0, \gamma_{bc})$, при котором достигается

$$\max_{\psi_b \in (0, \gamma_{b,c})} \min(\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_b^{t_0, \psi_b}), \mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c})), \quad (4.4)$$

и для него выполняется условие

$$\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_b^{t_0, \psi_b^-(t_0)}) = \mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c^-(t_0)}) < \min(d_b(t_0), d_c(t_0)), \quad (4.5)$$

где $\psi_c^-(t_0) = \psi_c(\psi_b^-(t_0), \gamma_{b,c}(t_0))$; см. (4.1).

Доказательство. Функции $\mathcal{P}_{\rho_b}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_b^{t_0, \psi_b})$ и $\mathcal{P}_{\rho_c}(h^{[0,t_0]}(\cdot), S_c^{t_0, \psi_c})$, которые описывают гарантированные значения расстояний до преследователей при $t \geq t_0$, являются соответственно монотонно неубывающей и невозрастающей по ψ_b при $\psi_b \in (\psi_b^{(0)}, \psi_b^{(1)})$ и $|\psi_c| \in (\psi_c^{(0)}, \psi_c^{(1)})$. При $\gamma_{b,c}(t_0) > \gamma_{b,c}^{(0)}$ максимальное значение их минимума достигается при значении угла $\psi_b = \psi_b^-(t_0)$, которое соответствует точке пересечения; см. рис. 3 (b). Эта точка пересечения определяет значение гарантированного расстояния, меньшее чем $\min(d_b(t_0), d_c(t_0))$, если $d_b(t_0)|\cos(\psi_b^* + \alpha_b)| < d_c(t_0)$ и $d_c(t_0)|\cos(\psi_c^* + \alpha_c)| < d_b(t_0)$. А эти условия выполняются, если $\gamma_{b,c}(t_0) < \gamma_{b,c}^{(1)}$. \square

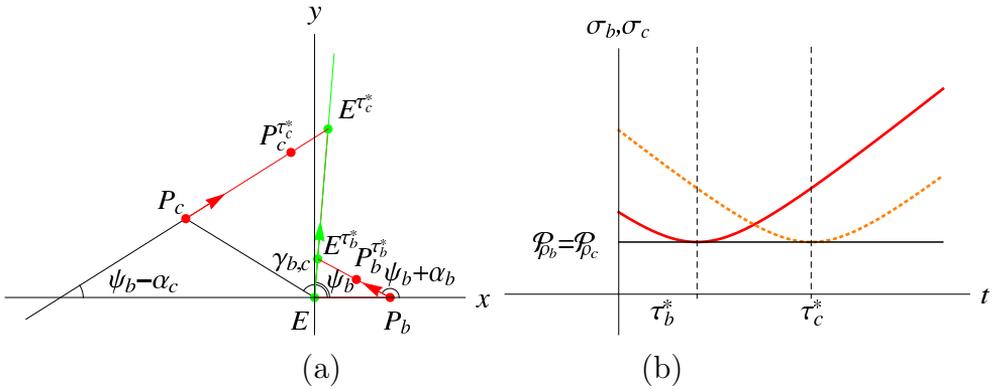


Рисунок 4. Пример траекторий (а) и график изменения квадратов расстояний до преследователей (б)

На рис. 4 показаны траектории и изменение расстояний до преследователей при применении стратегии уклонения $S_{b,c}^{0,\psi_b^-}$ и оптимальном противодействии со стороны преследователей. В моменты $t = \tau_b^*$ и $t = \tau_c^*$ достигается минимум расстояния до P_b и P_c , равный $\mathcal{P}_{\rho_{b,c}}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{0,\psi_b^-}(0))$.

