Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.1, с. 80–105

УДК 519.833
ББК 22.18

ЦЕПНЫЕ РАВНОВЕСИЯ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ

Алексей Б. Искаков*
Михаил Б. Искаков
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65
e-mail: isk_alex@mail.ru, mih_iskakov@mail.ru

В статье представлена модификация концепции равновесий в безопасных стратегиях (РБС), в которой учитывается неоднородное отношение игроков к безопасности в бескоалиционной игре. Исследуется асимметричное отношение игроков к взаимным угрозам в простейшем случае, когда все игроки строго упорядочены в своем отношении к безопасности. В этом случае мы предполагаем, что игроки могут быть так пронумерованы, что каждый игрок i в своем поведении избегает всех угроз со стороны игроков $j > i$, но допускает угрозы со стороны игроков $j < i$ при условии, что они эффективно сдерживаются встречными угрозами. Возникающее при таком поведении равновесие названо *цепным РБС*. Содержательный смысл таких равновесий проиллюстрирован на примере двух непрерывных игр, в которых не существует чистых равновесий Нэша и (обычных) РБС. Игра полковника Блотто для двух игроков (Borel 1953, Owen 1968) на двух полях битвы с разной ценой всегда имеет цепное РБС. Продуктовое соревнование многих игроков на отрезке (Eaton, Lipsey 1975, Shaked 1975) с линейным распределением предпочтений потребителей

---

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-00131-а

всегда имеет единственное решение (с точностью до перестановки игроков) в классе цепных РБС. Обсуждается сравнение цепных РБС с равновесиями Штакельберга.

Ключевые слова: бескоалиционные игры, равновесия в безопасных стратегиях, асимметричное поведение, игры Блотто, продуктовое соревнование, равновесие Штакельберга.

1. Введение

Во многих хорошо известных экономических моделях не существует равновесий Нэша-Курно. В качестве примеров можно привести ценовое соревнование Хотеллинга, модели страхового рынка, состязание Таллока и ценовую дуополию Бертрана-Эджворта. Почти для всех таких моделей были предложены специальные *ad hoc* концепции равновесий, учитывающие специфическую логику поведения игроков в той или иной конкретной игре. Тем не менее, возникает естественный вопрос, существует ли общая концепция альтернативного равновесия для этих игр? Один из возможных вариантов такой общей альтернативной концепции равновесия – равновесие Нэша *в смешанных стратегиях*. В известной работе [8] Дасгупты и Маскина был доказан критерий существования равновесий Нэша в смешанных стратегиях, которому удовлетворяют все упомянутые выше игры. Тем не менее, такой подход не решил проблему полностью. Хотя равновесия в смешанных стратегиях почти всегда существуют, во многих разрывных играх их оказалось трудно найти в аналитическом виде. Кроме того, эти решения могут оказываться неудобными для использования в экономической практике. Так, например, в ценовой игре Хотеллинга равновесия в смешанных стратегиях были детально исследованы в [15]. Было установлено, что при определенных расположениях игроков носитель равновесных ценовых стратегий является объединением двух коротких интервалов с наибольшим вероятностным весом в верхнем интервале. Однако, авторы не смогли дать полную характеристику равновесий. Для симметричного состязания Таллока двух игроков в [6] было показано, что для параметра функции успеха больше двух диссипация ренты в равновесиях в смешанных стратегиях является полной. Однако, сами равновесия не были охарактеризованы аналитически. Для ассиметричного состязания Таллока и состязания с более чем двумя участниками, насколько нам известно, решения в смешанных стратегиях так и не были найдены. В модели страхового рынка, предложенной в [17, 20], равновесие Нэша не существует, когда доля клиентов, предпочитающих малый риск, достаточно высока. В этих случаях страховым компаниям можно предложить использовать смешанные стратегии. Хотя соответствующие равновесия всегда существуют, но, насколько нам известно, они так и не были охарактеризованы. Поэтому экономическая интерпретация этих решений неизвестна. Другой подход к исследованию игр, не имеющих равновесий Нэша, используется в теории коалиционных игр, и состоит в том, что игроки могут образовывать коалиции или заключать соглашения либо иные предварительные договоренности относительно общих правил. В этом случае, однако, приходится отказаться от предположения о независимости игроков. Таким образом, остается открытым вопрос о том, существует ли общая концепция, которая бы описывала взаимодействие независимых игроков и выявляла эти специальные *ad hoc* равновесия, не являющиеся равновесиями Нэша.

