

УДК 519.83

ББК 22.18

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С НЕТРАНСФЕРАБЕЛЬНЫМИ ВЫИГРЫШАМИ

АННА В. ТУР*

Санкт-Петербургский государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: a.tur@spbu.ru

В работе рассматривается проблема стратегической поддержки кооперативных решений для линейно-квадратичных дифференциальных игр с нетрансферабельными полезностями. В качестве принципа оптимальности исследуется парето-оптимальное решение. Предполагается, что игроки используют процедуру распределения выигрыша, гарантирующую индивидуальную рациональность кооперативного решения на всем промежутке игры. Доказано, что при этих условиях парето-оптимальное решение может быть стратегически поддержано ε -равновесием по Нэшу. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: линейно-квадратичная игра, дифференциальная игра, кооперативная игра, парето-оптимальное решение, процедура распределения выигрыша, стратегическая устойчивость.

©2015 А.В. Тур

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета в рамках научного проекта 9.38.245.2014.

1. Введение

Часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда рассмотрение игр с трансферабельными полезностями ставит чрезмерные ограничения. Может случиться так, что игроки не могут вообще или не могут без потерь перераспределить между собой выигрыши, полученные в ходе игры. Это может быть вызвано несколькими причинами, например, отсутствием единого средства обмена, ограничением или запретом на трансферы. В данной работе рассматриваются линейно-квадратичные дифференциальные игры с нетрансферабельными выигрышами. В качестве кооперативного принципа оптимальности предложено рассматривать парето-оптимальное решение, которое не предполагает перераспределения выигрыша между игроками. Поскольку игра развивается во времени, даже если в начале игры парето-оптимальное решение удовлетворяет условию индивидуальной рациональности, в дальнейшем это условие может быть нарушено. Для избежания такой ситуации используется состоятельная во времени процедура распределения выигрыша, предложенная Л.А. Петросяном [8]. Оказывается, что в этом случае исход кооперативного соглашения достигается при некотором равновесии по Нэшу, которое и гарантирует стратегическую устойчивость кооперативного решения [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейно-квадратичную неантагонистическую дифференциальную игру n лиц $\Gamma(t_0, x_0)$, состояние которой в каждый момент времени характеризуется вектором $x(t)$, изменяющимся во времени в соответствии с системой уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n B_i u_i(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

где $x \in R^m$ – вектор-столбец, $u_i \in R^r$ – вектор-столбец управления игрока i , $i = 1, \dots, n$; A, B_i – матрицы размерности $(m \times m)$ и $(m \times r)$ соответственно, $x(t_0) = x_0$ – начальное состояние.

Обозначим через $N = \{1, \dots, n\}$ множество всех игроков. Выигрыш игрока $i \in N$ обозначим через $J_i(t_0, x_0, u)$, где $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Будем предполагать, что выигрыш игрока i имеет вид

$$J_i(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(x^T(t) P_i x(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t) \right) dt, \quad (2.2)$$

где P_i – симметричные положительно полуопределенные матрицы размерности $(m \times m)$, R_i – симметричные положительно определенные матрицы размерности $(r \times r)$, $i = 1, \dots, n$. Каждый игрок стремится минимизировать свой выигрыш. Предполагаем, что выигрыши игроков нетрансферабельны.

Игроки выбирают стратегии из класса допустимых.

Определение 2.1. *Набор стратегий*

$$\{u_i(t, x) = M_i(t)x, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (2.3)$$

будем называть допустимым, если $M_i(t) = \begin{cases} M_{i,1}, & \text{для } t \in [t_0, t_i), \\ M_{i,2}, & \text{для } t \in [t_i, \infty) \end{cases}$ – кусочно-постоянные матричные функции с не более чем одной точкой разрыва t_i и системы

$$\dot{x}(t) = \left(A + \sum_{i=1}^n B_i \bar{M}_i \right) x(t) \quad (2.4)$$

асимптотически устойчивы. Здесь $\{\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_n\}$ – всевозможные наборы постоянных матриц \bar{M}_i со значениями, равными $M_{i,1}$ или $M_{i,2}$.

Под асимптотически устойчивой системой будем понимать систему, все решения которой асимптотически устойчивы по Ляпунову. Согласно [1], линейная однородная дифференциальная система с постоянной матрицей асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа ее матрицы имеют отрицательные вещественные части.

