Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.1, с. 63–79

УДК 518.9 + 517.9
ББК 65.050.2

СИЛЬНОЕ КОАЛИЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ В ТРАНСПОРТНОЙ ИГРЕ

Николай А. Зенкевич
Андрей В. Зятчин
Высшая школа менеджмента СПбГУ
199004, Санкт-Петербург, Волховский пер., 1-3
e-mail: zenkevich@gsom.spbu.ru, zyatchin@gsom.spbu.ru

В статье исследована расширенная версия открытой модели маршрутизации транспортных средств по доставке грузов, которая предполагает рассмотрение потребителей услуг транспортировки в качестве игроков. Каждый потребитель характеризуется спросом и расстоянием от места отгрузки до места назначения груза. Для этой проблемы построена коалиционная транспортная игра (CTG). В такой игре каждый потребитель (игрок) выбирает коалицию игроков, с которыми он желает кооперировать по заказу грузовика и доставке груза в пункт назначения при минимальных транспортных затратах и ограниченной грузоподъемности автомобиля в предположении, что транспортные затраты делятся между членами коалиции в соответствии с арбитражным решением Нэша. Для любой ситуации в коалиционных стратегиях определена коалиционная структура потребителей (коалиционное разбиение) и затраты каждого потребителя.

Для коалиционной транспортной игры найдено сильное равновесие. Построена вычислительная процедура нахождения сильного равновесия. Возможности практического применения вычислительной процедуры проиллюстрированы на численном примере.

Ключевые слова: транспортная игра, кооперативная транспортная игра, коалиционное разбиение, сильное коалиционное разбиение.

1. Введение

Большинство статических моделей, исследуемых в теории игр в настоящее время, делятся на два основных класса: стратегические и кооперативные игры [4]. Под стратегическими играми понимаются игры, в которых игроки своим выбором стратегий стремятся максимизировать свою функцию выигрыша. Основными принципами оптимальности в таких задачах являются равновесия по Нэшу, сильные равновесия, арбитражные схемы.

В классических кооперативных моделях изначально предполагается, что игрокам выгодно объединиться в коалицию максимального размера с целью максимизации суммарного выигрыша в силу свойства супераддитивности характеристической функции [6]. Поэтому проблема заключается в нахождении дележа максимального выигрыша. Основными принципами оптимальности в кооперативных играх являются: С-ядро, вектор Шепли, NM-решение, вектор Банзафа и т.д.

Однако в практических задачах трудно предположить возможность объединения всех игроков в одну максимальную коалицию, также как и невозможность промежуточной кооперации между участниками конфликта. Поэтому актуальной является задача формирования коалиционного разбиения при ограничении на размер коалиций, где участники конфликта объединяются в коалиции определенного размера, образующие некоторое разбиение множества игроков.

Начало исследованиям в области коалиционной теории игр положил Оуэн в 1968 году [3, 11]. Он обобщил понятие вектора Шепли для игр с коалиционными разбиениями, построив вектор Шепли-Оуэна. При вычислении этого вектора он допускал, что элементы заданного коалиционного разбиения могут действовать как отдельные игроки и объединяться в большие коалиции. Для нахождения дележа выигрыша между коалициями использовался вектор Шепли. Внутри каждой коалиции коалиционного разбиения допускалась возможность объединения игроков в подкоалиции, когда для нахождения дележа между игроками также использовался вектор Шепли. Коалиционные игры также исследовались в работах Майерсона [10] и, позднее, Ван ден Бринка и Ван дер Лаана [13]. Эти авторы ввели нормализованный вектор Банзафа для коалиционного разбиения и использовали этот принцип оптимальности для нахождения дележа в игре с коалиционным разбиением.

В данной работе предлагается новый механизм формирования коалиционного разбиения и функций выигрышей игроков на основе решения некооперативной гедонической игры. Свойства и существование устойчивых гедонических структур исследованы в работах [7-9]. В качестве принципа оптимальности этой игры использовано сильное равновесие. Для парного коалиционного разбиения похожий результат получен в работах Андерсона, Гудмундсена, Талмана и Янга [5, 12].

Транспортные игры исследовались ранее в [1, 2, 14].

2. Транспортная игра

Определим транспортную сеть G и проведем формализацию теоретико-игровой модели задачи маршрутизации транспортных средств Г.

