Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.1, с. 27–62

УДК 519.833
ББК 91 АД; 49 К 35

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЗОЛОТОГО ПРАВИЛА. II. ДИНАМИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ*

Владислав И. Жуковский
МГУ им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, СП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Лидия В. Смирнова
МГУТУ им. К. Г. Разумовского
109004, Москва, Земляной вал, 73
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Антон С. Горбатов
МГУ им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, СП-1, Ленинские горы, факультет ВМК
e-mail: gorbatovanton@gmail.com

В статье предпринята попытка распространения исследований статического варианта Золотого правила из [2] на динамический. Основой здесь является применение опять-таки гермейеровской свертки функций выигрыша игроков, теория антагонистических позиционных дифференциальных игр в квазидвижениях и управление с поводырем.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а и НАН Украины, проект №03-01-14

Ключевые слова: бескоалиционные игры, позиционная стратегия, седловая точка, равновесие по Бержу.

1. Основные понятия

1.1. Бескоалиционная позиционная дифференциальная игра N лиц (БПДИ)

Математическую модель БПДИ представляет упорядоченная четверка

$$\langle \mathbb{N}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\mathcal{J}_i\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{1.1}$$

здесь $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков; Σ – управляемая динамическая система, изменение которой (во времени t) описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u_1, \ldots, u_N), \quad x(t_0) = x_0; \tag{1.2}$$

$\mathfrak{A}_\mathrm{i}$ – множество стратегий (действий) U_i игрока $i \in \mathbb{N}$; $\mathcal{J}_i$ – функция выигрыша i-го игрока, значение которой (называемое выигрышем) оценивает качество функционирования игрока i.

1.2. Управляемая система

Изменение текущего состояния конфликта $x(t)$ с течением времени t описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением (1.2), где фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^m$ (m-мерному евклидову действительному арифметическому пространству, элементами которого являются упорядоченные наборы из m действительных чисел, записываемых в виде столбцов, со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой $\|\cdot\|$); время t изменяется в пределах от $t_0 \geq 0$ до $\vartheta > t_0$, позиция $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$; управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in Q_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Будем далее предполагать, что выполняются

Условия 1.1. *Компоненты m-вектор-функции $f(t, x, u_1, \ldots, u_N)$ непрерывны по совокупности аргументов; множества $Q_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^{n_i}$ (Q_i – замкнуто и ограничено) $(i \in \mathbb{N})$,*

$$u = (u_1, \ldots, u_N) \in Q = \prod_{i\in\mathbb{N}} Q_i \subset \mathbb{R}^n \quad (n = \sum_{i\in\mathbb{N}} n_i);$$

для каждой ограниченной области G пространства позиций (t,x) существует «своя» Липшицева константа $\lambda(G)$, зависящая от множества G, и такая, что выполняется неравенство

$$\|f(t^{(1)},x^{(1)},u)-f(t^{(2)},x^{(2)},u)\| \leq \lambda(G)(\|x^{(1)}-x^{(2)}\|+|t^{(1)}-t^{(2)}|)$$

для $\forall\ (t^{(j)},x^{(j)}) \in G\ (j=1,2)$ *равномерно относительно $u \in Q$; существует $\gamma = const > 0$, при которой для всех $t \in [t_0,\vartheta]$ и $u \in Q$ выполняется условие подлинейного роста*

$$\|f(t,x,u)\| \leq \gamma(1+\|x\|). \tag{1.3}$$

Отметим, что выполнение условий 1.1 гарантирует существование, единственность и продолжимость на интервал $[t_0,\vartheta]$ решений $x(\cdot)=\{x(t),t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ системы (1.2) при $\forall\ x(t_0)=x_0 \in \mathbb{R}^m$ и любых измеримых по Борелю n-вектор-функциях $u(t) \in Q\ \forall\ t \in [t_0,\vartheta]$.

1.3. Стратегии и ситуации

Стремление оперативно реагировать на всевозможные текущие возмущения управляемой системы приводит к управлению по принципу обратной связи. Реализация этого принципа для системы (1.2) возможна с помощью математической формализации управляющих воздействий (стратегий) игроков, предложенной для антагонистических дифференциальных игр академиком Н.Н. Красовским и его учениками [7,6,9]. Приведем понятия стратегии i-го игрока, ситуации, порожденных ими движений системы (1.2).

Определение 1.1. *Стратегия U_i для i-го игрока в БПДИ (1.1) отождествляется с функцией $u_i(t,x)$, значения которой в каждой возможной позиции (t,x) удовлетворяют лишь включению*

$$u_i(t,x) \subseteq Q_i, \tag{1.4}$$

где Q_i – заданное компактное подмножество n_i-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n_i}$.

Функция $u_i(t,x)$ в (1.4) может быть и многозначной, в частности, не исключается случай $u_i(t,x)=Q_i$. Соответствие между стратегией U_i и функцией $u_i(t,x)$ обозначается $U_i \div u_i(t,x)$, а множество стратегий i-го игрока – через $\mathfrak{A}_i$. «Полный» набор стратегий $U=(U_1,\ldots,U_N) \in \mathfrak{A} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$ называют *ситуацией* игры (1.1).

Выбор управляющего воздействия u_i подчинен i-му игроку. Перейдем к понятию квазидвижения системы (1.2), порожденному из начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ фиксированной стратегией i-го игрока U_i $(i \in \mathbb{N})$. Доказательство приводимых ниже утверждений в [3]. Заметим, что модификация (по сравнению с [6, 7, 9]) понятия движения управляемой системы вызвана приведенными далее контрпримерами, построенными А.И. Субботиным и А.Ф. Кононенко [3, с. 16, 19]. В первом из них отмечена возможность *появления новых движений*, которых не было в первоначальном пучке. Во втором – возможность *потери части движений* из первоначального пучка (движений по Н.Н. Красовскому). Избежать данных негативных свойств позволяет математическая формализация квазидвижения, предложенная в [3] первым автором этой статьи, там же подробное доказательство фактов, перечисляемых далее в разделах 1.4 и 2 настоящей статьи.

1.4. Кусочно-непрерывные пошаговые квазидвижения

Определяются пошаговые квазидвижения, отличающиеся от пошаговых движений из [7, с. 8] тем, что они *кусочно-непрерывны, а в точках разбиения допускают скачки (разрывы) первого рода.*

Пошаговые квазидвижения. Перейдем к определению пошаговых квазидвижений (кусочно-непрерывных пошаговых движений), порожденных стратегией $U_i \in \mathfrak{A}_\mathfrak{i}$ и ситуацией $U = (U_1, \ldots, U_N) \in \mathfrak{A}$. Будем предполагать, не оговаривая особо, что для системы (1.2) выполнены условия 1.1.

Пусть заданы начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, число $\alpha \in$ $\in [0, 1]$ и выбрана стратегия $U_i \div u_i(t, x)$, $U_i \in \mathfrak{A}_\mathfrak{i}$. Покроем отрезок $[t_0, \vartheta]$ системой Δ полуинтервалов $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, r(\Delta) - 1)$, $\tau_0 \geq t_0$, $\tau_{r(\Delta)} = \vartheta$. Далее $u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(t) = (u_1(t), \ldots, u_{i-1}(t), u_{i+1}(t), \ldots, u_N(t))$ – измеримые по Борелю вектор-функции и

$$u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(t) \in Q_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = \prod_{j \in \mathbb{N}, j \neq i} Q_j$$

при всех $t \in [t_0, \vartheta)$.

Пошаговым квазидвижением системы (1.2), *порожденным из начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$

а) *стратегией* $U_i \div u_i(t, x) \subseteq Q_i$,

б) *разбиением* $\Delta: \; t_0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{r(\Delta)} = \vartheta$,

в) *числом* $\alpha \in [0,1]$,
будем называть всякую функцию

$$x(\cdot, U_i, \Delta, \alpha) = \{x(t, \tau_0, x_0, \hat{x}_0, u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\cdot), U_i, \Delta, \alpha),\ \tau_0 \le t \le \vartheta\},$$

которая при $\tau_j \le t < \tau_{j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, r(\Delta) - 1)$ *удовлетворяет квазипошаговому уравнению*

$$x(t, U_i, \Delta, \alpha) = \hat{x}_i + \int\limits_{\tau_j}^{t} f(\tau, x(\tau, U_i, \Delta, \alpha), u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\tau), u_i(\tau_j, \hat{x}_j))d\tau \quad (1.5)$$

при условии

$$\sum_{j=0}^{r(\Delta)-1} \|\hat{x}_j - x_0(\tau_j, U_i, \Delta, \alpha)\| \le \alpha, \quad (1.6)$$

где $x_0(\tau_j, U_i, \Delta, \alpha)$ — *значение (при* $t = \tau_j$*) продолженного вправо решения* $x(t, U_i, \Delta, \alpha)$ *уравнения (1.5) на промежутке* $\tau_{j-1} \le t < \tau_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r(\Delta) - 1)$, т. е.

$$x_0(\tau_j, U_i, \Delta, \alpha) = \hat{x}_{j-1} + \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(\tau, x(\tau, U_i, \Delta, \alpha), u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\tau), u_i(\tau_{j-1}, \hat{x}_{j-1}))d\tau, \quad (1.7)$$

$$x(\tau_0, U_i, \Delta, \alpha) = \hat{x}_0, \quad x_0(t_0, U_i, \Delta, \alpha) = x_0.$$

В отличие от пошаговых движений [7, с. 33], пошаговые квазидвижения могут иметь конечные скачки $\|\hat{x}_j - x_0(\tau_j, U_i, \Delta, \alpha)\| \neq 0$ в точках разбиения τ_j. Сумма таких скачков не должна превосходить заданного числа α (рис. 1). Данный факт учитываем в обозначениях пошаговых квазидвижений $x(t, U_i, \Delta, \alpha)$, вводя в аргументы число α. При $\alpha = 0$ из пошагового квазидвижения получается обычное пошаговое движение из [7, с. 33].

Множество указанным образом определенных пошаговых квазидвижений системы (1.2), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) фиксировнной стратегией U_i, всеми возможными разбиениями Δ, всеми числами $\alpha \in [0,1]$ и любыми измеримыми по Борелю функциями $u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(t) \in Q_{\mathbb{N}\setminus\{i\}} = \prod\limits_{s \in \mathbb{N}\setminus\{i\}} Q_s$ обозначим символом $\mathcal{X}(t_0, x_0, U_i)$.