Заметим, что при рассмотрении задачи с одним игроком оптимальное решение в классе управлений с постоянными матрицами M_i совпадает с оптимальным решением в классе управлений с кусочно-постоянными матрицами $M_i(t)$. Также будут совпадать и равновесные по Нэшу стратегии для рассматриваемых классов стратегий в

игре n лиц. Но, введя допустимые стратегии таким образом, мы позволяем игрокам отклоняться от выбранной в начальный момент времени траектории, что может быть актуально, если рассматриваемый кооперативный принцип оптимальности окажется несостоятельным во времени.

В качестве принципа оптимальности в кооперативной игре $\Gamma(t_0, x_0)$ будем рассматривать парето-оптимальное решение [9].

Определение 2.2. *Набор стратегий $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ из класса допустимых называется парето-оптимальным, если не существует допустимого набора стратегий u , для которого выполняется*

$$J_i(t_0, x_0, u^*) \geq J_i(t_0, x_0, u), \quad i = 1, \dots, n,$$

где как минимум одно неравенство является строгим.

Пусть игроки соглашаются использовать вектор весов

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

для нахождения оптимального решения.

Тогда (см. [6]) оптимальные стратегии игроков могут быть получены как решения следующей задачи минимизации:

$$\min_{(u_1, \dots, u_n)} \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i(t_0, x_0, u). \quad (2.5)$$

Пусть

$$(u_1^\alpha, \dots, u_n^\alpha) = \arg \min_{(u_1, \dots, u_n)} \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i(t_0, x_0, u), \quad (2.6)$$

$$J^\alpha(t_0, x_0, u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i J_i(t_0, x_0, u),$$

$$P^\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i,$$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 R_1 & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \alpha_2 R_2 & \dots & \mathbb{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \alpha_n R_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$J^\alpha(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(x^T(t) P^\alpha x(t) + u^T(t) R^\alpha u(t) \right) dt. \quad (2.7)$$

Нахождение парето-оптимального решения сводится к линейно-квадратичной задаче оптимального управления (2.1)-(2.5) с одним управлением $u(t)$.

Согласно [4] оптимальные стратегии будут иметь вид

$$\{u_i^\alpha(t) = M_i^\alpha x, \quad i = 1, \dots, n\},$$

где M_i^α – i -ый блок матрицы $M^\alpha = -(R^\alpha)^{-1} B^T \Theta^\alpha$, и Θ^α – решение матричного уравнения

$$A^T \Theta + \Theta A - \Theta B (R^\alpha)^{-1} B^T \Theta + P^\alpha = 0, \quad (2.8)$$

где $B = (B_1, \dots, B_n)$.

Тогда кооперативную траекторию $x^\alpha(t)$ можно найти, решив систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^n B_i u_i^\alpha(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.9)$$

А выигрыши игроков при кооперации:

$$J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) = \int_{t_0}^{\infty} \left((x^\alpha(t))^T P_i x^\alpha(t) + (u_i^\alpha(t))^T R_i u_i^\alpha(t) \right) dt. \quad (2.10)$$

3. Индивидуальная рациональность

В играх с нетрансферабельными выигрышами временная состоятельность кооперативного решения сводится к выполнению следующих условий:

1. Дележ должен оставаться парето-оптимальным в подыграх вдоль кооперативной траектории;
2. Выполняется условие индивидуальной рациональности на всем промежутке игры.

Если при нахождении парето-оптимального решения игроки выбирают один и тот же весовой коэффициент α во всей игре, то условие 1 выполняется. Поэтому исследование парето-оптимального решения на динамическую устойчивость сводится к проверке выполнения индивидуальной рациональности, т.е. условия 2. Считаем, что парето-оптимальное решение индивидуально рационально, если каждый игрок при этом исходе не проигрывает по сравнению с его выигрышем в ситуации равновесия по Нэшу.

Найдется такой вектор α , что в начале игры $\Gamma(t_0, x_0)$ на кооперативной траектории $x^\alpha(t)$ выполняется условие индивидуальной рациональности для парето-оптимального решения [10]:

$$J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) \leq V_i(t_0, x_0), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Здесь $V_i(t_0, x_0)$ – выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу [7] в игре $\Gamma(t_0, x_0)$.