2.1. Транспортная сеть

Рассмотрим конечное множество точек $V \subset R^2$ на плоскости R^2. Обозначим через $v = |V|$ мощность множества V. Пусть функция $\gamma{:}V \times V \to R^1_+$ является евклидовым расстоянием $\gamma(x,y)$ между точками $x, y \in V$.

Множество V и функция $\gamma(x,y)$ определяют неориентированный граф $Z = (V,E)$, где $V = \{x\}$ – множество вершин графа и $E = \{(x,y)\} = V \times V$ – множество ребер. Фиксированную вершину $a \in V$, из которой начинаются все маршруты, будем называть *депо.*

Определим транспортную сеть $G(a)$ на графе $Z = (V,E)$ как набор $G(a) = \langle V, \gamma; a \rangle$ [14].

Рассмотрим множество точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $x_i \in V$ и $\pi_X = (k_1, \ldots, k_l)$ – перестановку номеров $1, \ldots, l$ точек из X.

Определение 2.1. *Под маршрутом r обслуживания множества $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ в порядке π_X будем понимать ориентированную простую цепь, которая начинается в вершине a:*

$$r = r_{X,\pi_X} = (a, x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}),$$

где $1 \leq l < v$, $x_{k_i} \in V$, $x_{k_i} \neq x_{k_j}$, $x_{k_i} \neq a$, $k_i = 1, \ldots, l$.

Понятно, что для любого множества точек $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$ существует $l!$ маршрутов. Обозначим множество всех маршрутов через $R_0 = R_0[G(a)]$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что два различных маршрута* $r^1 = r_{X,\pi_X} = (a, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{l_1}^1) \in R_0$ *и* $r^2 = r_{Y,\pi_Y} = (a, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_{l_2}^2) \in$ $\in R_0$ *не пересекаются и писать* $r^1 \cap r^2 = \emptyset$, *если* $X \cap Y = \emptyset$.

В дальнейшем рассматриваются только непересекающиеся маршруты.

Определение 2.3. *Длиной маршрута* r_{X,π_X}, $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$, $\pi_X = (k_1, \ldots, k_l)$ *будем называть величину*

$$L(r_{X,\pi_X}) = \gamma(a, x_{k_1}) + \gamma(x_{k_1}, x_{k_2}) + \ldots + \gamma(x_{k_{l-1}}, x_{k_l}). \qquad (2.1)$$

Определение 2.4. *Кратчайшим маршрутом для множества точек X будем называть такой маршрут $r_X^{\min}$, на котором достигается наименьшее значение длины маршрута (2.1) на всех возможных перестановках π_X точек множества X:*

$$r_X^{\min} = \{(a, x_{\bar{k}_1}, \ldots, x_{\bar{k}_l}) | L(a, x_{\bar{k}_1}, \ldots, x_{\bar{k}_l}) = \min_{\pi_X} L(a, x_{k_1}, \ldots, x_{k_l})\}.$$

2.2. Формулировка транспортной игры

Определим на сети $G(a)$ транспортную игру $n = v - 1$ игроков. Обозначим множество игроков через $N = \{1, \ldots, n\}$. Будем предполагать, что каждый игрок $i \in N$ находится в вершине $x_i \in V$, $x_i \neq a$, $i = 1, \ldots, n$ и для него известен спрос $d_i = d\,(x_i) \geq 0$, где $d\,(a) = 0$, $d\,(x)$, $x \in V$ – заданная функция спроса.

Будем предполагать, что грузоперевозки осуществляются одной независимой компанией, которую будем называть *перевозчик*. Пусть перевозчик владеет парком из T транспортных средств (ТС) одинаковой вместимости D, при этом:

$$d_i \leq D, i \in N, n \leq T. \qquad (2.2)$$

Будем предполагать, что стоимость перевозки $C(r)$ по маршруту $r \in R_0$ пропорциональна расстоянию:

$$C(r) = \alpha L(r),$$

где α – стоимость перевозки груза на единицу расстояния.

Пусть $S \subseteq N$ – произвольная коалиция игроков и $s = |S|$ – количество игроков в этой коалиции. Поскольку множество V конечно, то у каждой коалиции $S \subseteq N$, расположенной в множестве $X = \{x_i\}_{i=1}^{s}$, есть кратчайший маршрут $r_S^{\min}$. Тогда $C(r_S^{\min})$ – стоимость перевозки по маршруту $r_S^{\min} = r_X^{\min}$. Таким образом, на множестве коалиций $\{S\}$, $S \subseteq N$ определена функция затрат c: $S \to R^1$:

$$c(S) = C(r_S^{\min}).$$

Обозначим через $c_i = c(\{i\})$ – затраты и $r_i = (a, x_i)$ – маршрут для одноэлементной коалиции $i \in N$.