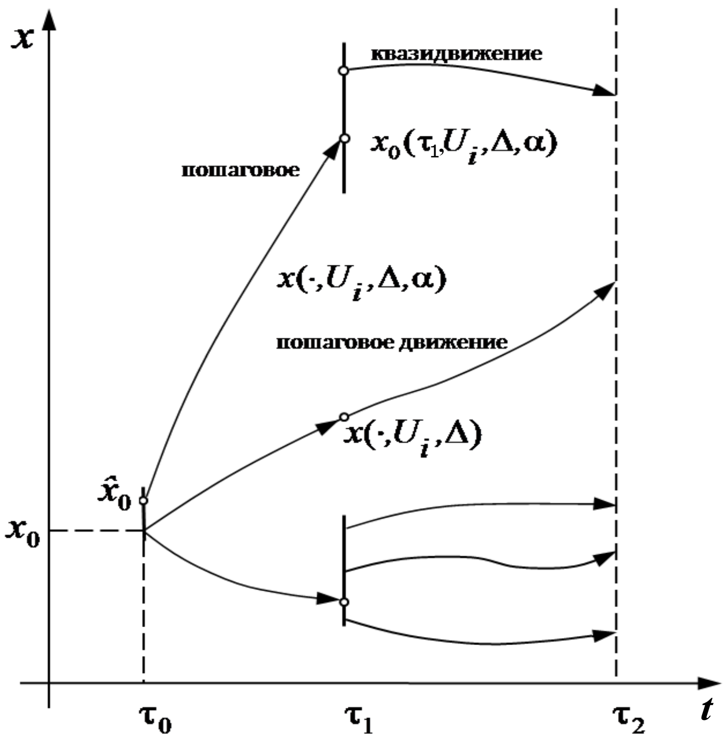

Рисунок 1.

Если в (1.5) и (1.7) при $\tau_j \le t < \tau_{j+1}$ $(j = 0, 1, \dots, r(\Delta) - 1)$ положить $u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\tau) = u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(\tau_j, \hat{x}_j)$, то уравнения (1.5) и (1.7) определяют пошаговое квазидвижение $x(\cdot, \tau_0, x_0, \hat{x}_0, U, \Delta, \alpha)$ системы (1.2), порожденное ситуацией $U = (U_1, \dots, U_N) \in \mathfrak{A}$ из начальной позиции (t_0, x_0) (где $U = (U_1, \dots, U_i, \dots, U_N)$ заданная ситуация из $\mathfrak{A}$).

Далее $M_m[t_0, \vartheta]$ есть множество ограниченных m-вектор-функций $z(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ с нормой

$$\|z(\cdot)\|_{M_m[t_0,\vartheta]} = \sup_{t_0 \le t \le \vartheta} \|z(t)\|.$$

Утверждение 1.1. *Множество $\mathcal{X}(t_0, x_0, U_i)$ всех пошаговых квазидвижений $x(\cdot, U_i, \Delta, \alpha)$ системы (1.2), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) фиксированной стратегией U_i, всеми возможными разбиениями Δ, любыми числами $\alpha \in [0, 1]$ и любыми измеримыми по Борелю функциями $u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(t) \in Q_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}$ ограничено по норме про-*

странства $M_m[t_0, \vartheta]$, *то есть существует* $k = const > 0$ *такое, что для всех* $x(\cdot, U_i, \Delta, \alpha)$ *выполняется условие*

$$\|x(\cdot, U_i, \Delta, \alpha)\|_{M_m[t_0,\vartheta]} \leq k.$$

Аналогично, множество $\mathcal{X}(t_0, x_0, U)$ всех пошаговых квазидвижений $x(\cdot, U, \Delta, \alpha)$ системы (1.2), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) фиксированной ситуацией $U \in \mathfrak{A}$, всеми возможными разбиениями Δ и любыми числами $\alpha \in [0, 1]$, ограничено по норме пространства $M_m[t_0, \vartheta]$.

Квазидвижения и их свойства. Перейдем к понятию квазидвижений – *непрерывных* пределов (в $M_m[t_0, \vartheta]$) последовательностей, построенных в предыдущем разделе пошаговых квазидвижений.

Определение 1.2. *Квазидвижением* $x[\cdot] = \{x[t, t_0, x_0, U_i],\ t_0 \leq \leq t \leq \vartheta\}$ *системы* (1.2), *порожденным из начальной позиции* (t_0, x_0) *стратегией* $U_i \in \mathfrak{A}_i$, *назовем всякую непрерывную на отрезке* $[t_0, \vartheta]$ *функцию* $x[\cdot] = \{x[t],\ t_0 \leq t \leq \vartheta\}$, *для которой существует сходящаяся (при* $r \to \infty$, $m \to \infty$*) к ней (в метрике пространства* $M_m[t_0, \vartheta]$*) последовательность пошаговых квазидвижений (продолженных влево до* t_0, *если* $\tau_0^{(r)} > t_0$*)*

$$x(\cdot, U_i, \Delta^{(r)}, \alpha^{(m)}) = \{x(t, \tau_0^{(r)}, x_0, x_0^{(r)}, u_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}^{(r)}(\cdot), \Delta^{(r)}, \alpha^{(m)}),\ t_0 \leq t \leq \vartheta\},$$

где

$$diam\ \Delta^{(r)} \to 0,$$

и

$$|\tau_0^{(r)} - t_0| + \|x_0^{(r)} - x_0\| \to 0 \quad при \quad r \to \infty,$$
$$\alpha^{(m)} \to 0 \quad при \quad m \to \infty; \tag{1.8}$$

здесь

$$diam\ \Delta^{(r)} = \max_j [\tau_{j+1}^{(r)} - \tau_j^{(r)}],$$

$$0 \leq \alpha^{(m)} \leq 1 \quad (r, m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, для данной последовательности $\{x(\cdot, U_i, \Delta^{(r)}, \alpha^{(m)})\}$ при выполнении (1.8) будет

$$\sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} \|x[t] - x(t, U_i, \Delta^{(r)}, \alpha^{(m)})\| \to 0.$$

Пучок построенных квазидвижений системы (1.2) обозначим $\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$. Различные квазидвижения пучка реализуются за счет различных возможных последовательностей $\Delta^{(r)}$, $\alpha^{(m)}$ и различных $u^{(r)}_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}(t) \in Q_{\mathbb{N}\setminus\{i\}}$, которые только могут быть использованы при построении пошаговых квазидвижений (сходящихся к квазидвижениям $x[\cdot, t_0, x_0, U_i]$).

Аналогично определяются квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, U]$ системы (1.2), порожденные из начальной позиции (t_0, x_0) ситуацией $U \in \mathfrak{A}$. Пучок таких квазидвижений обозначим $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$.

Рассмотрим свойства определенных таким образом пучков квазидвижений.

Утверждение 1.2. *Пучок квазидвижений $\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$ является непустым, ограниченным (по норме) и замкнутым подмножеством пространства $C_m[t_0, \vartheta] \subset M_m[t_0, \vartheta]$. Аналогичные утверждения имеют место для пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$.*

Утверждение 1.3. *Для любых начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \times \mathbb{R}^m$, стратегии U_i и ситуации $U \in \mathfrak{A}$ сечения соответствующих пучков квазидвижений гиперплоскостью $t = \vartheta$:*

$$X[\vartheta, t_0, x_0, U_i] = \mathcal{X}[t_0, x_0, U_i] \cap \{t = \vartheta\},$$

$$X[\vartheta, t_0, x_0, U] = \mathcal{X}[t_0, x_0, U] \cap \{t = \vartheta\}$$

являются непустыми компактами в $\mathbb{R}^m$.

Утверждение 1.4. *Каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ и ситуация $U = (U_1, \ldots, U_i, \ldots, U_N) \in \mathfrak{A}$, каждое квазидвижение $x[\cdot, t_0, x_0, U]$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$ содержится в пучке $\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$ $(i \in \mathbb{N})$, т. е.*

$$\mathcal{X}[t_0, x_0, U] \subset \mathcal{X}[t_0, x_0, U_i] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

и, следовательно,

$$X[\vartheta, t_0, x_0, U \div Q] \subset X[\vartheta, t_0, x_0, U_i \div Q_i] \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Далее используем также *область достижимости* системы (1.2) из позиции (t_0, x_0), именно

$$X[\vartheta] = X[\vartheta, t_0, x_0, U \div Q] = X[U \div Q] = \bigcup_{U \in \mathfrak{A}} x[\vartheta, t_0, x_0, U].$$

Замечание 1.1. Согласно определениям 1.1 и 1.2 (стратегий, ситуаций и порожденных ими квазидвижений системы (1.2) из начальной позиции (t_0, x_0))

а) для стратегии i-го игрока $U_i \div Q_i$ пучок квазидвижений

$$\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i \div Q_i] = \{x[t, t_0, x_0, U_i],\ t \in [t_0, \vartheta] \mid \forall\ U_i \in \mathfrak{A}_i\} = \\ = \bigcup_{U_i \in \mathfrak{A}_i} \{x[t, t_0, x_0, U_i],\ t_0 \le t \le \vartheta\};$$

в) для ситуации $U \div Q$ пучок квазидвижений

$$\mathcal{X}[t_0, x_0, U \div Q] = \{x[t, t_0, x_0, U],\ t_0 \le t \le \vartheta \mid \forall\ U \in \mathfrak{A}\} = \\ = \bigcup_{U \in \mathfrak{A}} \{x[t, t_0, x_0, U],\ t_0 \le t \le \vartheta\}.$$

Полнота пучка квазидвижений. Обоснованием перехода от движений системы (1.2) по Н.Н. Красовскому к квазидвижениям является следующий результат:

Теорема 1.1. *Для любой позиции $(t^*, x[t^*])$, где $t^* \in [t_0, \vartheta]$ и $x[\cdot]$ – – некоторое квазидвижение из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$, имеет место включение*

$$X[\vartheta, t^*, x[t^*], U] \subset X[\vartheta, t_0, x_0, U] \quad \forall\ U \in \mathfrak{A}.$$

Таким образом, при перемещении начальной позиции вдоль любого квазидвижения (порожденного данной ситуацией U из заданной начальной позиции) не могут возникать (или пропадать) куски квазидвижений, которых не было в первоначальном пучке квазидвижений (порожденных той же ситуацией из той же начальной позиции). Для движений, формализуемых согласно [7], такие «куски» движений (как показывают приведенные ниже примеры Кононенко А.Ф. и Субботина А.И.) появляться могут.