В попытке ответить на этот вопрос М. Искаков предложил в [2] концепцию *равновесия в безопасных стратегиях (РБС).* В качестве рационального критерия оценки взаимных действий независимыми игроками был выбран критерий их собственной безопасности от угроз со стороны ответных действий других игроков. Новая, более простая, формулировка этой концепции была опубликована в [11]. Определение РБС основано на понятии угрозы. Будем говорить, что для игрока существует *угроза,* если некоторый другой игрок может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш и при этом одновременно уменьшить выигрыш первого игрока. Под *равновесием в безопасных стратегиях* понимается игровой профиль, удовлетворяющий двум условиям: (1) ни для одного из игроков не существует угроз; (2) ни один игрок не может односторонним отклонением увеличить свой выигрыш, не создав при этом для себя угрозы потерять больше, чем он выигрывает при этом отклонении. Первое условие в этом определении определяется в [11] как *безопасность игрового профиля*, а второе условие означает, что игроки не могут сделать из этого профиля *безопасных выгодных отклонений.*

В равновесии Нэша не может быть угроз, и никто из игроков не может увеличить свой выигрыш никаким односторонним отклонением. Оба условия РБС выполняются. Поэтому любое равновесие Нэша является РБС. Однако, в отличие от игроков, стремящихся найти равновесия Нэша, выбор стратегий игроков, стремящихся к РБС, ограничен безопасными стратегиями. Соответственно, можно показать, что стратегия каждого игрока в РБС является его *наилучшим безопасным ответом.* Поэтому концепция РБС позволяет обнаружить некоторые квазиравновесные положения, не являющиеся положениями Нэша. В частности, она позволила обнаружить содержательные решения в нескольких известных экономических играх, в которых не существует равновесий Нэша: модель ценового соревнования Хотеллинга [12], модель борьбы за ренту Таллока [10], модель рынка страхования Ротшильда-Стиглица-Вильсона, модель ценовой дуополии Бертрана-Эджворта [4]. Концепция РБС может также рассматриваться в качестве одного из перспективных направлений теоретико-игрового моделирования [1].

С другой стороны, определение РБС предполагает, что игроки избегают всех потенциальных угроз. Такое предположение об осторожном поведении иногда оказывается слишком сильным. В некоторых играх, не имеющих равновесий Нэша, угрозы существуют в любом игровом профиле (например, в модели продуктового соревнования и в ценовом соревновании Бертрана-Эджворта при некоторых значениях параметров), и следовательно, (обычных) РБС в этих играх нет. Тем не менее, в этих играх некоторые «потенциальные» угрозы не реализуются, поскольку могут эффективно сдерживаться встречными угрозами. Естественно предположить, что в этих случаях игроки также руководствуются соображениями безопасности, но учитывают не все угрозы, а только те угрозы, которые «оправданы» в том или ином смысле. При этом, мы стремимся найти обобщение, которое бы сохранило убедительную интерпретацию и общую логику РБС, основывающуюся на учете угроз. Следуя такому подходу, в этой статье мы исследуем модификацию РБС, в которой ослабляются условия безопасности, предъявляемые игроками к квазиравновесному профилю. А именно, предполагается, что игроков можно перенумеровать так, что каждый игрок i в своем поведении избегает всех угроз со стороны игроков $j > i$, но допускает угрозы со стороны игроков $j < i$ при условии, что эти угрозы эффективно сдерживаются какими-либо встречными угрозами. Такая модификация РБС была впервые определена в [3] как частный случай более общего класса сложных (или асимметричных) РБС.