Будем предполагать, что затраты $c(S)$ распределяются между игроками коалиции S в соответствии с арбитражным решением Нэша, т.е. затраты игрока $i \in S$ имеют вид:

$$\phi_i(S) = c_i - \frac{\sum\limits_{j \in S} c_j - c(S)}{s}. \tag{2.3}$$

Здесь величина $\sum\limits_{j \in S} c_j - c(S)$ может быть проинтерпретирована как выигрыш коалиции S, коалиция S характеризуется маржинальным выигрышем:

$$\psi(S) = \frac{\sum\limits_{j \in S} c_j - c(S)}{s}, S \subseteq N, \tag{2.4}$$

и выражение (2.3) может быть представлено в следующем виде:

$$\phi_i(S) = c_i - \psi(S), i \in S.$$

Определение 2.5. *Коалицию S будем называть допустимой, если*

$$\sum_{i \in S} d_i \leq D.$$

Множество всех допустимых коалиций обозначим $\hat{S}$.

Определение 2.6. *Коалицию S будем называть существенной, если*

$$\psi(S) \geq 0.$$

Множество всех существенных коалиций обозначим $\tilde{S}$. Понятно, что одноэлементные коалиции являются существенными, поскольку

$$\psi(\{i\}) = 0, i \in N. \tag{2.5}$$

Пример 1. Допустимые и существенные коалиции. Рассмотрим транспортную сеть с 12 игроками. Координаты вершин и спрос игроков представлены в табл. 1. Предположим, что вместимость ТС составляет $D = 5$ единиц, $\alpha = 1$, $T = 10$.

Таблица 1. Координаты вершин транспортной сети и спрос игроков.

	Координаты $x_i = (\xi_i, \eta_i)$		
Вершина	ξ	η_i	Спрос (ед.)
Депо	19	45	нет
Игрок 1	18	46	1
Игрок 2	20	47	1
Игрок 3	23	47	1
Игрок 4	24	45	2
Игрок 5	23	43	2
Игрок 6	20	41	2
Игрок 7	18	39	1
Игрок 8	14	40	1
Игрок 9	12	40	2
Игрок 10	9	42	1
Игрок 11	12	44	3
Игрок 12	13	46	1

Расположение игроков и депо на координатной плоскости представлено на рис. 1, где игроки обозначены номерами, а расположение депо отмечено звездой.

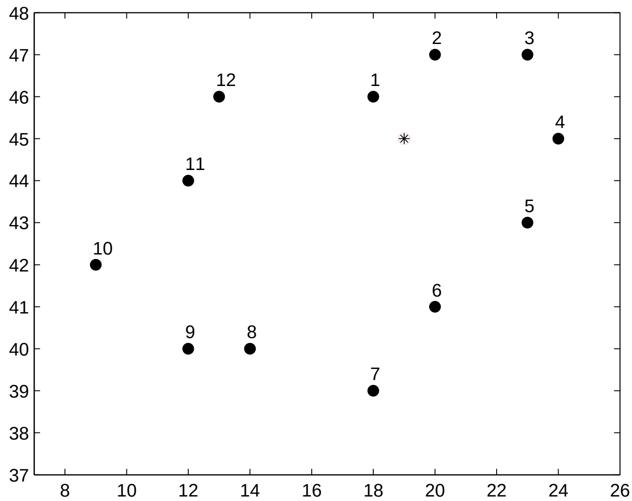

Рисунок 1. Расположение узлов транспортной сети

Рассмотрим коалицию $S = \{10, 11\}$. В случае если каждый из игроков коалиции арендует ТС самостоятельно, то их затраты составляют $c_{10} = 10.44$ и $c_{11} = 7.07$ соответственно (рис. 2).