Определим стратегию уклонения с памятью $S_{b,c}^*$, которая для исходных состояний с $\gamma_{b,c}(0) \in (\gamma_{b,c}^{(0)}, \gamma_{b,c}^{(1)})$ гарантирует значение платы, равное $\mathcal{P}_{\rho_{b,c}}(h^{[0,t]}(\cdot), S_{b,c}^{0,\psi_b^-}(0))$, а в случае, если преследователи отклонятся от оптимального противодействия, позволит его улучшить. При этом конкретизируем выбор ψ_b в зависимости от истории игры там, где он неоднозначен, таким образом, чтобы прямолинейные траектории для исходных состояний играли роль, аналогичную характеристическим траекториям основного уравнения в позиционных играх; см., например, [1]. Для истории $h^{[0,t]}(\cdot)$ управление E в соответствии со стратегией $S_{b,c}^*$ вырабатывается следующим образом. Вычисляется вектор состояния $(d_b(t), d_c(t), \gamma_{b,c}(t))$. Выбирается $\psi_b = \psi_b^*(t)$ и применяется стратегия $S_{b,c}^{t,\psi_b^*(t)}$. При этом если $\gamma_{b,c}(t) \in [0, \gamma_{b,c}^{(0)})$, то $\psi_b^*(t) = \gamma_{b,c}^{(0)}/2$. Если $\gamma_{b,c}(t) \in (\gamma_{b,c}^{(0)}, \gamma_{b,c}^{(1)}(t))$, то $\psi_b^*(t) = \psi_b^-(t)$. И наконец, если $\gamma_{b,c}(t) \in (\gamma_{b,c}^{(1)}(t), 2\pi)$, то $\psi_b^*(t)$ удовлетворяет условию $d_b(t)|\cos(\psi_b^*(t) + \alpha_b)| = d_c(t)|\cos(\psi_c^*(t) + \alpha_c)|$, где $\psi_c^*(t) = \psi_c(\psi_b^*(t), \gamma_{b,c}(t))$; см. (4.1).

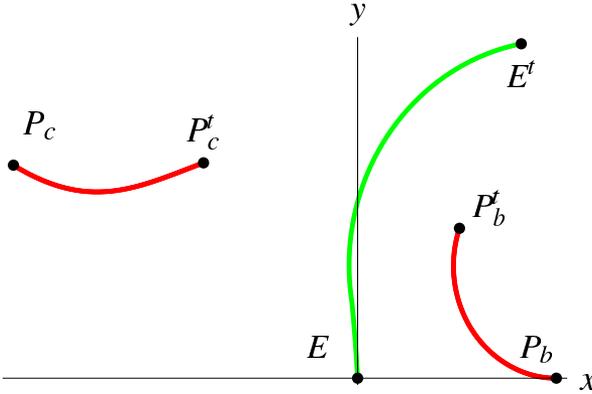


Рисунок 5. Фрагмент траекторий при использовании стратегии уклонения S_{bc}^* и простейшей стратегии преследования обоими преследователями

Для заданных $t_0 \geq 0$, разбиения Δ части временной полуоси $t \geq t_0$, предыстории $h^{[0,t_k]}(\cdot)$ и выбранной стратегии уклонения с памятью $S_{b,c}^*$ проанализируем изменение гарантированного значения платы на отрезке $(t_k, t_{k+1}]$. E в соответствии со стратегией S_{bc}^* выбирает на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ постоянное направление движения в зависимости от редуцированных координат для состояния $h^{[0,t_k]}(t_k)$. Всевозможные истории $h^{[0,t_{k+1}]}(\cdot)$ получаются из $h^{[0,t_k]}(\cdot)$ «конкатенацией» движения E , соответствующего стратегии $S_{b,c}^*$, и всевозможных прямолинейных движений преследователей при $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Для всех вариантов выполняется свойство $\mathcal{P}_{\rho_{b,c}}(h^{[0,t_{k+1}]}(\cdot), S_{b,c}^*) \geq \mathcal{P}_{\rho_{b,c}}(h^{[0,t_k]}(\cdot), S_{b,c}^*)$.

На рис. 5 показаны начальные части траекторий, которые реализуются в случае, когда E использует S_{bc}^* , а каждый из P_b и P_c – простейшую стратегию преследования; $w_b = w_c = 0.5$, $d_b = 1$, $d_c = 2$, $\gamma_{b,c} = 2.61799$, $\mathcal{P}_{\rho_{b,c}} = 0.894427$, $\min(\mathcal{P}_{\rho_b}, \mathcal{P}_{\rho_c}) = 0.913467$.