В следующем разделе мы введем строгие определения предлагаемой концепции. В разделе 3 исследуем свойства и примеры таких равновесных положений в играх двух участников. В разделе 4 рассмотрим игры с более чем двумя участниками. Затем в разделе 5 проиллюстрируем содержательный смысл предлагаемого равновесия на примере продуктового соревнования многих фирм на отрезке с линейной плотностью предпочтений потребителей. В заключении мы обсудим обобщение предложенной концепции на произвольный случай «асимметричных» РБС, а также ее сравнение с равновесиями Штакельберга.

2. Цепное равновесие в безопасных стратегиях

Рассмотрим некооперативную игру N игроков в нормальной форме $G = (i \in N, s_i \in S_i, u_i \in R)$. Прежде всего, напомним понятия угрозы, безопасной стратегии и безопасного отклонения, использующиеся при формулировке РБС [11].

Определение 2.1. *Угрозой игрока i против игрока j в профиле s называется такое одностороннее отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) < u_j(s)$.*

Определение 2.2. *Стратегия s_i игрока i называется безопасной стратегией при заданной обстановке s_{-i}, если ни один игрок не имеет в профиле s угроз против игрока i.*

Определение 2.3. *Одностороннее отклонение s_i' игрока i от игрового профиля s называется безопасным отклонением, если $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s_i', s_j', s_{ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s_j' игрока j против игрока i в профиле (s_i', s_{-i}).*

Тогда определение РБС выглядит следующим образом:

Определение 2.4. *Игровой профиль называется Равновесием в безопасных стратегиях (РБС), если (1) стратегия каждого игрока в этом профиле является безопасной, и (2) ни один игрок не может совершить в этом профиле одностороннее безопасное отклонение.*

Чтобы сформулировать условия избирательного отношения игроков к взаимным угрозам, ограничим условия безопасности профиля и отклонения применительно к группе игроков.

Определение 2.2′. *Стратегия s_i игрока i называется безопасной стратегией* по отношению к игрокам $j > i$ *при заданной обстановке s_{-i}, если ни один игрок $j > i$ не имеет в профиле s угроз против игрока i.*

Определение 2.3′. *Одностороннее отклонение s'_i игрока i от игрового профиля s называется безопасным отклонением* по отношению к игрокам $j > i$, *если $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s'_i, s'_j, s_{ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s'_j игрока $j > i$ против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}).*

Теперь можно модифицировать определение РБС, заменив в нем понятия безопасной стратегии и безопасного отклонения из определений 2.1 и 2.2 на соответствующие понятия из определений 2.1′ и 2.2′.

Определение 2.4′. *Игровой профиль называется цепным Равновесием в безопасных стратегиях (РБС), если игроков можно так перенумеровать, что (1) стратегия каждого игрока i в этом профиле является безопасной* по отношению к игрокам $j > i$, *и (2) ни один игрок i не может совершить в этом профиле одностороннее безопасное отклонение* по отношению к игрокам $j > i$.

Если из этого определения убрать условия избирательности в требовании безопасности профиля и отклонений (выделенные прямым шрифтом), то мы получим определение обычного РБС. Отметим также, что хотя игрок i допускает угрозы со стороны игроков $j < i$, но такие угрозы для самих этих игроков не являются безопасными отклонениями. Иными словами, можно сказать, что все угрозы, существующие в цепном РБС, эффективно сдерживаются некоторыми встречными угрозами. Введенные определения 2.2′, 2.3′ и 2.4′ являются частным случаем более общих определений 12, 13 и 14 сложного

РБС, предложенных в [3]. Проиллюстрируем, как может возникать логика избирательного отношения игроков к угрозам на простом примере.