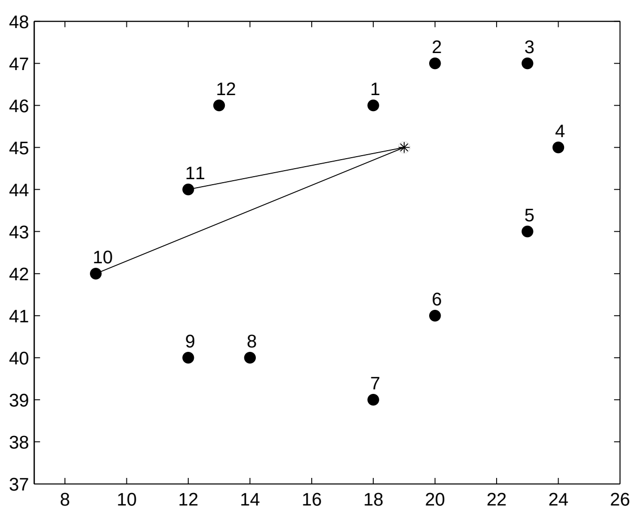

Рисунок 2. Маршруты игроков 10 и 11 в одноэлементных коалициях

При этом суммарные затраты равны $\sum\limits_{j=10}^{11} c_j = 17.51$. Коалиция $S = \{10, 11\}$ является допустимой, поскольку суммарный спрос коалиции составляет 4 единицы (см. табл. 1), а вместимость ТС равна 5. Кратчайший маршрут $r_S^{\min}$ для коалиции S изображен на рис. 3.

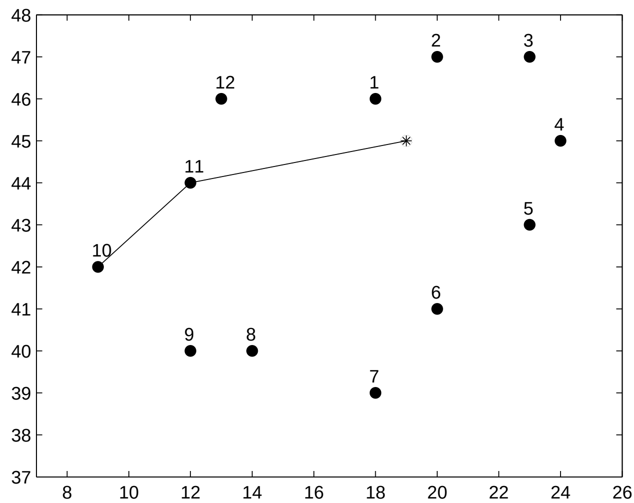

Рисунок 3. Кратчайший маршрут для коалиции игроков 10 и 11

Заметим, что коалиция S является существенной, поскольку $c(S) = 10.68$, выигрыш коалиции равен

$$\sum_{j \in S} c_j - c(S) = 17.51 - 10.68 = 6.83,$$

и маржинальный выигрыш $\psi(S)$ равен $3.42 > 0$. Затраты игроков 10 и 11, определенные (2.3), составят соответственно: $\phi_{10}(S) = 7.02 < c_{10}$, $\phi_{11}(S) = 3.66 < c_{11}$.

Рассмотрим коалицию $S_2 = \{2, 11\}$. В этом случае $A_2 = 2.24$, $c_{11} = 7.07$. Коалиция является допустимой, поскольку суммарный спрос игроков 2 и 11 составляет 4 единицы (см. табл. 1), но не является существенной. Действительно, транспортные затраты коалиции составляют $c(S_2) = 10.78$ и выигрыш коалиции S_2 равен:

$$\sum_{j \in S} c_j - c(S) = 9.31 - 10.78 = -1.47 < 0.$$

Под стратегией h_i игрока $i \in N$ в транспортной игре будем понимать такую допустимую коалицию $h_i \in \hat{S}$, что $i \in h_i$. Множество всех стратегий игрока $i \in N$ обозначим через H_i. Предполагаем, что игроки выбирают свои стратегии одновременно и независимо. В результате получаем ситуацию, которую обозначим через $h = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i \in H_i$. Множество всех ситуаций обозначим через H.

Определение 2.7. *Коалиционным разбиением будем называть такое множество коалиций $\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^J$, что*

$$\bigcup_j \bar{S}_j = N,\ \bar{S}_i \bigcap \bar{S}_j = \emptyset \text{ для любых } i \neq j.$$

Определение 2.8. *Для произвольной ситуации $h = (h_1, \dots, h_n)$ определим следующую многошаговую процедуру $\mu(h)$ формирования коалиционного разбиения $\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^J$:*

Шаг 1: $N_1 = N$; $i_1 = 1 = \min\{j | j \in N_1\}$

$$\bar{S}_1 = \begin{cases} h_1, \text{ если } h_i = h_{i_1},\ i \in h_{i_1} \\ \{1\}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2: Строим множество $N_2 = N_1 \backslash \bar{S}_1$; Если $N_2 = \emptyset$, то $J = 1$ и $\bar{S} = \{\bar{S}_1\}$. В противном случае находим номер $i_2 = \min\{j | j \in N_2\}$ и множество

$$\bar{S}_2 = \begin{cases} h_{i_2}, \text{ если } h_i = h_{i_2},\ i \in h_{i_2} \\ \{i_2\}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

...