4.1. Усовершенствованная стратегия уклонения

Очевидно, что описанная стратегия проникновения между двумя преследователями является слишком «прямолинейной». E может попытаться не допустить дальнейшего сближения с $P_{b,c}$, меняя направление своего движения после того, как реализовалось минимальное расстояние до P_b .

Предположим, что в начальный момент игры расстояние до P_b равно d_b и E выбрал движение под некоторым углом ψ_b к направлению на P_b ; см. рис. 1. Далее с момента $t = \tau_b^{(1)} = \tau_b^*(d_b, \psi_b)$ (3.3), когда реализовалось минимальное расстояние $\sigma_b^*(\psi_b, d_b)$ до $P_{b,c}$, E , не позволяя P_b сокращать его, стремится максимизировать текущее расстояние до P_c , двигаясь по криволинейной траектории вплоть до момента $t = \tau_b^{(2)}$, когда он переходит на прямолинейное движение, которое сохраняет гарантированное минимальное расстояние до $P_{b,c}$. Это обеспечивает минимальное гарантированное расстояние до $P_{b,c}$, равное $\sigma_b^*(\psi_b, d_b)$. Выбирая теперь наилучший допустимый угол $\psi_b^{(1)} \in (0, \gamma_{b,c})$ из условия $\psi_b^{(1)} = \arg \max \sigma_b^*(\psi_b, d_b)$, можно оценить минимальное гарантированное расстояние на весь период игры.

Построим стратегию уклонения для второго этапа в рамках описанной схемы. Выберем в момент $t = \tau_b^{(1)}$ редуцированную систему координат, в которой P находится в начале координат, E – на положительной части оси абсцисс, а E_c – на плоскости на расстоянии большем, чем до P_b .

Если в каждый момент $t \geq \tau_b^{(1)}$ E осуществляет движение под углом ψ_b к направлению от текущего положения P_b в течение промежутка времени $\delta t > 0$ и

$$|\cos \psi_b| = w_b, \quad (4.6)$$

то при $\delta t \rightarrow 0$ предельное расстояние между E и P_b будет равно $d_b(\tau_b^{(1)})$ и это значение будет достигаться только для случая, когда P_b будет двигаться к текущему положению E . Поэтому пусть при любой предыстории E выбирает направление, которое в редуцированной системе координат определяется углом, удовлетворяющим условию (4.6), и при котором локально максимизируется расстояние до P_c . Пусть $z_e(t), z_b(t), z_c(t)$ – координаты игроков в фиксированной системе координат. Траектории E и P_b при выборе ими направлений движения описанным выше способом являются решениями дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}_e(t) &= e(\theta_b(z_e(t), z_b(t)) + \alpha_b), \\ \dot{z}_b(t) &= w_b e(\theta_b(z_e(t), z_b(t))) \end{aligned} \quad (4.7)$$

с начальными условиями

$$z_e(0) = 0e(0), z_b(0) = d_b e(0), \quad (4.8)$$

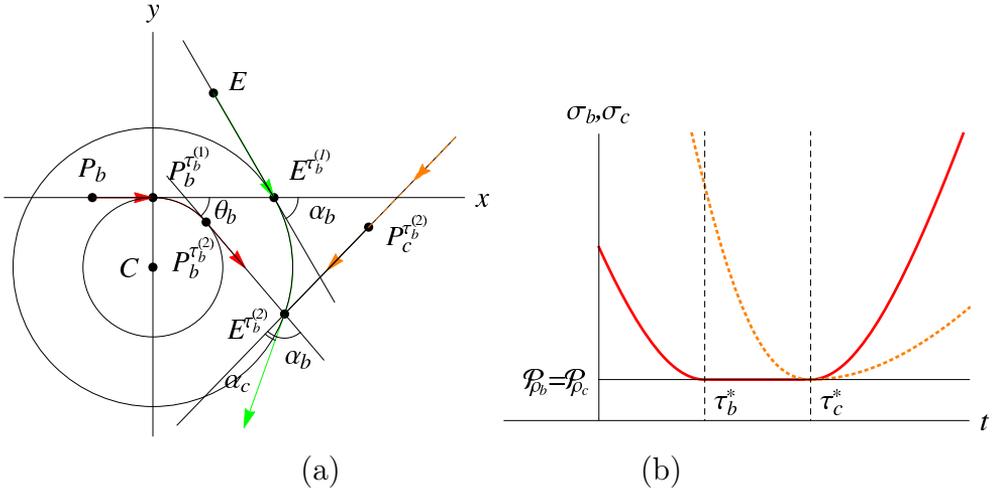


Рисунок 6. Пример траекторий (а) и график изменения расстояний до преследователей (б) для усовершенствованной стратегии уклонения

где $\theta(z_e, z_b)$ – это угол, который образует вектор $(z_e - z_b)$ с осью абсцисс.