Аналогичное теореме 1.1

Утверждение 1.5. *Для любой позиции $(t^*, x[t^*])$, где $t^* \in [t_0, \vartheta]$ и $x[\cdot]$– – произвольное квазидвижение из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$, справедливо включение*

$$X[\vartheta, t^*, x[t^*], U_i] \subset X[\vartheta, t_0, x_0, U_i].$$

Следствие 1.1. *Пусть* U_i – *некоторая стратегия из* $\mathfrak{A}_i$, $x^*[\cdot] = x^*[\cdot, t_0, x_0, U_i]$ – *какое-либо квазидвижение системы* (1.2), *порожденное* U_i *из позиции* (t_0, x_0), *момент времени* $t^* \in [t_0, \vartheta]$ *и* $x[t] = x[t, t^*, x^*[t^*], U_i]$, $t^* \leq t \leq \vartheta$, — *произвольное квазидвижение системы* (1.2), *порожденное* U_i *из позиции* $(t^*, x^*[t^*])$. *Тогда существует квазидвижение* $\tilde{x}[\cdot] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$ *такое, что*

$$\tilde{x}[t] = \begin{cases} x^*[t] & \textit{при } t_0 \leq t \leq t^*, \\ x[t] & \textit{при } t^* \leq t \leq \vartheta. \end{cases}$$

Таким образом, квазидвижение $x[t, t^*, x^*[t^*], U_i]$, $t^* \leq t \leq \vartheta$, является «куском» некоторого квазидвижения $\tilde{x}[\cdot]$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U_i]$.

Контрпримеры А.И. Субботина и А.Ф. Кононенко.

В конце предыдущего раздела упоминалось, что изменение формализации (по Н.Н. Красовскому) понятий движений динамической системы на квазидвижения вызвано контрпримерами, предложенными А.И. Субботиным и А.Ф. Кононенко.

Первый из них демонстрирует возможность (в процессе развертывания игры во времени) появления новых движений (определенных в [7]), которые отсутствовали в первоначальном пучке движений. На этот факт обратил внимание (первого автора этой статьи) Андрей Измайлович Субботин, предложив следующий сконструированный им пример.

Контрпример А.И. Субботина

Пример 1.1. Пусть управляемая система (1.2) имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad x[0] = x_0 = 0, \quad |u| \leq 1. \tag{1.9}$$

Рассмотрим стратегию

$$U \div u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \ t \in [0,1), \\ 0 & \text{при } x < 0, \ t \in [0,1), \\ +1 & \text{при } x = 0, \ t \in [0,1), \\ 0 & \text{при } x = 0, \ t \in [1,2), \\ +1 & \text{при } x > 0, \ t \in [1,2), \\ -1 & \text{при } x < 0, \ t \in [1,2). \end{cases}$$

Пучок движений, порожденных из начальной позиции $(t_0, x_0) = (0, 0)$ стратегией U состоит из двух движений $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}[t]$, $0 \le t \le 2$, отмеченных ниже на рис. 2 жирной линией. Эта же стратегия U уже из позиции $(1, 0)$ порождает три движения $x^{(1)}[t]$, $x^{(2)}[t]$ и $x^{(3)}[t] \equiv 0$, $1 \le t \le 2$. Итак, при перемещении текущей позиции $(t, x[t])$ вдоль движений $x^{(1)}[t]$ или $x^{(2)}[t]$ в момент $t = 1$ к первоначальному пучку $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$ добавляется еще движение $x^{(3)}[t]$, $1 \le t \le 2$, которое отсутствовало в $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$. Таким образом, при развертывании во времени игры могут не только «теряются» куски первоначальных движений (как в следующем далее примере А.Ф. Кононенко), но и появлятся новые движения (как в данном примере $x^{(3)}[t] \equiv 0$), которые отсутствовали в первоначальном пучке движений.

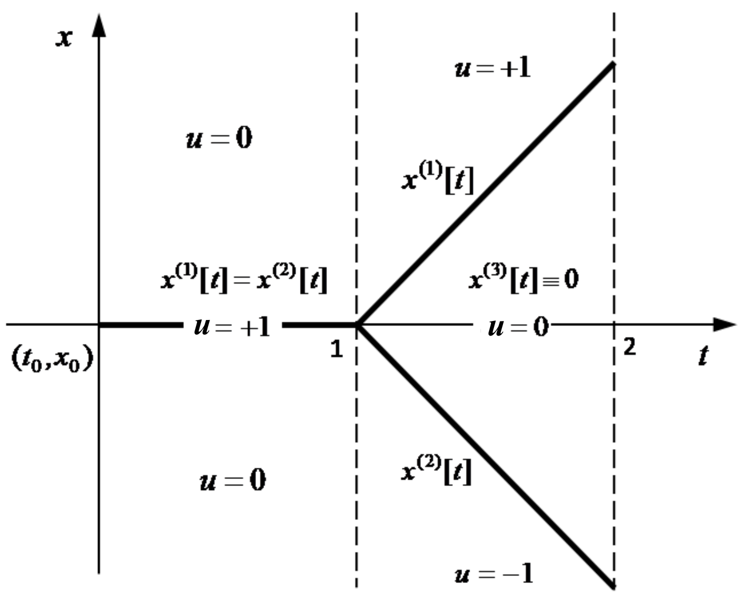

Рисунок 2.

Появление новых движений (типа $x^{(3)}[t] \equiv 0$, $1 \le t \le 2$) нежелательно с точки зрения игроков, выбирающих «свои» стратегии. В самом деле, на таком новом движении возникают новые значения критериев (исходя из которых игроки принимают решение). Поэтому оптимальные для них стратегии в первоначальной позиции (в начале игры) могут перестать быть оптимальными в процессе развертывания игры, если только текущая позиция «попадает» в ту точку, откуда исходит новое движение. Избежать этот недостаток можно несколько изменив понятие пошаговых движений из [7]. Именно, допустив возможность пошаговых движений, имеющих разрывы (скачки) в точках разбиений.

Так в рассматриваемом примере движение $x[t] \equiv 0$, $0 \le t \le 2$ является пределом последовательности пошаговых квазидвижений $x^{(k)}[t]$, $0 \le t \le 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, отмеченных на рис. 3 пунктирной линией. Эти квазидвижения имеют разрывы первого рода в точке $t = 1$, а в остальных точках отрезка $[0, 2]$ непрерывны.

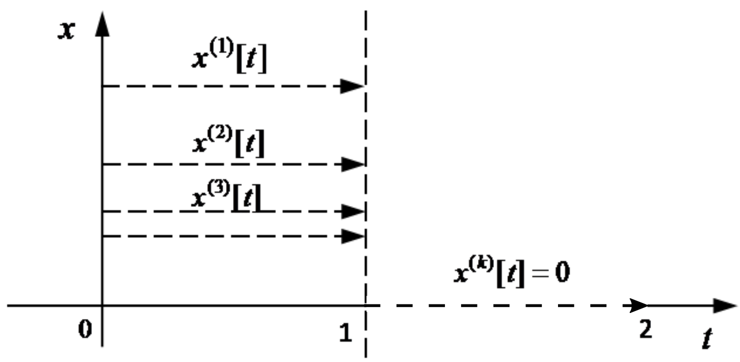

Рисунок 3.

Сходимость $x^{(k)}[t]$ к $x[t] \equiv 0$ здесь уже нужно рассматривать в пространстве $M_m[t_0, \vartheta]$ ограниченных n-мерных функций с нормой $\|x(\cdot)\|_{M_m[t_0,\vartheta]} = \sup\limits_{t_0 \le t \le \vartheta} \|x(t)\|$. При таком определении движения появление новых движений исключено и игроки могут принимать решения (выбирать стратегии), исключив возможность появления движений в процессе развертывания игры (во времени).

Контрпример А.Ф. Кононенко. Следующий пример, опубликованный в [5], сконструировал Александр Федорович Кононенко. Пример демонстрирует, что отрезок движения (определенный в [7]) может уже перестать быть движением.

Пример 1.2. Пусть управляемая система (1.2) имеет вид

$$\dot{x} = u, \quad 0 \le t \le 1, \quad x[0] = x_0 = 0, \quad |u| \le 1.$$

Рассмотрим стратегию

$$U \div u(t,x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0,\ t \in [0,1), \\ -1 & \text{при } x < 0,\ t \in [0,1), \\ 0 & \text{при } x = 0,\ t \in [0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1), \\ 1 & \text{при } x = 0,\ t = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Одним из движений данной системы, порожденным приведенной стратегией U из позиции $(t_0, x_0) = (0,0)$, является $x[t] \equiv 0$, $0 \le t \le 1$ (на рис. 4 отмечен жирной чертой). Однако часть этого движения $x^{(3)}[t] \equiv 0$, $\frac{1}{2} \le t \le 1$ не является движением на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, начинающемся с позиции $(\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, x[\frac{1}{2}])$. На этом отрезке движениями будут отрезки прямых $x^{(1)}[t] = t - \frac{1}{2}$, $x^{(2)}[t] = -(t - \frac{1}{2})$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, а отрезок $x^{(3)}[t] \equiv 0$ при $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ движением уже не будет. Таким образом, часть движения $x[t] \equiv 0$ ($\frac{1}{2} \le t \le 1$) не будет движением, порожденным из «текущей» начальной позиции $(\frac{1}{2}, 0)$. Данный факт вызван тем обстоятельством, что в приведенном в [7, с. 31] определении отсутствует *предельный переход по начальному времени*, т. е. для сходящейся последовательности пошаговых движений рассматриваются начальные позиции вида $(t_0, x^{(k)})$, – начальное время t_0 фиксировано.