Шаг k: Строим множество $N_k = N_{k-1} \backslash \bar{S}_{k-1}$. Если $N_k = \emptyset$, то $J = k - 1$ и $\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^J$. В противном случае находим номер $i_k = \min\{j | j \in N_k\}$ и множество

$$\bar{S}_j = \begin{cases} h_{i_j}, \text{ если } h_i = h_{i_j},\ i \in h_{i_j} \\ \{i_j\}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что многошаговая процедура $\mu(h)$ каждой ситуации $h = (h_1, \dots, h_n)$ ставит в соответствие единственное коалиционное разбиение $\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^J$ и не зависит от порядка нумерации игроков, поэтому $\mu(h) = \bar{S}$.

Пример 2. Построение коалиционного разбиения. Рассмотрим транспортную сеть из примера 1 и ситуацию $h = (h_1, \ldots, h_i, \ldots$ $\ldots, h_{12})$, в которой каждый из игроков выбрал двухэлементную коалицию вида: $h_1 = \{1, 2\}, \quad h_2 = \{2, 3\}, \ldots, h_i = \{i, i + 1\}, \ldots, h_{12} =$ $\{12, 1\}$. Тогда в соответствии с процедурой $\mu(h)$ получаем коалиционное разбиение, состоящее только из одноэлементных коалиций:

$$\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^{12}, \bar{S}_j = \{j\}.$$

Теперь предположим, что игроки выбрали следующие стратегии: $h_1 = h_2 = h_3 = \{1, 2, 3\}$, $h_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, $h_5 = \{5, 6, 7\}$, $h_6 = \{5, 6\}$, $h_7 = \{5, 7\}$, $h_8 = h_9 = h_{10} = \{8, 9, 10\}$, $h_{11} = h_{12} = \{11, 12\}$. Тогда в соответствии с многошаговой процедурой $\mu(h)$ получаем коалиционное разбиение: $\bar{S} = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^{7}$, где $\bar{S}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\bar{S}_2 = \{4\}$, $\bar{S}_3 = \{5\}$, $\bar{S}_4 = \{6\}$, $\bar{S}_5 = \{7\}$, $\bar{S}_6 = \{8, 9, 10\}$, $\bar{S}_7 = \{11, 12\}$.

Определим выигрыш $K_i(h)$ игрока i в следующем виде:

$$K_i(h) = \psi(\bar{S}_j),$$

где $i \in \bar{S}_j$, $\bar{S}_j \in \mu(h)$.

Пусть для всех непересекающихся коалиций $S_i, S_j \in \hat{S}$ с количеством игроков 2 и более выполнены свойства:

$$\psi(S_i) \neq 0,\ \psi(S_i) \neq \psi(S_j),\ S_i \neq S_j,\ S_i, S_j \in \hat{S}. \tag{2.6}$$

В итоге мы построили транспортную игру $\Gamma = \Gamma(a)$ в нормальной форме

$$\Gamma(a) = \left\langle G(a), N, \{H_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N} \right\rangle,$$

где $G(a)$ – транспортная сеть, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество игроков, H_i – множество стратегий и K_i – функция выигрыша игрока $i \in N$.

2.3. Сильное равновесие

Стратегию коалиции $S \subseteq N$ определим как упорядоченный набор стратегий игроков, входящих в коалицию, т.е. $h_S = (h_i)$, $i \in S$. Множество всех стратегий коалиции S обозначим H_S. Стратегию дополнительной для S коалиции $N \backslash S$ обозначим через $h_{-S} = (h_i)$, $i \in N \backslash S$ [4].

Определение 2.9. *Ситуацию $h^1 = (h^1_1, \ldots, h^1_n) \in H$ будем называть сильным равновесием в транспортной игре $\Gamma(a)$, если для каждой коалиции $S \subseteq N$ и стратегии $h_S \in H_S$ существует игрок $i_0 \in S$, для которого выполнено следующее неравенство:*

$$K_{i_0}(h^1_S, h^1_{-S}) \geq K_{i_0}(h_S, h^1_{-S}). \tag{2.7}$$

Множество всех сильных равновесий в игре $\Gamma(a)$ обозначим через SE.