Пример 1. Рассмотрим осторожное поведение игроков A, B и C в следующей матричной игре:

c_1 :	b_1	b_2
a_1	(0,0,0)	(-1,1,0)
a_2	(-1,0,0)	(0,-1,0)

c_2 :	b_1	b_2
a_1	(-1,0,1)	(-1,1,-1)
a_2	(0,0,-1)	(0,-1,-2)

В этой игре есть следующая логика поведения. Игрок A выбирает стратегию a_1 или a_2 и имеет только две возможности: либо безопасно получить -1, либо получить 0 при наличии угроз со стороны других игроков. Таким образом, игроку A нечего терять и, независимо от угроз игроков B и C, он будет всегда выбирать свой наилучший ответ с нулевым выигрышем. Выигрыш игрока B не зависит от игрока C. С другой стороны, учитывая предсказуемое поведение игрока A, игрок B стремится обезопасить себя от угроз со стороны игрока A. В частности, он выберет стратегию b_1 с нулевым выигрышем, поскольку стратегия b_2 с учетом поведения игрока A даст ему -1. Наконец, для игрока C важно учитывать угрозы как со стороны игрока A, так и со стороны игрока B. Если игрок C ведет себя осторожно, он выберет стратегию c_1 с нулевым выигрышем, поскольку в противном случае, с учетом предсказуемого поведения игроков A и B, он получит отрицательный выигрыш. Описанная логика осторожного поведения игроков соответствует цепному РБС с порядком игроков $(\{C\}, \{B\}, \{A\})$. Единственным таким цепным РБС в игре является профиль (a_1, b_1, c_1) с выигрышами $(0, 0, 0)$.

Определим также ослабление определения цепного РБС, в котором используются безопасные отклонения только со строгими неравенствами в условиях выигрышей. Такое определение окажется удобным при рассмотрении условий существования предлагаемых равновесий.

Определение 2.5. *Одностороннее отклонение s'_i игрока i от игрового профиля s называется строгим безопасным отклонением* по отношению к игрокам $j > i$, *если* $u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s)$ *и* $u_i(s'_i, s'_j, s_{ij}) > u_i(s)$ *для любой угрозы s'_j игрока $j > i$ против игрока i в профиле (s'_i, s_{-i}).*

Определение 2.6. *Игровой профиль называется слабым цепным РБС, если игроков можно так перенумеровать, что (1) стратегия каждого игрока i в этом профиле является безопасной* по отношению к игрокам $j > i$, *и (2) ни один игрок i не может совершить в этом профиле одностороннее строгое безопасное отклонение* по отношению к игрокам $j > i$.

3. Цепные РБС в играх двух участников

Цепные РБС имеют особенно простую интерпретацию в играх двух участников. В этом случае один игрок выбирает безопасные профили и улучшает свое положение только безопасными отклонениями (т.е. ведет себя так, как он бы себя вел в модели РБС). Второй игрок при этом выбирает наилучший ответ на стратегии первого (т.е. ведет себя так, как он бы себя вел в модели равновесия Нэша). Рассмотрим пример игры, в которой нет равновесия Нэша и РБС, но может работать именно такая асимметричная логика.

Пример 2. Игра полковника Блотто с двумя участниками [7, 16].[1] Два игрока с ограниченными ресурсами войск A и B должны распределить их между двумя полями битвы. Игрок, выставивший на поле битвы больше войск, выигрывает на этом поле битвы и получает выигрыш α или β. Если игроки выставили одинаковое количество войск на поле битвы, они делят выигрыш пополам. Таким образом, рассматриваемая игра является игрой с постоянной суммой. Без ограничения общности, предполагаем, что $A > B$ и $\alpha > \beta$. Предположим также, что $A < 2B$, поскольку в противном случае решение очевидно. Обозначим как a и b количество войск, выставленное соответственно игроками A и B на поле битвы α. Тогда количества войск, выставленные игроками на поле битвы β, будут соответственно $A-a$ и $B-b$.

---

[1]Мы благодарим В.О.Корепанова, указавшего на существование цепного РБС в играх полковника Блотто.