Уравнение (4.7) с начальными условиями (4.8) имеет в качестве одного из решений следующие функции

$$\begin{aligned} z_e(t) &= z^* + r_e e^{(\pi/2 - \nu_e t - \alpha_b)}, \\ z_b(t) &= z^* + r_b e^{(\pi/2 - \nu_b t)}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $r_e = d_b \operatorname{ctg} \alpha_b$, $\nu_e = 1/r_e$, $r_b = d_b / \sin \alpha_b$, $\nu_b = w_b / r_b$, $z^* = r_b e^{-\pi/2}$. В соответствии с (4.9) E и P_b движутся вдоль окружностей с общим центром в z^* . При этом считаем, что P_c , минимизируя расстояние до E , выбирает движение вдоль некоторой прямой.

На рис. 6 показаны траектории и изменение расстояний до преследователей при применении описанной стратегии уклонения и соответствующем противодействии со стороны преследователей (ср. с рис. 4). На интервале от $t = \tau_b^{(1)}$ до расстояния до P_b не меняется. С момента $t = \tau_b^{(2)}$ E гарантированно увеличивает расстояние до P_b, c .

Структура траекторий в этом случае схожа с вариантом, описанным в [22], но управления непрерывно зависят от предыстории и фокальная поверхность отсутствует. Отметим, что требуются допол-

нительные исследования для того, чтобы определить гарантирующие свойства усовершенствованной стратегии.

5. E против P_{j_1, \dots, j_n} , $n \geq 3$

При формировании стратегий уклонения и оценивании гарантированных результатов для трех или более преследователей можно воспользоваться альтернативным характером игр [17, 18, 27]. Для этого с использованием решений для двух базовых игр E требуется оценить гарантированный результат для стратегий, направленных на проникновение между всеми возможными парами преследователей, и для каждого такого варианта выбора конкретной пары отследить минимальное гарантированное расстояние до всех остальных преследователей в процессе маневрирования, а затем выбрать наилучший из всех доступных вариантов на весь период игры; см., например, результаты исследования игры сближения одного преследователя с группой убегающих до минимального расстояния [18].

Таблица 1. Оценка альтернатив

b	c	d_b	d_c	$\gamma_{b,c}$	$\mathcal{P}_{b,c}$	a	d_a	\mathcal{P}_a
1	2	1.4	1.5	2.09440	0.647592	3	1.6	1.59771
1	3	1.4	1.6	2.64159	0.714307	2	1.5	1.5
2	3	1.5	1.6	1.54720	0.	1	1.4	1.4

На рис. 7 показаны направления движения игроков для различных вариантов выбора ролей преследователей, а в табл. 1 представлены результаты расчетов, $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.6$, $w_3 = 0.9$. Поскольку для альтернативы $b = 1, c = 3$ и $a = 2$ гарантированный результат является наибольшим, E предпочтительней проникать между P_1 и P_3 . При этом он может безопасно вырваться из окружения, если, например, $r = 0.7$.

6. Заключение

В работе сконструированы стратегии уклонения, которые предназначены для уклонения от захвата и проникновения между двумя преследователями, и для них получены оценки гарантированных результатов. Базовые задачи, решения которых используются при