Определение 2.10. *Пусть $h^1 = (h^1_1, \ldots, h^1_n) \in H$ является сильным равновесием в игре $\Gamma(a)$, тогда $\bar{S} = \mu(h^1)$ будем называть сильным равновесным коалиционным разбиением.*

3. Техника построения сильного равновесия

Для построения сильного равновесия используем условие (2.6). Построим коалиционное разбиение $\bar{S}_0$ в соответствии со следующей многошаговой процедурой M:

Шаг 1. Полагаем $N_1 = N$ и строим множество $\hat{S}_1$ допустимых коалиций игроков из множества N_1. Находим $\bar{S}_1 \in \hat{S}_1$ из условия $\bar{S}_1 = \arg\max\limits_{S \in \hat{S}_1} \psi(S)$.

Шаг 2. Строим множество игроков $N_2 = N_1 \backslash \bar{S}_1$. Если $N_2 = \emptyset$, то $J = 1$ и $\bar{S}_0 = \{\bar{S}_1\}$. В противном случае строится множество $\hat{S}_2$ допустимых коалиций игроков из множества N_2 и выбирается коалиция $\bar{S}_2 \in \hat{S}_2$ такая, что $\bar{S}_2 = \arg\max\limits_{S \in \hat{S}_2} \psi(S)$.

Шаг k. Строим множество игроков $N_k = N_{k-1} \backslash \bar{S}_{k-1}$. Если $N_k = \emptyset$, то $J = k - 1$ и $\bar{S}_0 = \{\bar{S}_j\}_{j=1}^{J}$. В противном случае строится множество $\hat{S}_k$ допустимых коалиций игроков из множества N_k и выбирается коалиция $\bar{S}_k \in \hat{S}_k$ такая, что $\bar{S}_k = \arg\max\limits_{S \in \hat{S}_k} \psi(S)$.

В случае необходимости одноэлементные коалиции ранжируются по номерам игроков.

В результате реализации процедуры M за конечное число шагов получим коалиционное разбиение $\bar{S}_0 = \{\bar{S}_j\}$. В соответствии с процедурой M множество $\bar{S}_0$ состоит из существенных непересекающихся коалиций, причем $\bigcup\limits_{j=1}^{J} \bar{S}_j = N$.

Теорема 3.1. *Ситуация* $h^1 = (h^1_1, \dots, h^1_n)$, *где* $h^1_i = \bar{S}_j$, $i \in \bar{S}_j$, $\bar{S}_j \in \bar{S}_0$ *является сильным равновесием в транспортной игре* $\Gamma(a)$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу элементов s коалиции S (размер коалиции).

Пусть $s = 1$, $S = \{i_0\}$ и $i_0 \in \bar{S}_j$. Тогда

$$\psi(\bar{S}_j) = \max_{U \in \hat{S}_j} \psi(U) = K_{i_0}(h^1_{i_0}, h^1_{-i_0}) \geq K_{i_0}(h_{i_0}, h^1_{-i_0}) = \begin{cases} c_{i_0}, h_{i_0} \neq \bar{S}_j, \\ \psi(\bar{S}_j),\ h_{i_0} = \bar{S}_j, \end{cases}$$

и теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда $s = 2$, $S = \{i_0,\ i_1\}$.

Пусть $S \subset \bar{S}_j$. Тогда для любого $i \in S$:

$$\psi(\bar{S}_j) = \max_{U \in \hat{S}_j} \psi(U) = K_i(h^1_S, h^1_{-S}) \geq K_i(h_S, h^1_{-S}) =$$

$$= \begin{cases} \psi(S),\ h_i = S,\ i = i_0, i_1, \\ \psi(\bar{S}_j),\ h_i = \bar{S}_j,\ i = i_0, i_1, \\ c_i, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

и теорема доказана.

Пусть теперь $S \notin \bar{S}_j$, т.е. $i_0 \in \bar{S}_k$, $i_1 \in \bar{S}_j$, $\bar{S}_k \neq \bar{S}_j$ и для определенности $k < j$. Тогда $S \in \hat{S}_k$. По построению $\bar{S}_k$ имеем:

$$\psi(\bar{S}_k) = \max_{U \in \hat{S}_k} \psi(U) = K_{i_0}(h^1_S, h^1_{-S}) \geq K_{i_0}(h_S, h^1_{-S}) =$$

$$= \begin{cases} \psi(\bar{S}_k),\ h_i = \bar{S}_k,\ i = i_0, i_1, \\ c_{i_0}, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

и база индукции доказана.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех коалиций размера не более $s - 1$. Покажем, что оно будет верно для коалиций размера s.