Но в процессе игры может так случиться, что в некоторый момент l , $l > t_0$ для некоторого игрока $i \in N$ условие индивидуальной рациональности не будет выполняться:

$$J_i^\alpha(l, x^\alpha(l), u^\alpha) > V_i(l, x^\alpha(l)).$$

Здесь $V_i(l, x^\alpha(l))$ – выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу в подыгре $\Gamma(l, x^\alpha(l))$, начинающейся из состояния $x^\alpha(l)$.

Для избежания неустойчивости парето-оптимального решения будем пользоваться процедурой распределения выигрыша, предложенной Петросьяном Л.А. [8].

Определение 3.1. Вектор-функцию $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))$ назовем процедурой распределения выигрыша [8], если

$$J_i(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \beta_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Определение 3.2. Парето-оптимальное решение называется динамически устойчивым [8], если существует такая процедура распределения выигрыша $\beta(t)$, что выполняется условие индивидуаль-

ной рациональности

$$\int_l^{\infty} \beta_i(t) dt \leq V_i(l, x^\alpha(l)), \quad \forall l \geq t_0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

где $V_i(l, x^\alpha(l))$ – выигрыш игрока i в ситуации равновесия по Нэшу в подыгре $\Gamma(l, x^\alpha(l))$. А такая процедура распределения выигрыша называется состоятельной во времени.

Пусть для некоторого парето-оптимального решения условие (3.1) выполняется. Тогда существуют такие функции $\eta_i(t) \leq 0$, что

$$J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) - V_i(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} \eta_i(t) dt. \quad (3.4)$$

В работе [8] была предложена процедура распределения выигрыша для дифференциальных игр с нетрансферабельными выигрышами, которая позволяет избежать неустойчивости парето-оптимального решения.

Теорема 3.1. [8] *Если для некоторого парето-оптимального решения выполняется*

$$J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) \leq V_i(t_0, x_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

то процедура распределения выигрыша $\beta(t)$ вида

$$\beta_i(t) = \eta_i(t) - \frac{d}{dt} V_i(t, x^\alpha(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

гарантирует динамическую устойчивость этого парето-оптимального решения вдоль всей кооперативной траектории $x^\alpha(t)$. Здесь $\eta_i(t) \leq 0$ – функции, удовлетворяющие (3.4).

Согласно [5] равновесие по Нэшу в рассматриваемой игре (2.1)-(2.2) – это допустимый набор стратегий $\{u_i^{NE}(t) = M_i^{NE} x, i = 1, \dots, n\}$, где

$$M_i^{NE} = -(R_i)^{-1} B_i^T \Theta_i^{NE},$$

и Θ_i^{NE} – решение системы матричных уравнений

$$\begin{aligned} (A - \sum_{j \neq i} B_j R_j^{-1} B_j^T \Theta_j)^T \Theta_i + \Theta_i (A - \sum_{j \neq i} B_j R_j^{-1} B_j^T \Theta_j) - \\ - \Theta_i B_i (R_i)^{-1} B_i^T \Theta_i + P_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда

$$V_i(t_0, x_0) = (x_0)^T \Theta_i^{NE} x_0,$$

$$V_i(t, x^\alpha(t)) = (x^\alpha(t))^T \Theta_i^{NE} x^\alpha(t).$$

Процедура распределения выигрыша, построенная по правилу (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_i(t) = \eta_i(t) - (x^\alpha(t))^T & \left((A + \sum_{i \in N} B_i M_i^{NE})^T \Theta_i^{NE} + \right. \\ & \left. + \Theta_i^{NE} (A + \sum_{i \in N} B_i M_i^{NE}) \right) x^\alpha(t), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

4. Стратегическая поддержка парето-оптимального решения

Предположим, что игроки согласились использовать такой вектор весов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что индивидуальная рациональность парето-оптимального решения выполнена в начальный момент времени. Также считаем, что используется состоятельная во времени процедура распределения выигрыша:

$$\int_l^\infty \beta_i(t) dt \leq V_i(l, x^\alpha(l)), \quad \forall l \geq t_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

В работе [2] рассмотрена проблема стратегической поддержки кооперативного решения. Было доказано, что для специального класса дифференциальных игр динамически устойчивое кооперативное решение может быть поддержано равновесием по Нэшу.

Следуя [2], чтобы наказать тех, кто отклоняется от кооперативного соглашения, рассмотрим специальную игру $\Gamma_\alpha(t_0, x_0)$, которая отличается от исходной только выигрышами игроков на кооперативной траектории.