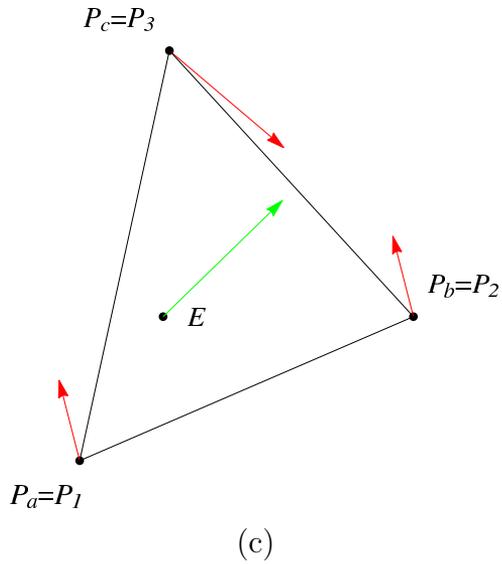
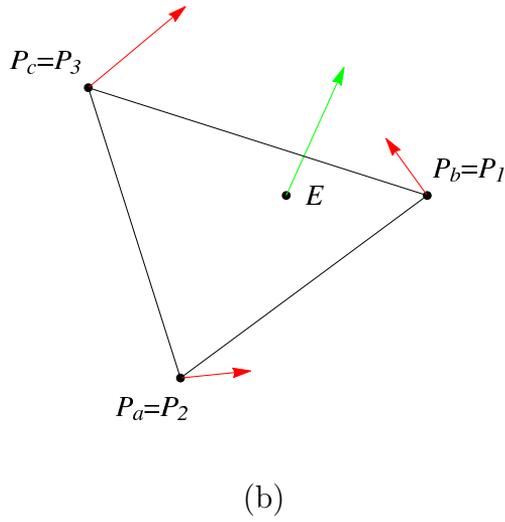
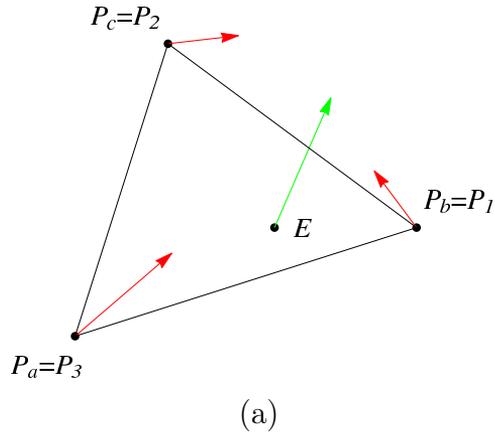


Рисунок 7. Направления движения игроков для различных вариантов выбора ролей председателей в преобразовании

формировании законов управления, формулируются для случая прямолинейных движений убегающего. Оценки вдоль прямолинейных траекторий использованы также при построении усовершенствованной стратегии для проникновения между двумя преследователями. На первом этапе она включает прямолинейное движение до момента, когда реализуется минимальное расстояние до одного из преследователей. На втором этапе, осуществляя криволинейное движение, убегающий удерживает минимальную дистанцию до этого преследователя. В момент, когда первый раз реализуется предыстория, для которой он может увеличивать расстояние до обоих преследователей сразу на прямолинейном движении, он переключается на него. Структура траекторий в этом случае схожа с вариантом, описанным в [23], но фокальная поверхность отсутствует.

В задаче выхода из окружения у убегающего имеется несколько альтернатив. Оценив каждую из них, он может выбрать наилучшую на весь период игры. Для построения стратегии уклонения на случай выбора альтернативы в зависимости от истории игры требуется проводить дополнительные исследования, включающие проверку устойчивости альтернатив вдоль соответствующих оптимальных траекторий; см., например, [19, 28].

Полученные результаты могут быть использованы при анализе противодействия неголономных агентов; см., например, [24, 27, 29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамянц Т. Г., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я. *Управление подвижными объектами в условиях искусственно организованной неполноты информации* // Проблемы управления. 2005. № 4. С. 75—81.
2. Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир, 1967.
3. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения*. М.: Советское радио, 1980.
4. Григоренко Н.Л. *Дифференциальные игры преследования несколькими объектами*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

5. Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами*. М: Изд-во Московского ун-та, 1990.
6. Зак В.Л. *Задача уклонения от многих преследователей при наличии фазового ограничения* // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 5. С. 1051–1053.
7. Ибрагимов Г.И. *Об одной задаче оптимального преследования несколькими объектами одного* // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 187–192.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
9. Красовский Н. Н., Котельникова А. Н. *Унификация дифференциальных игр, обобщенные решения уравнений типа Гамильтона–Якоби, стохастический поводыр* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1618–1633.
10. Кумков С. С., Пацко В. С., Ле Менек С. *Два слабых преследователя в игре против одного убегающего* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 73–96.
11. Петров Н.Н. *Теория игр*. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997.
12. Петросян Л.А., Томский Г.В. *Геометрия простого преследования*. М.: Наука, 1983.
13. Понтрягин Л.С. *Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 169. С. 119–158.
14. Пшеничный Б.Н. *Простое преследование несколькими объектами* // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
15. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы аналитической оптимизации*. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

16. Черноусько Ф.Л. *Одна задача уклонения от многих преследователей* // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 1. С. 14–24.
17. Чикрий А.А. *Конфликтно-управляемые процессы*. Киев: Наукова Думка, 1992.
18. Шевченко И.И. *Гарантированное сближение с дальним из убегающих* // Автоматика и телемеханика. 2008. № 5. С. 101–119.
19. Шевченко И.И. *Формирование гарантирующих стратегий альтернативного преследования с памятью* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 4. С. 114–128
20. Basar T., Olsder G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. SIAM, 1999.
21. Chernousko F. L., Zak V.L. *On differential games of evasion from many pursuers* // JOTA. 1985. V. 46, no. 4. P. 461–470.
22. Crandall M.G., Lions P.L. *Viscosity solution of Hamilton–Jacobi equations* // Trans. Am. Math. Soc. 1983. V. 277, no. 1. P. 1–42.
23. Hagedorn P., Breakwell J.V. *A differential game with two pursuers and one evader* // JOTA. 1976. V. 18, no. 1. P. 15–29.
24. Mastellone S., Stipanović D. M., Graunke C. R., Intlekofer K. A., Spong M. W. *Formation control and collision avoidance for multi-agent nonholonomic systems: theory and experiments* // International Journal of Robotics Research. 2008. V. 13. P. 107–126.
25. Petrosjan L. A. *Differential games of pursuit* // Series on Optimization. V. 2. Singapore: World Scientific, 1993.
26. *Pursuit-Evasion Differential Games* // A volume in International Series in Modern Applied Mathematics and Computer Science. Yavin Y., Pachter M. (Eds.). Elsevier, 1987.
27. Shevchenko I. *Locally optimizing strategies for approaching the furthest evader* // Contributions to game theory and management. 2012. V. 5. P. 293–303.

28. Shevchenko I. *On reduction of alternative pursuit games* // Game Theory and Applications. 2007. V. 11. P. 125–137.
29. Stipanović D., Melikyan A., Hovakimyan N. *Some sufficient conditions for multi-player pursuit-evasion games with continuous and discrete observations* // Annals of the International Society of Dynamic Games. 2009. V. 10. P. 133–145.
30. Stipanović D. M., Tomlin C. J., Leitmann G. *Monotone approximations of minimum and maximum functions and multi-objective problems* // Applied Mathematics & Optimization. 2012. V. 66. N 3. P. 455–473.

GUARANTEED ESCAPING STRATEGIES

Igor I. Shevchenko, TINRO-Center, Far East Federal University, associate professor (igor@tinro.ru).

Abstract: To generate evasion strategies and evaluate corresponding guaranteed miss distances from E to $\mathcal{P}_{j_1, \dots, j_n} = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$, $n \geq 3$, we set up two basic problems for the players with simple motions. In the first one, E maximizes the miss distance to $P_a \in \mathcal{P}_{j_1, \dots, j_n}$ when she moves along a given straight-line. In the second one, E seeks to cross the intercept $P_b P_c$ just once and to maximize the miss distance to either of P_b and P_c during the infinite period of manoeuvring. In the game with a group of three or more pursuers, for a given history, we evaluate the minimum of the guaranteed miss distances when E passing between P_b and P_c , $\forall b, c \in \{j_1, \dots, j_n\}, b \neq c$, and the guaranteed miss distance to P_a , $\forall a \in \{j_1, \dots, j_n\} \setminus \{b, c\}$. After that, we are able to choose the best alternative for assigning b and c .

Keywords: maximizing miss distances, passing between two slower pursuers, alternative games, memory strategies.