В задачах управления и дифференциальных играх отмеченный факт может «испортить» оптимальную стратегию. Именно, пусть для стратегии, выбранной в качестве решения игры, оптимальное значение критерия достигается на «конце» движения, «кусок которого теряется» в процессе развертывания (во времени) игры. Тогда наступает момент времени (в примере 1.2 время $t = \frac{1}{2}$), начиная с которого следует использовать другую оптимальную стратегию, ибо прежняя нужного результата уже не дает (движения, на котором оптимальный результат достигается, уже не будет). Чтобы избежать «потери куска движений», А.Ф. Кононенко предложил при определении пошаговых движений системы (1.2) добавить предельный переход по начальному времени. Именно, каждое пошаговое движение начинать не в позиции $(t_0, x^{(k)})$, а в начальной позиции $(t^{(k)}, x^{(k)})$. Затем продолжить (если $t^{(k)} > t_0$) такое пошаговое движение влево до t_0. Вледствие условий 1.1 такое продолжение возможно. При построении движений $x[\cdot, t_0, x_0, U]$ уже рассматривать предельный переход от таких продолженных влево (при $t^{(k)} > t_0$) или «обрезанных» (при

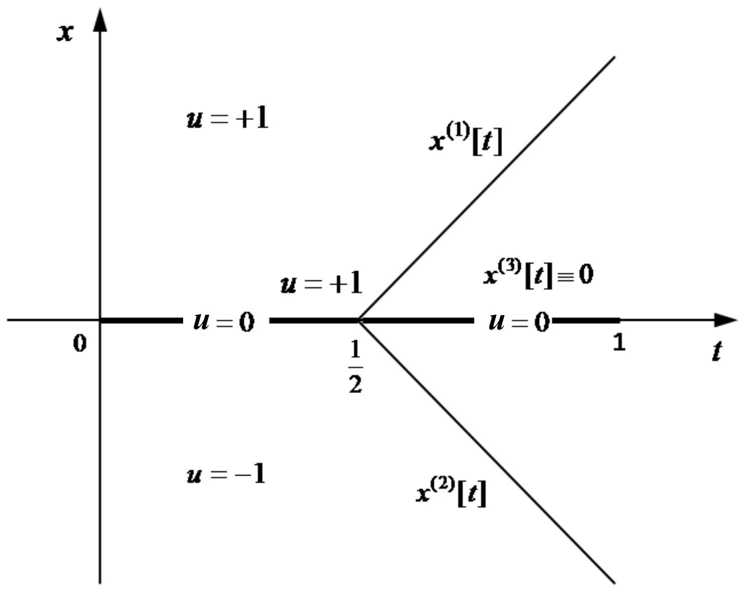

Рисунок 4.

$t^{(k)} < t_0$) пошаговых движений $x(t, t^{(k)}, x^{(k)}, U, \Delta^{(k)})$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, добавляя требование

$$\lim_{k\to\infty} |t^{(k)} - t_0| = 0. \tag{1.11}$$

Так движение $x^{(3)}[t] \equiv 0$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ (рис. 4) является пределом последовательности пошаговых движений, исходящих из $(t^{(k)}, x^{(k)}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{10k}, 0)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Итак, для (1.10) справедливо

Утверждение из [5]: пусть $x[t] = x[t, t_0, x_0, U]$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$ является движением системы (1.2), порожденным из начальной позиции (t_0, x_0) стратегией U. Тогда для любых $t^* \in [t_0, \vartheta)$ кусок движения $x[t, t_0, x_0, U]$, $t^* \leq t \leq \vartheta$ является движением системы, порожденным U из начальной позиции $(t^*, x[t^*, t_0, x_0, U])$. Как раз поэтому при определении квазидвижений использован предельный переход (1.11).

1.5. Терминальные функции выигрыша

Рассматриваем снова БПДИ (1.1) и предполагаем, что выполнены условия 1.1 из раздела 1.2. Пусть теперь игроки, не объединяясь в коалиции, выбирают каждый свою позиционную стратегию $U_i \in \mathfrak{A}_{\mathrm{i}}$ ($i \in \mathbb{N}$). В результате образуется ситуация $U = (U_1, \ldots, U_N) \in \mathfrak{A} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i$. Ситуация U порождает пучок квазидвижений $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$ из начальной позиции (t_0, x_0). Пересечение этого пучка с гиперплоскостью $t = \vartheta$ образует (утверждение 1.3) компактное подмножество (область достижимости) $X[\vartheta, t_0, x_0, U \div Q] = X[\vartheta]$. На $X[\vartheta]$ определена *функция выигрыша* каждого игрока $\mathcal{J}_i = F_i(x[\vartheta])$ ($i \in \mathbb{N}$), значение которой оценивает качество функционирования (в игре (1.1)) каждого i-го игрока и называется его *выигрышем.* Не оговаривая особо, далее будем предполагать выполненными

Условия 1.2. *Предполагаем, что в игре* (1.1) *скалярные функции* $F_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$) *непрерывны на* $\mathbb{R}^m$.

Функции выигрыша вида $\mathcal{J}_i = F_i(x[\vartheta])$ принято в теории дифференциальных игр называть *терминальными*, ибо определены они на «правых концах» (т. е. при $t = \vartheta$) квазидвижений $x[\cdot] = x[t, t_0, x_0, U]$, $t_0 \le t \le \vartheta$.

2. Альтернатива и седловая точка

2.1. Вспомогательные сведения

Основой исследования многих свойств дифференциальных позиционных игр со многими участниками является теорема об альтернативе, установленная (для движений) в [7]. Приведем ряд понятий, используемых в теореме об альтернативе. При этом предполагаем, что выполнены условия 1.1 и 1.2 для антагонистической позиционной дифференциальной игры

$$\Gamma_a = \langle \{1, 2\}, \Sigma_a, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{V}\}, F(x[\vartheta]) \rangle,$$

где первый игрок минимизирует, второй — максимизирует скалярную функцию $F(x[\vartheta])$; управляемая система Σ_a описывается уравнением

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0.$$

Здесь фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^m$, время $t \in [t_0, \vartheta]$, постоянные $\vartheta > t_0 \geq \geq 0$, множество стратегий первого игрока –

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{A} = \{U \div u(t,x) |\ u(t,x) \subseteq L \in comp\ \mathbb{R}^l\}, \\ \text{второго —} \qquad \\ \mathfrak{V} = \{V \div v(t,x) \mid v(t,x) \subseteq Q \in comp\ \mathbb{R}^q\}. \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

Предполагаем, что для игры Γ_a выполнены аналоги условий 1.1 и 1.2, а именно

Условия 2.1. *Вектор-функция $\bar{f}(\cdot)$ непрерывна, локально липшицева по t, x и $\|\bar{f}(\cdot)\| \leq \gamma(1 + \|x\|)$; кроме того $F(x)$ считаем непрерывной на $\mathbb{R}^m$.*

Рассмотрим множество W в пространстве позиций (t, x). Множество W называется *u-стабильным*, если при любом выборе $(t_*, x_*) \in \in W$, значения $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и вектора $v_* \in Q$ среди решений $x(t)$ дифференциального уравнения в контингенциях

$$\dot{x}(t) \in \Phi_u(t, x(t), v_*), \quad x(t_*) = x_*,$$

(где

$$\Phi_u(t, x, v) = co\ \{\bar{f} \in \mathbb{R}^m \mid \bar{f} = \bar{f}(t, x, u, v_*) \ \ \forall u \in L\},$$

co $\{\}$ – выпуклая замкнутая оболочка множества $\{\cdot\}$) найдется, по крайней мере, одно решение $x(t)$, $t_* \leq t \leq \vartheta$, удовлетворяющее включению

$$(t^*, x(t^*)) \in W.$$

Если для каждой позиции $(t, x) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ и любого вектора $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство

$$\min_{u \in L} \max_{v \in Q} z' \bar{f}(t, x, u, v) = \max_{v \in Q} \min_{u \in L} z' \bar{f}(t, x, u, v), \qquad (2.2)$$

то [7, с. 56] в Γ_a *выполняется условие седловой точки для маленькой игры*; здесь и далее штрих сверху означает операцию транспонирования.

Перейдем к понятию экстремальной к множеству W стратегии.

Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция. Экстремальная к W стратегия $U^e \div u^e(t, x)$, $U^e \in \mathfrak{A}$ вводится следующим образом.

Если гиперплоскость $t = t_*$ в пространстве позиций не пересекает W, то в качестве $u^e(t_*, x_*)$ можно выбрать *любой* вектор $u \in L$.

Если такое пересечение имеет место, то надлежит взять позицию $(t_*, w_*) \in W$, одну из ближайших к (t_*, x_*) (любую) в евклидовой метрике . В качестве $u^e(t_*, x_*)$ тогда следует использовать любой из векторов u^*, определяемый равенством

$$\max_{v\in Q}(x_* - w_*)'\bar{f}(t_*, x_*, u^*, v) = \min_{u\in L}\max_{v\in Q}(x_* - w_*)'\bar{f}(t_*, x_*, u, v). \quad (2.3)$$

2.2. Альтернатива

Лемма 2.1. *Пусть замкнутое множество W является и-стабильным, стратегия $U^e \div u^e(t,x)$, $U^e \in \mathfrak{A}$ экстремальна к W и начальная позиция $(t_*, x_*) \in W$. Тогда для всякого квазидвижения $x[t, t_*, x_*, U^e]$, $t_* \le t \le \vartheta$ будет*

$$(t, x[t, t_*, x_*, U^e]) \in W \quad \forall\ t \in [t_*, \vartheta]. \quad (2.4)$$

Используя затем схему доказательства, предложенную Н.Н. Красовским в [7, с.68-70], приходим к справедливости следующей теоремы об альтернативе уже для квазидвижений.

Теорема 2.1. *Предположим, что для Γ_a выполнены условия 2.1, задано некоторое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^m$. Тогда, какова бы ни была начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$,*

либо существует стратегия $U^e \in \mathfrak{A}$, которая для всех квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, U^e]$ обеспечит встречу с множеством M в момент ϑ, т.е.

$$X[\vartheta, t_0, x_0, U^e] \subset M; \quad (2.5)$$

либо существует число $\varepsilon > 0$ и стратегия $V^e \in \mathfrak{V}$ такие, что для всех квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, V^e]$ будет обеспечено уклонение в момент ϑ от ε-окрестности множества M, т.е.

$$X[\vartheta, t_0, x_0, V^e] \cap M^\varepsilon = \varnothing, \quad (2.6)$$

где

$$M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \min_{\bar{x}\in M}\|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}. \quad (2.7)$$

Заметим, что в теореме 2.1 «роль» стратегий U^e и V^e выполняют экстремальные (к специальным стабильным множествам) стратегии. Причем u-стабильное множество (для построения U^e) «обрывается» в момент ϑ на M, а (при нахождении V^e) v-стабильное множество в момент ϑ минует ε-окрестность M.

Замечание 2.1. Меняя роли стратегий U и V, получаем следующую альтернативу: пусть задано некоторое замкнутое множество M и выполнены условия 2.1. Тогда, какова бы ни была начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$,

либо существует стратегия $V^e \in \mathfrak{V}$ такая, что $x[\vartheta, t_0, x_0, V^e] \in M$ для всех квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, V^e] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V^e]$;

либо существует число $\varepsilon > 0$ и стратегия $U^e \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$X[\vartheta, t_0, x_0, U^e] \cap M^\varepsilon = \varnothing.$$

2.3. Минимакс, максимин и седловая точка

Снова будем рассматривать антагонистическую позиционную дифференциальную игру Γ_a в квазидвижениях и скалярной терминальной функцией выигрыша (платой)

$$\langle \{1, 2\}, \Sigma_a, \{\mathfrak{A}, \mathfrak{V}\}, F(x[\vartheta]) \rangle. \tag{2.8}$$

Здесь снова 1 и 2 – номера игроков, первый из которых минимизирует плату $F(x[\vartheta])$ за счет выбора «своей» стратегии $U \in \mathfrak{A}$, второй — максимизирует ее за счет выбора и использования стратегии $V \in \mathfrak{V}$, множества этих стратегий определены в (2.1); управляемая система Σ_a описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \tag{2.9}$$

при этом предполагаются выполненными условия 2.1.