Если коалиция S не является допустимой, то в ней содержится допустимая подкоалиция $U \subset S$ размера $|U| < s$ и по индукционному предположению теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда S – допустимая коалиция. Тогда

$$K_i(h_S, h^1_{-S}) = \psi(U), i \in U, U \subset S.$$

Если $|U| < s$, то утверждение теоремы верно по индукционному предположению. Пусть $U = S$. Если $S \subset \bar{S}_j$, то неравенство (2.7) верно для всех $i \in S$ по построению множества $\bar{S}_j$. В противном случае каждый игрок $i \in S$ принадлежит своему множеству $i \in \bar{S}_{k_i}$ разбиения. Пусть $i_0 \in \bar{S}_k$, где $k = \min\limits_{i \in S} k_i$. Тогда $S \in \hat{S}_k$ и неравенство (2.7) будет выполнено, поскольку

$$K_{i_0}(h^1_S, h^1_{-S}) = \psi(\bar{S}_k) = \max_{U \in \hat{S}_k} \psi(U) \geq \psi(U) = K_{i_0}(h_S, h^1_{-S}), i \in U,$$

что завершает доказательство. □

Пример 3. Сильное равновесие в транспортной игре. Рассмотрим игру $\Gamma(a)$, построенную на основе транспортной сети из примеров 1 и 2, в ней: 4095 коалиций, 456 допустимых коалиций, 247 существенных допустимых коалиций.

Первые пять, 247-ой и 456-ой элементы $\hat{S}_1$ представлены в табл. 2.

Таблица 2. Элементы $\hat{S}_1$.

№	Коалиция, S	Маржинальный выигрыш, $\psi(S)$	Спрос коалиции, $\sum_{i \in S} d_i$
1	$\{8, 9, 10\}$	4,47	4
2	$\{7, 8, 9, 10\}$	4,10	5
3	$\{10, 11, 12\}$	3,89	5
4	$\{8, 9, 10, 12\}$	3,71	5
5	$\{10, 11\}$	3,42	4
...	...	...	...
247	$\{12\}$	0	1
...	...	...	...
456	$\{4,11\}$	–2,48	5

В табл. 3 приведены результаты построения сильного равновесного коалиционного разбиения в соответствии с процедурой M.

Таблица 3. Сильное равновесное коалиционное разбиение, $\bar{S}_0 = \{S_j\}_{j=1}^{6}$.

№ шага, j	Коалиция, $\bar{S}_j$	Кратчайший маршрут, $r_{S_j}^{\min}$	Маржинальный равновесный выигрыш, $\psi(\bar{S}_j)$
1	$\{8, 9, 10\}$	(a, x_8, x_9, x_{10})	4,47
2	$\{11, 12\}$	(a, x_{12}, x_{11})	2,41
3	$\{3, 4, 5\}$	(a, x_5, x_4, x_3)	1,67
4	$\{6, 7\}$	(a, x_6, x_7)	1,62
5	$\{1\}$	(a, x_1)	0
6	$\{2\}$	(a, x_2)	0

По теореме ситуация $h^1 = (h_1^1, \dots, h_{12}^1)$, где $h_1^1 = \bar{S}_5$, $h_2^1 = \bar{S}_6$, $h_3^1 = h_4^1 = h_5^1 = \bar{S}_3$, $h_6^1 = h_7^1 = \bar{S}_4$, $h_8^1 = h_9^1 = h_{10}^1 = \bar{S}_1$, $h_{11}^1 = h_{12}^1 = \bar{S}_2$ является сильным равновесием в транспортной игре $\Gamma(a)$. Кратчайшие маршруты для коалиций в сильном равновесии представлены на рис. 4.