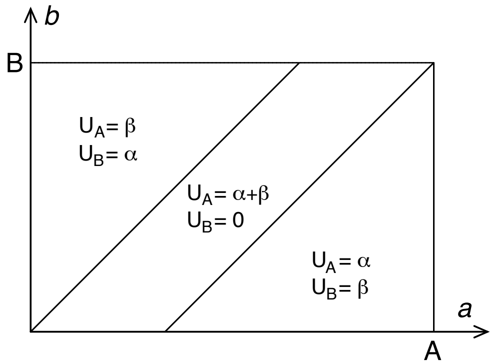

Рисунок 1. Выигрыши игроков в пространстве игровых профилей (a, b).

Соответствующие выигрыши игроков определяются в виде

$$U_A = \begin{cases} \beta, & a < b \\ \beta + \alpha/2, & a = b \\ \beta + \alpha, & b < a < b + (A - B) \\ \beta/2 + \alpha, & a = b + (A - B) \\ \alpha, & a > b + (A - B) \end{cases} \quad ; \tag{3.1}$$

$$U_B = \alpha + \beta - U_A \, .$$

Выигрыши игроков A и B показаны в пространстве игровых профилей (a, b) на рис. 1. Пространство стратегий разбивается на три области с разными результатами игры. В диагональной области игрок A выигрывает на обоих полях. В правой нижней треугольной области он выигрывает только на основном поле битвы α. А в левой верхней треугольной области он выигрывает только на поле β. Выигрыш второго игрока определяется условием игры с постоянной суммой.

В этой игре не существует равновесия Нэша. В ней также не существует РБС, поскольку в любом игровом профиле существует угроза. В самом деле, для игрока B всегда существует угроза потерять свой выигрыш, а если у него уже нулевой выигрыш, то в этом случае угроза уменьшить свой выигрыш существует для игрока A. Тем не менее, в этой игре может возникнуть логика поведения, специфичная для цепного РБС, если один из игроков будет действовать осторожно, а

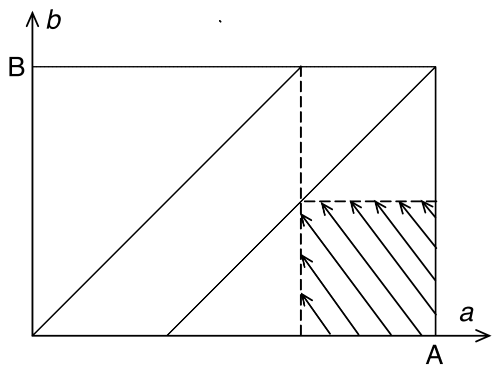

Рисунок 2. Множество цепных РБС в пространстве профилей (a, b).

другой будет соответствующим образом подстраивать свою стратегию. Для игрока B вести себя осторожно не имеет смысла, поскольку он не может гарантировать себе никакого положительного выигрыша. Более сильный игрок A может получить выигрыши β, α или $\alpha+\beta$ (в порядке увеличения). Максимальный выигрыш $\alpha+\beta$ достигается в «диагональной» области $b < a < b + (A - B)$, но он не гарантирован, поскольку в этой области всегда существует угроза со стороны игрока B выбрать $b = B$ или $b = 0$, и соответственно уменьшить выигрыш игрока A. С другой стороны, игрок A может гарантировать себе победу на основном поле битвы (гарантируя выигрыш α), если выставит на это поле больше войск, чем имеет в своем распоряжении игрок B (т.е. выберет $a > B$). В противном случае, у игрока A есть возможность получить только β в случае наилучшего ответа игрока B. Если более сильный игрок A будет вести себя осторожно и выберет $a > B$, чтобы гарантировать победу на главном поле битвы, а игрок B подстроится и выберет наилучший на это ответ $b < 2B - A$, чтобы гарантировать себе победу на втором по значимости поле битвы, то такое поведение и будет соответствовать цепному РБС с порядком игроков $(\{A\}, \{B\})$.