Игра происходит следующим образом. Первый игрок выбирает и использует какую-либо одну из «своих» стратегий $U \in \mathfrak{A}$, исходя из желания минимизировать $F(x[\vartheta])$, второй — выбирает $V \in \mathfrak{V}$, следуя противоположной цели. Стратегия (ситуация) (U, V) порождает из начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ пучок $\mathcal{X}[t_0, x_0, U, V]$

квазидвижений $x[t, t_0, x_0, U, V]$, $t_0 \le t \le \vartheta$. Тогда первый игрок проигрывает $F(x[\vartheta, t_0, x_0, U, V])$, а второй столько же выигрывает.

Решением игры (2.8), «с точки зрения» первого игрока, является *минимаксная стратегия* $U^0 \in \mathfrak{A}$:

$$\min_{U\in\mathfrak{A}} \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U]) = \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0]) = F_* \qquad (2.10)$$

Число F_* называют *минимаксом* игры (2.8).

Напомним, что все приводимые ниже утверждения доказаны в [7].

Минимаксная стратегия обладает следующими двумя свойствами.

Свойство 2.1. Равенство (2.10) эквивалентно неравенству

$$\max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U]) \ge \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0]) \quad \forall U \in \mathfrak{A}. \qquad (2.11)$$

Напомним, что первый игрок минимизирует $F(x[\vartheta])$, поэтому при фиксированной «своей» стратегии $U \in \mathfrak{A}$ самым «плохим» для него проигрышем будет

$$\max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U]) = \max_{x[\cdot]\in\mathcal{X}[t_0,x_0,U]} F(x[\vartheta]) = F(x^*[\vartheta, t_0, x_0, U]).$$

Этот проигрыш (при фиксированной стратегии U первого игрока) достигается на том квазидвижении $x^*[\cdot, t_0, x_0, U]$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U]$, на котором реализуется максимум в задаче

$$F(x) \to \max$$

при ограничении

$$x \in X[\vartheta, t_0, x_0, U],$$

где множество $X[\vartheta, t_0, x_0, U]$ определено в утверждении 1.3.

Тогда неравенство (2.11) означает, что наименьший из всех возможных «плохих» (максимальных) проигрышей первый игрок достигнет, используя минимаксную стратегию U^0.

Из второго равенства в (2.10) непосредственно следует

Свойство 2.2.

$$F_* \ge F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0])$$

для любых квазидвижений $x[\cdot]$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U^0]$.

Таким образом, применяя стратегию $U^0 \in \mathfrak{A}$, первый игрок гарантирует себе проигрыш не больший F_*.

Объединение свойств 2.1 и 2.2 приводит к тому, что из всех проигрышей для первого игрока самый «хороший» (наименьший) есть F_* из (2.10) и гарантируется (обеспечивается) он применением минимаксной стратегии U^0. В этом состоит применение принципа гарантированного результата из [1] для первого игрока.

Аналогично для второго (максимизирующего $F(x[\vartheta])$) игрока решение игры (2.8) определяется *максиминной стратегией* $V^0 \in \mathfrak{V}$:

$$\max_{V \in \mathfrak{V}} \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V]) = \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V^0]) = F^*. \qquad (2.12)$$

Число F^* называют *максимином* игры (2.8).

Свойство 2.3. Первое равенство из (2.12) эквивалентно неравенству

$$\min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V^0]) \geq \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V]) \quad \forall\ V \in \mathfrak{V}.$$

Из второго равенства в (2.12) получаем

Свойство 2.4.

$$F^* \leq F(x[\vartheta, t_0, x_0, V^0])$$

для любых квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, V^0]$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, V^0]$.

Объединение свойств 2.3 и 2.4 приводит к реализации принципа гарантированного результата для второго (максимизирующего $F(x[\vartheta])$) игрока. Именно, из всех «плохих» (наименьших) выигрышей для второго игрока большим будет тот, который гарантируется применением максиминной стратегии V^0.

Связь между минимаксом и максимином игры (2.8) устанавливает

Утверждение 2.1.

$$F_* \geq F^*,$$

где минимакс F_* и максимин F^* определены, соответственно, в (2.10) *и* (2.12).

Определение 2.1. *Ситуация* $(U^0, V^0) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{V}$ *называется* $[7, .48]$ *седловой точкой дифференциальной игры* (2.8)*, если*

$$F^* = \max_{V \in \mathfrak{V}} \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V]) = \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, V^0]) = \\ = \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0]) = \min_{U \in \mathfrak{A}} \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U]) = F_*. \quad (2.13)$$

Число $F^0 = F_* = F^*$ называют [7, с. 45] *ценой игры* (2.8).

Замечание 2.2. Из (см. далее (2.14)) и (2.13) следует, что

$$F^0 = F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0]) = \max_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0]) = \\ = \min_{x[\cdot]} F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0]) = F_* = F^*$$

для любых квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, U^0, V^0]$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* 2.1 *и равенство* (2.2)*. Тогда при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *в игре* (2.8) *существуют максиминная* V^0*, минимаксная* U^0 *стратегии, которые образуют седловую точку* (U^0, V^0)*; причем для каждой начальной позиции* (t_0, x_0) *значение* F^0 *единственно.*

Доказательство аналогичной теоремы для движений проведено в [7, с. 73-77] и основывается только на теореме об альтернативе. Альтернатива верна и для квазидвижений (теорема 2.1) и поэтому эти доказательства остаются в силе и для квазидвижений.

Замечание 2.3. Если выполнены условия 2.1, то в игре (2.8) при любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ существуют максиминная V^0 и минимаксная U^0 стратегии.

Отметим, что здесь не требуется выполнения условия седловой точки для маленькой игры (2.2).

2.4. Свойства седловой точки

Свойство 2.5. Ситуация $(U^0, V^0) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{V}$ является седловой точкой игры (2.8) тогда и только тогда, когда

$$F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0]) \le F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0]) \le F(x[\vartheta, t_0, x_0, V^0]) \quad (2.14)$$

для всех квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, U^0]$, $x[\cdot, t_0, x_0, U^0, V^0]$, $x[\cdot, t_0, x_0, V^0]$.

Свойство 2.6. Пусть (U^0, V^0) – седловая точка игры (2.8). Тогда для любых квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, U^0, V^0])$ из пучка $\mathcal{X}[t_0, x_0, U^0, V^0]$ цена игры (2.8) имеет единственное значение

$$F^0 = F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0]) = F_* = F^*.$$

Две седловые точки $(U^{(1)}, V^{(1)})$ и $(U^{(2)}, V^{(2)})$ называются *взаимозаменяемыми*, если седловыми точками этой игры будут $(U^{(1)}, V^{(2)})$ и $(U^{(2)}, V^{(1)})$, и *эквивалентными*, если

$$F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^{(1)}, V^{(1)}]) = F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^{(2)}, V^{(2)}]),$$

для любых квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, U^{(j)}, V^{(j)}]$ $(j = 1, 2)$.

Свойство 2.7. Все седловые точки игры (2.8) эквивалентны и взаимозаменяемы.

Замечание 2.4. Седловая точка (U^0, V^0) принята в качестве решения антагонистической позиционной дифференциальной игры (2.8) по следующим причинам.

1. Гарантированные значения функции выигрыша (платы) этой игры (минимакс F_* (2.10) и максимин F^* (2.12)) совпадают со значением платы F^0 в седловой точке (равенства (2.13)), т. е. при использовании седловой точки гарантированные результаты для первого и второго игроков совпадают.

2. Цена игры $F^0 = F(x[\vartheta, t_0, x_0, U^0, V^0])$ одна и та же для любых седловых точек (свойство эквивалентности).

3. Все седловые точки взаимозаменяемы, т.е. каждому игроку безразлично, из какой седловой точки использовать свою стратегию. Эта стратегия в паре со стратегией другого игрока (также из любой седловой точки) образуют седловую точку игры (2.8).

Замечание 2.5. Из утверждения 2.1 следует: если в игре (2.8.) не существует седловой точки, то $F_* > F^*$. Пример такой игры приведен в [9, с. 242-244]. Такая ситуация может возникнуть, если не выполнено условие (2.2) седловой точки в маленькой игре. Однако и в этом случае существования седловой точки можно добиться, если расширить классы используемых стратегий до смешанных или применять пару — стратегия одного игрока и контрстратегия другого. Доказательство существования седловой точки дифференциальной игры (2.8) при замене множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{V}$ чистых стратегий на смешанные или стратегии-контрстратегии в классе квазидвижений проводятся аналогично [7, с. 289, 364], но с естественной заменой соответствующих движений на квазидвижения.

2.5. Следствие из альтернативы

Для теоретических построений в следующем разделе статьи используется следствие из альтернативы. Оно формулируется для игры (2.8), когда в ней участвует только один игрок. Систему (2.9) в этом случае перепишем в виде

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x, v), \quad x[t_0] = x_0. \tag{2.15}$$

Здесь, как и прежде, фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^m$, фиксирована начальная позиция $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, $\vartheta = const > t_0 \geq 0$; стратегию V отождествляем с функцией $v(t, x) \subseteq Q$; множество таких стратегий обозначаем через $\mathfrak{V}$.

Предполагаем выполненными условия 2.1, т.е. функция $\bar{f}(t, x, v)$ непрерывна, локально липшицева по x и t, имеет место неравенство (1.3), множество Q замкнуто и ограничено, а $F(x)$ непрерывна. Рассмотрим область достижимости системы (2.15) из позиции (t_0, x_0), то есть множество

$$X[Q] = X[\vartheta, t_0, x_0, V \div Q] = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} x[\vartheta, t_0, x_0, V].$$

Множество $X[Q]$ замкнуто и ограничено (компакт) в $\mathbb{R}^m$, его образуют правые (при $t = \vartheta$) концы квазидвижений $x[t, t_0, x_0, V \div Q]$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$ системы (2.15), порожденные стратегией $V \div Q$ из позиции (t_0, x_0).