Пусть $\bar{J}_i(t_0, x_0, u)$ – выигрыш игрока i в игре $\Gamma_\alpha(t_0, x_0)$.

Тогда

$$\bar{J}_i(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + J_i(l, x(l), u),$$

где l – последний момент времени, для которого $x(\tau) = x^\alpha(\tau)$, для всех $\tau \in [t_0; t]$. Это значит, что в момент времени l возникает отклонение от оптимальной траектории. И

$$\bar{J}_i(t_0, x_0, u) = J_i(t_0, x_0, u),$$

если не существует такого $\tau > t_0$, что $x(t) = x^\alpha(t)$ для $t_0 \leq t \leq \tau$.

Если $x(t) \equiv x^\alpha(t)$ для $t \geq t_0$, то

$$\bar{J}_i(t_0, x_0, u^\alpha) = \int_{t_0}^{\infty} \beta_i(t) dt = J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha).$$

Определение 4.1. [3] Набор стратегий $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon)$ из класса допустимых называется ε -равновесием, если для любого допустимого набора стратегий $u_i = (u_1^\varepsilon, \dots, u_{i-1}^\varepsilon, u_i, u_{i+1}^\varepsilon, \dots, u_n^\varepsilon)$ и для любого игрока i выполняется:

$$J_i(t_0, x_0, u^\varepsilon | u_i) + \varepsilon \geq J_i(t_0, x_0, u^\varepsilon).$$

Теорема 4.1. Пусть неравенства

$$J_i^\alpha(k_0, x_0, u^\alpha) \leq V_i(k_0, x_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

выполнены для некоторого парето-оптимального решения, тогда в игре $\Gamma_\alpha(t_0, x_0)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует ситуация ε -равновесия с выигрышами игроков $(J_1^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha), \dots, J_n^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha))$.

Доказательство. Рассмотрим следующую стратегию игрока i в игре $\Gamma_\alpha(t_0, x_0)$:

$$u^* = \left\{ \begin{array}{l} u_i^\alpha(t) = M_i^\alpha x(t) \text{ для } t \in [t_0, l + \delta), \text{ если существует} \\ \quad l > t_0 : x(t) = x^\alpha(t), \quad t_0 \leq t \leq l, \\ \hat{u}_i(t) = M_i^{NE} x(t) \text{ } i\text{-я компонента равновесия} \\ \quad \text{по Нэшу в подыгре } \Gamma(l + \delta, x(l + \delta)), \\ \quad \text{если в момент } l \text{ возникает отклонение} \\ \quad \text{от оптимальной траектории, и в момент} \\ \quad l + \delta \text{ игрок } i \text{ реагирует на это.} \end{array} \right.$$

(4.2)

Можно показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что построенный набор стратегий является ε -равновесием в игре $\Gamma_\alpha(t_0, x_0)$.

Если игрок i отклоняется от оптимальной траектории в момент l , используя в дальнейшем стратегию $\tilde{u}_i = \tilde{M}_i x(t)$, а остальные игроки реагируют на это в момент времени $l + \delta$, то игрок i получит не меньше, чем

$$\int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + \int_l^{l+\delta} (\tilde{x}^T(t) P_i \tilde{x}(t) + \tilde{u}_i^T(t) R_i \tilde{u}_i(t)) dt + V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)).$$

Здесь второе слагаемое неотрицательно в силу положительной полуопределенности матриц P_i и положительной определенности матриц R_i . Значит

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + \int_l^{l+\delta} (\tilde{x}^T(t) P_i \tilde{x}(t) + \tilde{u}_i^T(t) R_i \tilde{u}_i(t)) dt + \\ & + V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)) \geq \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)). \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{x}(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = (A + B_i \tilde{M}_i + \sum_{j \neq i} B_j M_j^\alpha) x(t), \quad \tilde{x}(l) = x^\alpha(l). \quad (4.3)$$

И

$$V_i(l + \delta, x(l + \delta)) = (x^\alpha(l))^T (e^{\tilde{A}\delta})^T \theta_i^{NE} e^{\tilde{A}\delta} x^\alpha(l),$$

где $\tilde{A} = A + B_i \tilde{M}_i + \sum_{j \neq i} B_j M_j^\alpha$.