Соответствующее множество цепных РБС $\{(a, b)| \ a > B, b < 2B - A\}$ показано штриховкой на рис. 2. Легко проверить, что для этого множества определение цепных РБС выполняется. В самом деле, стратегия игрока A безопасна, и он не может сделать одностороннего безопасного отклонения, а игрок B не может увеличить свой выигрыш односторонним отклонением. Очевидно, в области $\{(a,b)|$ $a > B,\ 2B - A < b < a - (A - B)\}$ игрок А может сделать безопасное отклонение, и игрок В не сможет гарантировать себе победу на поле β. Заметим, что ситуация на границе множества цепных РБС может быть разной в зависимости от параметров. В частности, если $\beta \geq \alpha/2$, то граничные точки $\{a = B,\ b < 2B - A\}$ также принадлежат множеству цепных РБС. А если $\beta < \alpha/2$, то в множество цепных РБС включаются граничные точки $\{a < B,\ b = 2B - A\}$. Легко проверить, что другие игровые профили в пространстве (a, b) не могут являться цепными РБС.

В цепных РБС в играх двух участников осторожного игрока можно назвать *лидером*, а второго *ведомым*. Такие названия отражают, однако, не порядок ходов игроков, как в модели Штакельберга [19], а их поведенческие отношения. Тем не менее, цепные РБС в играх двух участников тесно связаны с концепцией точек Штакельберга. Рассмотрим подробнее их соотношение. Рассмотрим матричную игру или игру с непрерывными компактными множествами стратегий и непрерывными функциями выигрышей двух игроков $G = \{(S_1, u_1), (S_2, u_2)\}$. Следуя, например, [5], определим для игры G *точки Штакельберга для игрока* $i \in \{1, 2\}$ как профиль s^*, в котором

$$u_i(s^*) = \max_{s_i,\ s_{-i} \in BR_{-i}(s_i)} u_i(s_i, s_{-i}), \quad i \in \{1, 2\}, \tag{3.2}$$

где $BR_{-i}(s_i)$ обозначает соответствие наилучших ответов игрока $(-i)$ в игре G. Следующее утверждение и его следствие являются переформулировкой утверждений 5 и 6 для сложных РБС из [3].

Утверждение 3.1. *Точки Штакельберга (3.2) в игре двух участников G являются слабыми цепными РБС.*

Доказательство. Рассмотрим точку Штакельберга $s^* = (s_1^*, s_2^*)$, удовлетворяющую (3.2) для $i = 1$, т.е. $u_1(s^*) = \max\limits_{s_1,\ s_2 \in BR_2(s_1)} u_1(s_1, s_2)$. Для игрока 2 имеем $s_2^* \in BR_2(s_1^*)$ и определение слабого цепного РБС с порядком игроков $(\{1\}, \{2\})$ выполняется для игрока 2. Стратегия игрока 1 безопасна, поскольку игрок 2 не имеет возможности увеличить свой выигрыш никаким отклонением. Предположим, игрок 1 может увеличить свой выигрыш, отклонившись в стратегию s_1'. Если $s_2^* \in BR_2(s_1')$, то в соответствии с (3.2) получим, что $u_1(s^*) = \max\limits_{s_1,\ s_2 \in BR_2(s_1)} u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1', BR_2(s_1')) = u_1(s_1', s_2^*)$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $s_2^* \notin BR_2(s_1')$. В этом случае существует ответная угроза $(s_1', s_2^*) \to (s_1', BR_2(s_1'))$ игрока 2, в результате осуществления которой игрок 1 получит $u_1(s_1', BR_2(s_1')) \leq u_1(s_1^*, BR_2(s_1^*))$, т.е. не больше чем в профиле (s_1^*, s_2^*). Таким образом, определение слабого цепного РБС с порядком игроков $(\{1\}, \{2\})$ выполняется также и для игрока 1. □

Следствие 3.1. *В любой матричной или непрерывной игре двух участников с компактными пространствами стратегий и непрерывными функциями выигрышей существует слабое цепное РБС.*