Пусть теперь M — некоторое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$ такое, что пересечение его с $X[Q]$ не пусто:

$$M_X = X[Q] \cap M \neq \varnothing. \tag{2.16}$$

Тогда множество M_X также замкнуто. Имеет место

Утверждение 2.2. *Предположим, что выполнены условия* 2.1 *и начальная позиция* (t_0, x_0) *такова, что для заданного замкнутого непустого множества* $M \subset \mathbb{R}^m$ *имеет место условие* (2.16).

Тогда существует стратегия $V^* \in \mathfrak{V}$*, для которой*

$$X[\vartheta, t_0, x_0, V^*] \subseteq M_X. \tag{2.17}$$

Включение (2.17) означает, что каким бы ни было замкнутое множество M, пересекающееся с областью достижимости системы (2.15), всегда найдется стратегия $V^* \in \mathfrak{V}$, которая любое квазидвижение $x[\cdot, t_0, x_0, V^*]$ системы (2.15), порожденное V^* из позиции (t_0, x_0), «приводит» в момент ϑ (окончания движения) в множество M_X, то есть справедливо включение

$$x[\vartheta, t_0, x_0, V^*] \in M_X$$

для каждого квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, V^*] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V^*]$.

Доказательство. Доказательство утверждения 2.2 основывается на теореме 2.1 об альтернативе. Чтобы ее применить, систему (2.15) перепишем в виде

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x, v) + 0_n u, \tag{2.18}$$

где $u \in [0, 1]$, 0_n — n-вектор с нулевыми компонентами. Таким образом, в системе (2.18) управление u будем трактовать как управляющее воздействие «фиктивного» игрока. Его стратегию U отождествляем со скалярной функцией $u(t, x) \in [0, 1]$ (для всех возможных позиций $(t, x) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$) и множество таких стратегий обозначим $\mathfrak{A}$. Условия 2.1 и замкнутость множества M обеспечивают все требования теоремы 2.1 об альтернативе в случае системы (2.18). Проверим, например, выполнение условия седловой точки в маленькой игре. Здесь следует (согласно (2.2)) показать, что для любых $z \in \mathbb{R}^m$ и позиций $(t, x) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ существует набор $(u^0, v^0) \in [0, 1] \times Q$ такой, что

$$z'[\bar{f}(t, x, v) + 0_n u^0] \leq z'[\bar{f}(t, x, v^0) + 0_n u^0] \leq z'[\bar{f}(t, x, v^0) + 0_n u] \tag{2.19}$$

при всех $u \in [0, 1]$ и $v \in Q$. Соотношения (2.19) действительно имеют место: в них «роль» u^0 может играть любое число из отрезка $[0, 1]$, а вектор v^0 определяется равенством $\max\limits_{v\in Q} z'\bar{f}(t,x,v) = z'\bar{f}(t,x,v^0)$. Максимум в левой части достигается вследствие непрерывности $f(t,x,v)$ по v и компактности множества Q. Теперь имеются все основания применить к системе (2.18) и замкнутому множеству M_X из (2.16) замечание 2.1. Согласно ему при заданной начальной позиции $(t_0,x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^m$, либо найдется стратегия $V^* \in \mathfrak{V}$, которая для всех квазидвижений $x[\cdot,t_0,x_0,V^*]$ системы (2.18) обеспечит встречу с множеством M в момент ϑ, то есть $x[\vartheta,t_0,x_0,V^*] \in \in M$ для любых квазидвижений $x[\cdot,t_0,x_0,V^*]$ системы (2.18), порожденных стратегией V^* из позиции (t_0,x_0), либо возможно уклонение в момент времени ϑ от ε-окрестности множества M_X с помощью некоторой стратегии $U^* \in \mathfrak{A}$. Однако задача об уклонении не имеет решения, так как фактически стратегия U влияния на систему (2.18) не оказывает — она «воздействует» через слагаемое $0_n u$. В самом деле, для любой стратегии $U \in \mathfrak{A}$ будет $\mathcal{X}[t_0,x_0,U] = = \mathcal{X}[t_0,x_0,V \div Q]$ по определению пучков квазидвижений системы (2.18). Но тогда область достижимости $X[\vartheta,t_0,x_0,U]$ системы (2.18) (из позиции (t_0,x_0) при фиксированной стратегии $U \in \mathfrak{A}$) совпадает с областью достижимости $X[\vartheta,t_0,x_0,V \div Q]$ системы (2.18), то есть $X[\vartheta,t_0,x_0,U] = X[\vartheta,t_0,x_0,V \div Q]$. Поэтому задача уклонения от M_X с помощью какой-либо стратегии $U \in \mathfrak{A}$ решена быть не может и тогда

$$X[\vartheta,t_0,x_0,U] \cap M = X[\vartheta,t_0,x_0,V \div Q] \cap M = M_X \neq \varnothing$$

для любых $U \in \mathfrak{A}$. Согласно теореме 2.1 об альтернативе (замечанию 2.1), для системы (2.18), а значит и для (2.15), может быть решена только задача о встрече с множеством M_X. Итак (утверждение 2.2) существует $V^* \in \mathfrak{V}$, для которой справедливо (2.17). $\square$

В дальнейшем также используется

Следствие 2.1. *При выполнении условий* 2.1 *для любой точки области достижимости* $x^* \in X[\vartheta,t_0,x_0,V \div Q]$ *существует стратегия* $V^* \in \mathfrak{V}$*, при которой имеет место равенство* $x[\vartheta,t_0,x_0,V^*] = x^*$ *при всех квазидвижениях* $x[\cdot,t_0,x_0,V^*]$ *системы* (2.15)*, порожденных стратегией* V^* *из позиции* (t_0,x_0)*.*

Так как точка x^* представляет собой замкнутое множество в $X[\vartheta, t_0, x_0, V \div Q]$, то справедливость следствия 2.1 сразу следует из утверждения 2.2.

3. Дифференциальная игра с «разделенной» динамикой

Здесь устанавливается существование равновесной по Бержу ситуации в одной бескоалиционной позиционной дифференциальной игре (БПДИ) многих лиц с «разделенной» динамикой. Доказательство базируется на применении, *во-первых*, гермейеровской свертки функций выигрыша (см. [1]), *во-вторых*, теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, именно, использовании там математической формализации квазидвижений (см. предыдущие два раздела настоящей статьи) и, наконец, *в-третьих*, предложенным в [7, § 57] способом управления с поводырем.

3.1. Предварительные сведения

Рассматривается БПДИ вида

$$\langle \mathbb{N}, \{\Sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\mathfrak{V}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{F_i(x[\vartheta])\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{3.1}$$

где, как и в (1.1), множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$, изменение (во времени) управляемой подсистемы Σ_i описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, v_i),\ x_i[t_0] = x_i^0 \ \ (i \in \mathbb{N}), \tag{3.2}$$

здесь $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ являются компонентами фазового вектора $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^m$ $(m = \sum m_i)$, управляющее воздействие i-го игрока $v_i \in Q_i \in comp\, \mathbb{R}^{n_i}$, время $t \in [t_0, \vartheta]$, постоянные $\vartheta > t_0 \geq 0$; предполагаем, что для элементов упорядоченного набора (3.1) выполнен аналог условий 1.1 и 1.2, именно, имеют место

Условия 3.1. *Компоненты m_i-вектор-функций $f_i(t, x_i, v_i)$ определены и непрерывны по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{1+m_i} \times Q_i$, локально липшицевы по первой и второй переменной, то есть*

$$\|f_i(t^{(1)}, x_i^{(1)}, v_i) - f_i(t^{(2)}, x_i^{(2)}, v_i)\| \leq \lambda_i(G)(\|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\| + |t^{(1)} - t^{(2)}|),$$

где $\forall\ (t^{(j)}, x_i^{(j)}) \in [0, \vartheta) \times G_i$ $(j = 1, 2)$, а G_i — любое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^{m_i}$, $\lambda_i(G_i) = const > 0$ — постоянная Липшица, *зависящая от множества G_i; выполнено ограничение подлинейного роста: $\exists\ k_i = const > 0$, для которой $\|f_i(t, x_i, v_i)\| \leq k_i(1 + \|x_i\|)$ при любых $(t, x_i, v_i) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{m_i} \times Q_i$; кроме того функция выигрыша i-го игрока $F_i(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$ $(i \in \mathbb{N})$.*

Систему (3.2) далее представим в виде

$$\dot{x} = f(t, x, v),\ \ x[t_0] = x_0, \tag{3.3}$$

здесь уже фазовый m-вектор $x = (x_1, \ldots, x_N)$, управляющие воздействия $v = (v_1, \ldots, v_N) \in Q = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} Q_i \in \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} n_i)$, m-вектор–столбец $f = (f_1, \ldots, f_N)$.

Предполагаем далее, не оговаривая особо, что условия 3.1 выполнены для каждой i-ой подсистемы $(i \in \mathbb{N})$ из (3.2), откуда будет следовать, что эти же условия имеют место и для всей системы (3.3) ибо здесь $\|f\| = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \|f_i\|$.

Напомним, что *стратегия* V_i для i-го игрока в игре (3.1) отождествляется с n_i-вектор-функцией $v_i(t, x) \in Q_i\ \forall\ (t, x) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ (этот факт обозначается $V_i \div v_i(t, x)$); множество таких стратегий $\{V_i\}$ представлено символом $\mathfrak{V}_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Используем также ситуацию $V = (V_1, \ldots, V_N) \in \mathfrak{V} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}_i$ и $V \div v(t, x) = (v_1(t, x), \ldots, v_N(t, x)) \in Q$.

БПДИ (3.1) может представлять, например, математическую модель конкуренции двух, трех и т. д. производителей, у которых отсутствуют прямые производственные связи (последним обстоятельством как раз и вызвана «разделенность» динамики в системе (3.3)). Это же БПДИ можно использовать и как математическую модель динамики нескольких механических самостоятельно управляемых объектов, осуществляющих, например, сближение к заданному моменту времени ϑ.