Заметим, что матрица \tilde{A} имеет отрицательные собственные числа, т.к. игроки могут использовать только допустимые стратегии. Значит

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(V_i(l, x^\alpha(l)) - V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)) \right) = 0,$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что $V_i(l, x^\alpha(l)) - V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)) \leq \varepsilon$.

Тогда, для такого δ

$$\int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + V_i(l + \delta, \tilde{x}(l + \delta)) \geq \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + V_i(l, x^\alpha(l)) - \varepsilon.$$

Поскольку игроки используют состоятельную во времени процедуру распределения выигрыша, можно выбрать такую вектор-функцию $\beta(t)$, что неравенства (4.1) выполняются. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + V_i(l, x^\alpha(l)) - \varepsilon &\geq \int_{t_0}^l \beta_i(t) dt + \int_l^\infty \beta_i(t) dt - \varepsilon = \\ &= J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Значит, если игрок i отклоняется от оптимальной траектории, то его выигрыш будет не меньше, чем $J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha) - \varepsilon$, и построенный набор стратегий является ε -равновесием с выигрышем $J_i^\alpha(t_0, x_0, u^\alpha)$. \square

5. Пример

Рассмотрим игру двух лиц (2.1)–(2.2). Пусть состояние системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \sum_{i=1}^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} u_i(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.1)$$

а выигрыши игроков имеют вид

$$J_1(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(x^T(t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x(t) + \frac{1}{2} u_1^T(t) u_1(t) \right) dt, \quad (5.2)$$

$$J_2(t_0, x_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} \left(x^T(t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} x(t) + \frac{1}{4} u_2^T(t) u_2(t) \right) dt. \quad (5.3)$$

Пусть

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Для нахождения равновесия по Нэшу необходимо решить систему (3.6), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} -(2(1 - 16s_1))q_1 - 1 + 8q_1^2 &= 0, \\ -(1 - 16s_1)q_2 - (-1 - 16s_2)q_1 + q_2 - 2 + 8q_1q_2 &= 0, \\ -(2(-1 - 16s_2))q_2 + 2q_3 - 5 + 8q_2^2 &= 0, \\ -(2(1 - 8q_1))s_1 - 1 + 16s_1^2 &= 0, \\ -(1 - 8q_1)s_2 - (-1 - 8q_2)s_1 + s_2 - 2 + 16s_1s_2 &= 0, \\ -(2(-1 - 8q_2))s_2 + 2s_3 - 5 + 16s_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, получаем

$$\theta_1^{NE} = \begin{pmatrix} 0.1463 & 0.2509 \\ 0.2509 & 0.9709 \end{pmatrix},$$

$$\theta_2^{NE} = \begin{pmatrix} 0.2396 & 0.2557 \\ 0.2557 & 1.2079 \end{pmatrix},$$

$$M_1^{NE} = (0.5852 \quad 1.0036),$$

$$M_2^{NE} = (1.9168 \quad 2.0456),$$

$$V_1(t, x(t)) = x^T(t)\theta_1^{NE}x(t),$$

$$V_2(t, x(t)) = x^T(t)\theta_2^{NE}x(t).$$

Если $\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, то для нахождения парето-оптимального решения необходимо решить систему (2.8), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1 - x_1^2(8/\alpha + 16/(1 - \alpha)) &= 0, \\ -x_1 + 2 - x_1(8/\alpha + 16/(1 - \alpha))x_2 &= 0, \\ -2x_2 - 2x_3 + 5 - x_2^2(8/\alpha + 16/(1 - \alpha)) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\theta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{8} - \alpha^2 + r + \alpha}{1 + \alpha} & \frac{\alpha(-\alpha^3 + r\alpha - 14\alpha^2 - r - \alpha + 16)}{8(-\alpha^3 + r\alpha + r + \alpha)} \\ \frac{\alpha(-\alpha^3 + r\alpha - 14\alpha^2 - r - \alpha + 16)}{8(-\alpha^3 + r\alpha + r + \alpha)} & \frac{(-\alpha^4 + r\alpha^2 + 46\alpha^3 - 41r\alpha - 33\alpha^2 - 40r - 108\alpha - 32)}{16(\alpha^3 - r\alpha - 4\alpha^2 - r - 9\alpha - 4)} \end{pmatrix},$$

где $r = \sqrt{\alpha^4 - 10\alpha^3 + \alpha^2 + 8\alpha}$.