Доказательство. Следует из того факта, что наилучший ответ и максимум в (3.2) всегда достигается непрерывными функциями выигрыша на компактных множествах стратегий. Поэтому, по крайней мере, точки Штакельберга (3.2) существуют всегда. □

Предлагаемая концепция равновесий может быть особенно полезной при рассмотрении игр с разрывными функциями выигрышей. В таких играх функции выигрышей могут не достигать максимумов. Чтобы получить условия существования для этих игр, необходимо ослабить понятие цепных РБС и использовать аналогичную концепцию ε-равновесий, в которых все условия неравенств выполняются с точностью до произвольно малой положительной величины ε. Аналогичный утверждению 3.1 результат по существованию цепных ε-РБС был доказан для разрывных игр в [3].

В рассмотренном выше примере 2 множество точек Штакельберга с порядком игроков $(\{A\}, \{B\})$ нетрудно найти: $\{(a, b)|\ a > B,\ b < a - (A - B)\}$. Кроме найденного выше множества цепных РБС оно также включает область $\{(a, b)|\ a > B,\ 2B - A < b < a - (A - B)\}$ (с точностью до границы $2B - A = b$). Эта область соответствует тем *слабым* цепным РБС, которые не являются цепными РБС. Таким образом, в примере 2 множество слабых цепных РБС совпадает с множеством точек Штакельберга. Возникает естественный вопрос, совпадают ли эти множества для игр двух лиц в общем случае? Оказывается, что множество слабых цепных РБС шире множества точек Штакельберга.

Пример 3. Рассмотрим следующую матричную игру:

	t_1	t_2	t_3
s_1	(0,0)	(1,3)	(4,2)
s_2	(3,3)	(2,0)	(-1,0)

В ней обе точки Штакельберга совпадают с профилем стратегий (s_2, t_1) с выигрышами $(3, 3)$. Однако, наряду с профилем (s_2, t_1), профиль (s_1, t_3) с выигрышами $(4, 2)$ также является цепным РБС с порядком игроков $(\{t\}, \{s\})$. Это цепное РБС (s_1, t_3) не является (обычным) РБС, поскольку существует угроза $t-$игрока отклониться из (s_1, t_3) в (s_1, t_2).

Хотя в общем случае игр двух лиц множество слабых цепных РБС шире, чем множество точек Штакельберга, можно указать класс игр, для которых эти множества совпадают.

Утверждение 3.2. *Рассмотрим любую матричную или непрерывную игру G двух участников с компактными пространствами стратегий и непрерывными функциями выигрышей. Если G – односторонне соревновательная игра (unilaterally competitive game), то в ней множества слабых цепных РБС и точек Штакельберга совпадают.*

Доказательство. Напомним, что в односторонне соревновательной игре двух лиц игрок увеличивает свой выигрыш односторонним отклонением тогда и только тогда, когда он при этом уменьшает выигрыш соперника [14]. Согласно утверждению 3.1, точки Штакельберга являются слабыми цепными РБС. Докажем включение в другую сторону. Пусть (s_1^*, s_2^*) слабое цепное РБС с порядком игроков $(\{1\}, \{2\})$, которое не является точкой Штакельберга в игре G. В силу односторонней соревновательности, оно может быть безопасным для игрока 1 только в том случае, если $s_2^* = BR_2(s_1^*)$. В игре G существует точка Штакельберга (s_1^{st}, s_2^{st}) с порядком игроков $(\{1\}, \{2\})$. Согласно сделанному предположению $s_1^* \neq s_1^{st}$ и $u_1(s_1^*, s_2^*) < u_1(s_1^{st}, s_2^{st})$. Рассмотрим одностороннее отклонение $(s_1^*, s_2^*) \to (s_1^{st}, s_2^*)$ игрока 1. Если $u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1^{st}, s_2^*)$, то ответное одностороннее отклонение $(s_1^{st}, s_2^*) \to (s_1^{st}, s_2^{st})$ игрока 2 не может уменьшить его выигрыш, и следовательно $u_1(s_1^{st}, s_2^*) \geq u_1(s_1^{st}, s_2^{st})$. Последние два неравенства находятся в противоречии с предположением $u_1(s_1^*, s_2^*) < u_1(s_1^{st}, s_2^{st})$. Следовательно, $u_1(s_1^*, s_2^*) < u_1(s_1^{st}, s_2^*)$, т.е. отклонение $(s_1^*, s_2^*) \to (s_1^{st}, s_2^*)$ игрока 1 является выгодным. Кроме того, оно является для игрока 1 строгим безопасным по определению 5, так как наибольший для него проигрыш достигается при ответном отклонении $(s_1^{st}, s_2^*) \to (s_1^{st}, s_2^{st})$, и даже в этом случае $u_1(s_1^*, s_2^*) < u_1(s_1^{st}, s_2^{st})$. Таким образом, профиль (s_1^*, s_2^*) не может быть слабым цепным РБС с порядком игроков $(\{1\}, \{2\})$ (по определению 2.6). Противоречие. Слабые цепные РБС совпадают с точками Штакельберга. □