Определение 3.1. *Ситуация $V^B = (V_1^B, \ldots, V_N^B) \in \mathfrak{V}$ называется равновесной по Бержу для игры (3.1), если*

$$\max_{x[\cdot] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V_i^B]} F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V_i^B]) \leq$$

$$\leq \min_{x[\cdot] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V^B]} F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B])\ \ (i \in \mathbb{N}). \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Согласно утверждениям 1.4, 1.5 и включениям

$$\mathcal{X}[t_0, x_0, V^B] \subset \mathcal{X}[t_0, x_0, V_i^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$
$$X[\vartheta, t_0, x_0, V^B] \subset X[\vartheta, t_0, x_0, V_i^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

неравенства (3.4) эквивалентны выполнению неравенств

$$F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V_i^B]) \leq F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B]) \quad (i \in \mathbb{N})$$

при любых квазидвижениях

$$x[\cdot, t_0, x_0, V_i^B]) \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V_i^B], \quad x[\cdot, t_0, x_0, V^B]) \in \mathcal{X}[t_0, x_0, V^B]$$

системы (3.3), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) стратегией V_i^B и ситуацией V^B соответственно, причем значение $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B])$ будет *единственным* при $\forall\, i \in \mathbb{N}$ и $\forall x[\cdot, t_0, x_0, V^B] \in$ $\in \mathcal{X}[t_0, x_0, V^B]$.

Замечание 3.2. Здесь и далее запись «стратегия $V_i \div Q_i$» будет означать, что «используется любая из стратегий $V_i \in \mathfrak{V}_i$». Из определения пучка квазидвижений $\mathcal{X}[t_0, x_0, V_i^B]$ и утверждения 1.4 следует, что пучок $\mathcal{X}[t_0, x_0, V_i^B]$ при $\forall\ i \in \mathbb{N}$ включает в себя все квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, V_1 \div Q_1, \ldots, V_{i-1} \div Q_{i-1}, V_i^B \div v_i^B(t,x), V_{i+1} \div Q_{i+1}, \ldots, V_N \div Q_N]$, а значит и квазидвижение $x[\cdot, t_0, x_0, V_1^B, \ldots, V_{i-1}^B, V_i^B, V_{i+1}^B, \ldots, V_N^B] =$ $= x[\cdot, t_0, x_0, V^B]$. Отсюда как раз и получаем единственность значения $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B])$ $(i \in \mathbb{N})$ в (3.4).

3.2. Управление с поводырем

Надежда на существование ситуации равновесия по Бержу в игре (3.1) (в смысле определения 3.1) весьма и весьма проблематична. Для решения такой задачи привлечем идею управления с поводырем из [7, § 57], которую предложил академик Николай Николаевич Красовский при построении седловой точки антагонистической позиционной дифференциальной игры, устойчивой по отношению к информационным помехам. «Введение поводыря можно рассматривать как включение в схему управления некоторого регулятора, моделирующего управляемый объект на ЭВМ» [7, с. 248]. Следуя такому подходу, «расширим» для каждого $i \in \mathbb{N}$ управляемую систему (3.2), добавив к (3.2) динамическую систему, описывающую изменение (во времени) состояния $z_i(t)$ для i-го поводыря

$$\dot{z}_i = f_i(t, z_i, u_i),\ \ z_i[t_0] = x_i^0 \ \ (i \in \mathbb{N}),$$

где $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $u_i \in Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Аналогично переходу от (3.2) к (3.3) приходим к векторному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = f(t, z, u),\ \ z[t_0] = x_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0). \tag{3.5}$$

Здесь уже вектора
$z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^m$, $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, $u = (u_1, \dots, u_N) \in Q = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, напомним, что вектор-столбец $f = (f_1, \dots, f_N) \in \mathbb{R}^m$. Следуя «идее поводыря», присоединим (3.5) к системе (3.3) и тогда изменение (во времени) «новой расширенной» управляемой системы Σ_e будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений $2m$-го порядка

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x} = f(t, x, v), x[t_0] = x_0,\\ \dot{z} = f(t, z, u), z[t_0] = x_0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \{\dot{y} = \bar{f}(t, y, u, v),\ y[t_0] = y_0 = (x_0, x_0)\}, \tag{3.6}$$

где уже будут $2m$-вектора–столбцы $y = (x, z)$ и $\bar{f}(t, y, u, v) = (f(t, x, v), f(t, z, u))$. Пучок квазидвижений системы (3.6) $y[t, t_0, y_0, U, V]$, $t_0 \le t \le \vartheta$, порожденных «расширенной» ситуацией $(\bar{U}, \bar{V}) \in \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{V}}$ из начальной позиции (t_0, y_0) будем обозначать через $\mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{U}, \bar{V}]$, аналогично $\mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}]$ — пучок квазидвижений $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}]$ этой же системы (3.6), построенный в соответствии с требованиями раздела 1.4 и определения 1.2.

Как уже отмечалось, уравнение (3.5) описывает движение (изменение состояния во времени t) поводыря, который, в свою очередь, представляет объединение N поводырей, заданных, в свою очередь, уравнениями $\dot{z}_i = f_i(t, z_i, u_i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Стратегия $\bar{U} \div u(t, x, z) \in Q$ в процессе синтеза управляющих воздействий симулирует квазидвижение управляемой системы (3.5), заданной таким же как (3.3) уравнением (3.5) с теми же начальными условиями $(z[t_0] = x_0)$ и с теми же ограничениями на управляющие воздействия $(u_i \in Q_i)$.

Итак от БПДИ (3.1) переходим, за счет добавления поводыря, к «расширенной» БПДИ

$$\Gamma_e = \langle \mathbb{N}, \Sigma_e \div (3.6), \{\bar{\mathfrak{A}}_i, \bar{\mathfrak{V}}_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{F_i(x[\vartheta])\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где, как и в (3.1), множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$, но, в отличие от (3.1), позицию игры Γ_e образует уже тройка $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, здесь фазовый вектор $(x, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, m-вектора $x = (x_1, \dots, x_N)$, $z = (z_1, \dots, z_N)$ и $x_i, z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i \in \mathbb{N})$; поэтому стратегией i-го игрока уже будет $\bar{V}_i \div \bar{v}_i(t, x, z) \in Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$, множество таких $\{\bar{V}_i\}$ обозначаем символом $\bar{\mathfrak{V}}_i$, аналогично для i-го поводыря $\bar{U}_i \div \bar{u}_i(t, x, z) \in Q_i$ $\forall (t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, а $\{\bar{U}_i\}$ обозначим $\bar{\mathfrak{A}}_i$; заметим, что выбор пары $(\bar{V}_i, \bar{U}_i) \in \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i$ осуществляется $i-$ым игроком $(i \in \mathbb{N})$; тогда «роль расширенной» ситуации в игре Γ_e выполняет пара $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, где $\bar{V} = (\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_N) \in \bar{\mathfrak{V}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{V}}_i$, $\bar{U} = (\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_N) \in \bar{\mathfrak{A}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{A}}_i$, $\bar{V}_i \div \bar{v}_i(t, x, z)$, $\bar{V}_i \in \bar{\mathfrak{V}}_i$ и $\bar{U}_i \div \bar{u}_i(t, x, z)$, $\bar{U}_i \in \bar{\mathfrak{A}}_i$ $(i \in \mathbb{N})$; одновременно далее будут использоваться и ситуации $(\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{i-1}, \bar{V}_i, \bar{U}_{i+1}, \dots, \bar{U}_N) = (\bar{U} \parallel \bar{V}_i) \in \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \dots \times \bar{\mathfrak{A}}_{i-1} \times \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_{i+1} \times \dots \times \bar{\mathfrak{A}}_N$. В игре Γ_e каждый i-ый игрок выбирает свою «расширенную» стратегию $(\bar{V}_i, \bar{U}_i) \in \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i$ $(i \in \mathbb{N})$; в результате образуется «расширенная» ситуация $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, где $\bar{V} \div \bar{v}(t, x, z) = (\bar{v}_1(t, x, z), \dots, \bar{v}_N(t, x, z))$ и $\bar{U} \div \bar{u}(t, x, z) = (\bar{u}_1(t, x, z), \dots, \bar{u}_N(t, x, z))$. Затем, согласно первому и второму разделу настоящей статьи, строятся пучки $\mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}, \bar{U}]$ квазидвижений $y[t, t_0, y_0, \bar{V}, \bar{U}]$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$ системы (3.6), порожденные из начальной позиции (t_0, x_0, x_0) «расширенной» ситуацией $(\bar{V}, \bar{U})$ (в силу условий 3.1 для системы (3.6) выполнены ограничения из условий 1.1), а сам пучок $\mathcal{Y}[t_0, x_0, x_0, \bar{V}, \bar{U}]$ образуют пары квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}]$, $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]$ соответственно подсистем $\dot{x} = f(t, x, v)$, $x[t_0] = x_0$ и $\dot{z} = f(t, z, u)$, $z[t_0] = x_0$. Наконец, функция выигрыша i-го игрока определяется функционалом $F_i(x[\vartheta])$, здесь $x[\vartheta] \in X[\vartheta, t_0, x_0, V]$, сам *выигрыш* i-го игрока — значением этого функционала $F_i(x[\vartheta])$. Заметим, что функционалы $F_i(x[\vartheta])$ определены на «правых концах» квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}] \in \mathcal{X}[t_0, x_0, \bar{V}]$ системы (3.3), порожденных из (t_0, x_0) набором $\bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$, то есть $x[\vartheta] = x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}] \in X[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}] = \mathcal{X}[t_0, x_0, \bar{V}] \cap \{t = \vartheta\}$. Применяем далее и функционалы $F_i(z[\vartheta] \parallel x_i[\vartheta])$, где

$$(z[\vartheta] \parallel x_i[\vartheta]) = (z_1[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_1], \dots, z_{i-1}[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_{i-1}], x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i],$$

$$z_{i+1}[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_{i+1}], \dots, z_N[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_N]) \;\; \forall \bar{U}_j \in \bar{\mathfrak{A}}_j \;\; (j \in \mathbb{N} \backslash \{i\}).$$

Отметим также, что расширение пространства позиций от (t, x) до

(t, x, z) и является основой доказательства существования равновесной по Бержу ситуации, конечно, наряду с применением гермейеровской свертки функций выигрыша и теории антагонистических позиционных дифференциальных игр (в квазидвижениях). Итак, подчеркнем еще раз, что в системе (3.6) (с «расширенной динамикой» за счет N поводырей ($i \in \mathbb{N}$)) позицией игры, уже становится тройка $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$.

Аналогом определения 3.1 здесь уже можно считать

Определение 3.2. *Набор стратегий* $\bar{V}^B = (\bar{V}_1^B, \ldots, \bar{V}_N^B) \in \bar{\mathfrak{V}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{V}}_i$ *назовем реализующим в игре* Γ_e *концепцию равновесности по Бержу, если*

$$F_i(z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}] \parallel x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i^B]) \le F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B]) \quad (i \in \mathbb{N}), \quad (3.7)$$

при любых квазидвижениях $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}] \in \mathcal{Z}[t_0, x_0, \bar{U}]$ *системы (3.5), порожденных из начальной позиции* (t_0, x_0) *любым возможным набором стратегий* $\bar{U} = (\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_N) \div \bar{u}(t, x, z) \in Q$ $\forall (t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ *и любых квазидвижениях* $x[t, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ *системы (3.3), порожденных из* (t_0, x_0, x_0) *набором стратегий* $\bar{V}^B = (\bar{V}_1^B, \ldots, \bar{V}_N^B) \in \bar{\mathfrak{V}}$, $\bar{V}_i^B \div \bar{v}_i^B(t, x, z) \in Q_i$ $\forall (t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ $(i \in \mathbb{N})$, *напомним, что* $(z \parallel x_i) = (z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_N)$.