При $\alpha = 0.6$:

$$\theta^\alpha = \begin{pmatrix} 0.1569 & 0.2202 \\ 0.2202 & 0.9872 \end{pmatrix},$$

$$M_1^\alpha = (1.046 \quad 1.468),$$

$$M_2^\alpha = (3.138 \quad 4.404).$$

Подставив найденные значения оптимальных управлений в уравнение динамики системы, получим оптимальную траекторию. Можно найти выигрыш каждого игрока вдоль оптимальной траектории

$$J_1(t_0, x_0, u^\alpha) = (x^\alpha(t))^T \begin{pmatrix} 0.1049 & 0.1709 \\ 0.1709 & 0.8612 \end{pmatrix} x^\alpha(t),$$

$$J_2(t_0, x_0, u^\alpha) = (x^\alpha(t))^T \begin{pmatrix} 0.2349 & 0.29415 \\ 0.29415 & 1.1762 \end{pmatrix} x^\alpha(t).$$

Если $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$J_1(t_0, x_0, u^\alpha) - V_1(t_0, x_0) = -0.1602 < 0,$$

$$J_2(t_0, x_0, u^\alpha) - V_2(t_0, x_0) = -0.2853 < 0.$$

Но в момент времени $t = 0.08$

$$J_1(t, x^\alpha(t), u^\alpha) - V_1(t, x^\alpha(t)) = 0.055 > 0.$$

Функции $\eta_i(t)$ выберем по следующему правилу:

$$\eta_1(t) = -0.0207(x^\alpha(t))^T x^\alpha(t),$$

$$\eta_2(t) = -0.0368(x^\alpha(t))^T x^\alpha(t).$$

Тогда

$$\beta_1(t) = (x^\alpha(t))^T \begin{pmatrix} 2.1352 & 3.964 \\ 3.964 & 8.316 \end{pmatrix} x^\alpha(t),$$

$$\beta_2(t) = (x^\alpha(t))^T \begin{pmatrix} 3.4939 & 5.1932 \\ 5.1932 & 8.8963 \end{pmatrix} x^\alpha(t).$$

Игроки, используя построенную процедуру распределения выигрыша, получают стратегически устойчивое кооперативное решение.

6. Заключение

В данной работе рассмотрена проблема стратегической поддержки парето-оптимального решения в линейно-квадратичных дифференциальных играх. Показано, что в игре специального вида, которая строится с помощью состоятельной во времени процедуры распределения выигрыша и отличается от исходной только выигрышами на кооперативной траектории, никакое индивидуальное отклонение от кооперации не приносит выгоду отклонившемуся игроку. Исход кооперативного соглашения достигается при некотором ε -равновесии по Нэшу в этой игре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.
2. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 1. С. 102–117.
3. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. *Теория игр*. СПб: БХВ-Петербург, 2012.
4. Смирнов Е. Я. *Стабилизация программных движений*. С-Пб: Издательство С.-Петербургского университета, 1997.
5. Başar T., Olsder G. J. *Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd edition*. Philadelphia: Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1999.
6. Engwerda J. C. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*. Chichester: John Wiley Sons, 2005.
7. Nash J. *Non-cooperative games* // Ann. Mathematics. 1951. V. 54. P. 286–295.
8. Petrosyan L. A. *Agreeable Solutions in Differential Games* // International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra. 1997. V. 7. P. 165–177.

9. Pareto V. *Cours d'économie politique*. Lausanne: F. Rouge, 1896—1897.
10. Yeung, D. W. K., Petrosyan L. A. *A Time-consistent solution formula for bargaining problem in differential games* // Int. Game Theory Rev. 2014. V. 16. N. 4. 1450016.

STRATEGIC STABILITY IN LINEAR-QUADRATIC DIFFERENTIAL GAMES WITH NONTRANSFERABLE PAYOFFS

Anna V. Tur, St. Peterburg State University, Cand.Sc.
(a.tur@spbu.ru).

Abstract: The problem of strategically supported cooperation in linear-quadratic differential games with nontransferable payoffs is considered. It is assumed, that the player uses the payoff distribution procedure to get the individual rationality of cooperative solution. To punish those who violate cooperative agreement, the special game, which differs from initial one only by the players' payoffs on cooperative trajectory is constructed. It is shown that in the new game there exists an ε -equilibrium with players' payoffs equal to corresponding cooperative players' payoffs in initial game.

Keywords: linear-quadratic game, differential game, cooperative game, Pareto-optimal solution, strategic stability.