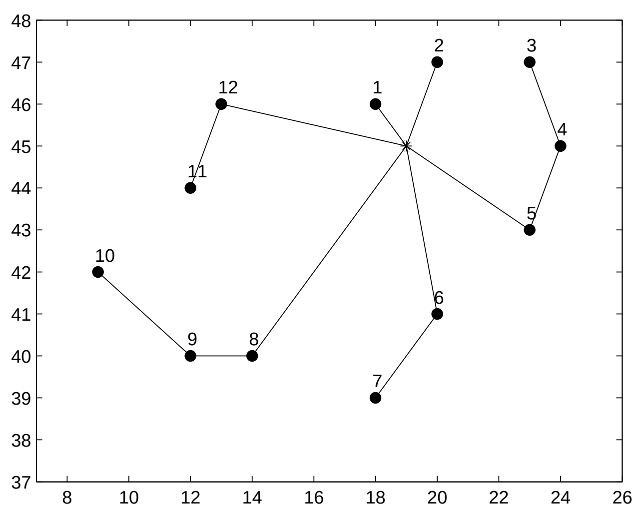

Рисунок 4. Кратчайшие маршруты в сильном равновесии

4. Заключение

В статье исследован частный случай задачи маршрутизации транспортных средств с открытыми маршрутами, в котором каждый клиент является игроком. Предполагается, что игроки арендуют транспортное средство у независимого перевозчика, вместимость всех транспортных средств перевозчика одинакова. В общем случае может исследоваться задача с ТС разной вместимости. Кроме того, игроки сами могут выступать в качестве перевозчика, а в случае использования собственного ТС транспортные затраты могут определяться затратами на топливо.

В предложенной модели каждый маршрут соответствует одному ТС, т.е. перевозки осуществляются одновременно всем игрокам. Нетрудно заметить, что построенное решение распространяется и на случай, когда перевозчик владеет единственным ТС, а перевозки по всем маршрутам выполняются последовательно.

Предложенное в статье решение распространяется и на случай, когда расстояния между узлами транспортной сети определяется не евклидовым расстоянием, а по географическим данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В., Щегряев А. *Устойчивая кооперация в динамических задачах маршрутизации транспорта* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 39–56.

2. Зенкевич Н.А., Зятчин А.В. *Кооперативное сильное равновесие в игре маршрутизации транспортных средств* // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 3. С. 3–26

3. Оуэн Г. *Теория игр.* М.: Мир. 1971.

4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр.* СПб.: БХВ-Петербург. 2012.

5. Andersson T., Gudmundsson J., Talman D., Yang Z. *A competitive partnership formation process* // Games and Economic Behavior. 2014. P. 165–177.

6. Aumann R.J., Dreze J. *Cooperative games with coalitional structures* // International Journal of Game Theory. 1974. P. 217–237.

7. Banerjee S., Konishi H., Sonmez T. *Core in a simple coalition formation game* // Social Choice and Welfare. 2001. V. 18(1). P. 135–153.

8. Bogomolnaia A., Jackson M.O. *The stability of hedonic coalition structures* // Games and Economic Behavior. 2002. V. 38(2). P. 201–230.

9. Bogomolnaia A., Le Breton M., Savvateev A., Weber S. *Stability of jurisdiction structures under the equal shares and median rules* // Economic Theory. 2007. V. 34(3). P. 523–543.

10. Myerson R. *Game Theory: Analysis of Conflict.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press. 1991.

11. Owen G. *Game theory.* W.B. Saunders company. Philadelphia, London, Toronto. 1968.

12. Talman A.J., Yang Z. *A model of partnership formation* // Journal of Mathematical Economics. 2011. V. 47. P. 206–212.

13. Van den Brink R., van der Laan G. *A Class of Consistent Share Functions for Cooperative Games in Coalition Structure* // Games and Economic Behavior. 2005. V. 51. P. 193–212.

14. Zenkevich N.A., Zyatchin A.V. *Strong equilibria in the vehicle routing game* // International Game Theory Review. V. 16. P. 1450013-1 – 1450013-13

STRONG COALITIONAL STRUCTURE IN A TRANSPORTATION GAME

Nikolay A. Zenkevich, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, Cand.Sc., assoc. prof. (zenkevich@gsom.spbu.ru).
Andrey V. Zyatchin, Graduate School of Management, Department of Operations Management, St. Petersburg University, Cand.Sc., senior lecturer (zyatchin@gsom.spbu.ru).

Abstract: This paper introduces an extension of the vehicle routing problem by including several decision makers in competition. Each customer is characterized by demand and distance to the warehouse. The problem is described as an open vehicle routing game (CTG). We consider customers to be players in the game. Their strategies are the routes for a track they should rent to deliver goods subject to their demand with minimal transportation costs under assumption, that transportation costs are allocated between players according to Nash arbitrage scheme. For each profile in coalitional strategies it is provided a coalitional structure of players and costs of each player.
We provide a computable procedure to calculate strong equilibrium. It also calculates a numerical example.

Keywords: transportation game, cooperative transportation game, coalitional structure, strong coalitional structure.