Заметим, что пучки

$$\mathcal{Y}[t_0, y_0, V^B] \subset \mathcal{Y}_i[t_0, y_0, V_i^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

и поэтому при «замороженных» $(t_0, y_0) = (t_0, x_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, $\bar{V}_i^B \in \bar{\mathfrak{V}}_i$ выигрыш каждого i-го игрока $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B])$ единственен (что сразу следует из (3.7)).

Целью этого раздела статьи является доказательство существования такого набора $\bar{V}^B$ (при выполнении условий 3.1).

3.3. Вспомогательная антагонистическая игра

Для доказательства существования набора $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$, реализующего концепцию равновесности по Бержу (далее, для краткости называем *равновесным по Бержу набором стратегий в игре* Γ_e) будем использовать вспомогательную антагонистическую позиционную дифференциальную игру

$$\Gamma_a = \langle \{I, II\}, \Sigma \div (3.6), \bar{\mathfrak{V}}, \bar{\mathfrak{A}}, \varphi(x[\vartheta], z[\vartheta])) = \varphi(y[\vartheta]) \rangle. \quad (3.8)$$

В ней стратегии $\bar{V}$ у I-го игрока (минимизирующего функционал $\varphi(x[\vartheta], z[\vartheta]))$ отождествляются с n-вектор–функциями $\bar{v}(t, x, z) \in Q$ при любых $t \in [0, \vartheta)$ и $(x, z) \in \mathbb{R}^{2m}$, множество $\{\bar{V}\}$ обозначили символом $\bar{\mathfrak{V}}$; стратегии II-го игрока $\bar{U}$ (максимизирующего $\varphi(x[\vartheta], z[\vartheta]))$ вводятся аналогично: $\bar{U} \div \bar{u}(t, x, z) \in Q$ при всех $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ и $\{\bar{U}\} = \bar{\mathfrak{A}}$, применяем далее и ситуации $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$. Затем, следуя разделу 1.4, строим пучки квазидвижений $\mathcal{X}[t_0, x_0, \bar{V}]$ системы (3.3), $\mathcal{Z}[t_0, x_0, \bar{U}]$ системы (3.5) и $\mathcal{Y}[t_0, x_0, \bar{V}, \bar{U}]$ системы (3.6) порожденных из (t_0, x_0) стратегией I-го игрока $\bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$, стратегией $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ игрока II и ситуацией $(\bar{V}, \bar{U})$ соответственно, при этом используем также $2m$ вектор-столбец $y = (x, z)$.

Функция выигрыша игрока II (проигрыша игрока I) формируется следующим образом (с помощью функций выигрыша $F_i(x[\vartheta])$ для $i-$го игрока в игре Γ_e). Именно, каждая из скалярных функций $F_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ определена на области достижимости $X[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V} \div Q] = X[\bar{V} \div Q]$ системы (3.3), причем $X[\bar{V} \div Q]$ совпадает с областью достижимости $Z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U} \div Q] = Z[\bar{U} \div Q]$ системы (3.5). Эти области достижимости являются компактами в $\mathbb{R}^m$. С помощью $F_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ уже аналитически конструируем примененную в (3.8) скалярную функцию

$$\varphi(y) = \max_{i \in \mathbb{N}} [F_i(z \parallel x_i) - F_i(x)]. \tag{3.9}$$

Утверждение 3.1. *При выполнении условий* 3.1 *в игре* Γ_a *существует седловая точка* $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, (*она определяется цепочкой неравенств*

$$\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B]) \leq \varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0]) \leq \varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0]) \tag{3.10}$$

для любых квазидвижений
$y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B] \in \mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B]$, $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0] \in \mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0]$ *и* $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{U}^0] \in \mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{U}^0]$ *системы* (3.6), *порожденных из начальной позиции* (t_0, x_0) *стратегией I-го игрока* $\bar{V}^B$, *ситуацией* $(\bar{V}^B, \bar{U}^0)$ *и* $\bar{U}^0$ *— стратегией игрока II соответственно*).

Доказательство. Согласно теореме 2.2 в игре Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$ при любом выборе начальной позиции $(t_0, y_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, если выполнены условия 3.1, функция $\varphi(x, z)$

непрерывна на $X[V \div Q] \times Z[U \div Q]$ и имеет место условие седловой точки для маленькой игры (аналог (2.2) для системы (3.6)). Если $F_i(x)$ непрерывна, то [8, с. 54] непрерывной по $x \in X[V \div Q]$ и $z \in Z[U \div Q]$ будет и $\varphi(x, z)$ (следует из компактности в $\mathbb{R}^m$ множеств $X[V \div Q]$ и $Z[U \div Q]$, а также непрерывности $F_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$). Проверим, наконец, выполнение условия седловой точки для маленькой игры: согласно (2.2) это требование означает, что для каждой позиции $(t, y) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ и любого $2m$-вектора $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ существует седловая точка $(v^B, u^0) \in Q \times Q$

$$\max_{v \in Q}[s_1' f(t, x, v) + s_2' f(t, z, u^0)] = s_1' f(t, x, v^B) + s_2' f(t, z, u^0) = \\ = \min_{u \in Q}[s_1' f(t, x, v^B) + s_2' f(t, z, u)] \quad \forall u, v \in Q \quad (3.11)$$

(напомним, что штрих сверху означает операцию транспонирования и поэтому s' есть m-вектор-строка).

Из «разделенности» (3.11) следует, что выполнение (3.11) эквивалентно существованию пары $(v^B, u^0) \in Q^2$, удовлетворяющей двум равенствам

$$\max_{v \in Q} s_1' f(t, x, v) = s_1' f(t, x, v^B),$$
$$\min_{u \in Q} s_2' f(t, z, u) = s_2' f(t, z, u^0),$$

а само существование (v^B, u^0) при «замороженных» $(t, x, z, s_1, s_2) \in$ $\in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{4m}$ сразу получаем из непрерывности $f(t, x, v)$, $f(t, z, u)$ по управляющим воздействиям $v \in Q$, $u \in Q$, а также компактности Q (теорема Вейерштрасса).

Итак, установлено, что при выполнении условий 3.1 в Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$. □

3.4. Теорема существования

Теорема 3.1. *Пусть для игры* (3.1) *выполнены условия* 3.1. *Тогда при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *в бескоалиционной дифференциальной позиционной игре* Γ_e *существует равновесный по Бержу набор стратегий* $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$, *т. е. для* $\bar{V}^B$ *имеет место* (3.7).

Доказательство. Согласно утверждению 3.1 в игре Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, для которой имеет место цепочка неравенств (3.10). В правом неравенстве из (3.10) каждое квазидвижение $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{U}^0]$ образуют два квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ систем (3.3) и (3.5) соответственно, где могут использоваться $\forall\ \bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$. Положив здесь $\bar{V} = \bar{U}^0$ получаем, что при любых таких квазидвижениях $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ функция $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0, \bar{U}^0]) = 0$. В самом деле, для каждого квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ найдется совпадающее (при каждом $t \in [t_0, \vartheta]$) с ним $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ и обратно. Заметим, что этого результата можно добиться, применяя следствие 2.1.

Из (3.10) и $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0, \bar{U}^0]) = 0$ следует, с учетом единственности, что $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0]) \le 0$, и тогда снова, согласно (3.10), имеем

$$\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B]) \le 0 \ \ \forall\ y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B] \in \mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B].$$

Любое квазидвижение $y[\cdot, t_0, y_0, V^B]$, согласно (3.6), образуют всякие пары квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]$ системы (3.3), порожденные набором $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$ и системы (3.5), порожденные каким-либо набором $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ соответственно из одной и той же начальной позиции (t_0, x_0).

Так как $\varphi(x, z) = \max\limits_{i \in \mathbb{N}}[F_i(z \parallel x_i) - F_i(x)] \le 0$ (см. (3.10)), то отсюда для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$F_i(z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}] \parallel x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i^B]) - F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B]) \le 0 \qquad (3.12)$$

при любых квазидвижениях $z[\cdot, t_0, x_0, U]$ системы (3.5) для всяких $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ и всех квазидвижениях $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ системы (3.3), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) набором $\bar{U}$ и $\bar{V}^B$ соответственно. Учитывая включение $\mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B] \subset \mathcal{Y}[t_0, y_0, \bar{V}_i^B]$ $(i \in \mathbb{N})$ и выполнение неравенств (3.12) для любых участвующих в них квазидвижениях, устанавливаем,

во-первых, единственность $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B])$ для каждого $i \in \mathbb{N}$,

во-вторых, справедливость (3.7) при $\forall x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}_i^B], x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$, $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]\ \forall\ \bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: Наука, 1971.

2. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Математические основы Золотого правила. I. Статический вариант.* // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 3. С. 16–47.

3. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. *Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления.* Тбилиси: Мецниереба, 1996.

4. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. *Некоторые игровые задачи управления и их приложения.* Тбилиси: Мецниереба, 1998.

5. Кононенко А.Ф. *Структура оптимальной стратегии в динамических управляемых системах* // ЖВМ и МФ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1105–1116.

6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* М.: Наука, 1985.

7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974.

8. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* М.: Наука, 1986.

9. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантий в задачах управления.* М.: Наука, 1981.

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF THE GOLDEN RULE. II. DYNAMIC VARIANT.

Vladislav I. Zhukovskiy, Moscow State University, Dr.Sc., prof. (zhkvlad@yandex.ru).
Lidiya V. Smirnova, Moscow State University of Technologies and Management named after Rasumovskiy, Cand.Sc., associate professor (smirnovalidiya@rambler.ru).
Anton S. Gorbatov, Moscow State University, PhD student (gorbatovanton@gmail.com).

Abstract: The attempt of research extension of static variant of the Golden Rule into dynamic one is made in this article. The main point is the application of Germeier convolution of payoffs functions of players, the theory of antagonistic positional differential games in quasi motions and control with the help of guide.

Keywords: non-cooperative games, positional strategy, saddle point, Berge equilibrium.