4. Игры с более чем двумя участниками

Рассмотрим цепные РБС в играх с более чем двумя участниками. Можно ожидать, что такие цепные РБС будут также включать некоторые аналоги точек Штакельберга. Если постараться применить логику, использованную нами при доказательстве утверждения 2.1, то можно получить следующий критерий для игры G с $n > 2$ участниками.

Определение 4.1. *Условной точкой Штакельберга для игроков i и j при фиксированных стратегиях s_{-ij} других игроков назовем такую пару их стратегий (s_i^*, s_j^*), что*

$$s_j^* = BR_j(s_i^*|s_{-ij}), \quad u_i(s_i^*, s_j^*) = \max_{s_i, s_j \in BR_j(s_i|s_{-ij})} u_i(s_i, s_j, s_{-ij}), \qquad (4.1)$$

где $BR_j(s_i|s_{-ij})$ обозначает соответствие наилучших ответов игрока j на стратегию s_i игрока i при условии, что стратегии s_{-ij} других игроков фиксированы.

Утверждение 4.1. *Если игроков в игре G можно так перенумеровать, что любая пара стратегий (s_i^*, s_j^*) в игровом профиле s^* игроков с номерами $i, j\ :\ \ j > i$ является для них условной точкой Штакельберга при s_{-ij}^*, то s^* является слабым цепным РБС с тем же порядком игроков.*

Доказательство. Стратегия игрока i безопасна в s^* по отношению к игрокам $j > i$, так как $s_j^* = BR_j(s_i^*|s_{-ij}^*)$. На любое выгодное отклонение s_i' игрок $j > i$ может выбрать ответное отклонение $s_j' =$

$BR_j(s'_i|s^*_{-ij})$. Тогда, согласно (4.1), $u_i(s^*) \geq u_i(s'_i, s'_j, s^*_{-ij})$, т.е. s'_i не может быть строгим безопасным отклонением по отношению к игрокам $j > i$. Оба условия слабого цепного РБС из определения 2.6 выполняются. □

Хотя утверждение 3.1 является частным случаем этого критерия для $n = 2$, сам критерий оказывается слишком сильным при $n > 2$. В общем случае равновесие Штакельберга в играх с более чем двумя участниками не удается сопоставить с цепными РБС.

Пример 4. Рассмотрим следующую игру трех участников:

c_1 :	b_1	b_2
a_1	(0,0,0)	(1,2,2)
a_2	(2,2,1)	(2,1,2)

c_2 :	b_1	b_2
a_1	(2,1,2)	(2,2,1)
a_2	(1,2,2)	(0,0,0)

В ней есть аналоги точек Штакельберга (3.2) для трех игроков, взятых в любой последовательности. Тем не менее, цепного РБС (и слабого цепного РБС) в этой игре нет, поскольку в любом положении один из игроков всегда может сделать безопасное выгодное отклонение, что нарушает определение цепного РБС.

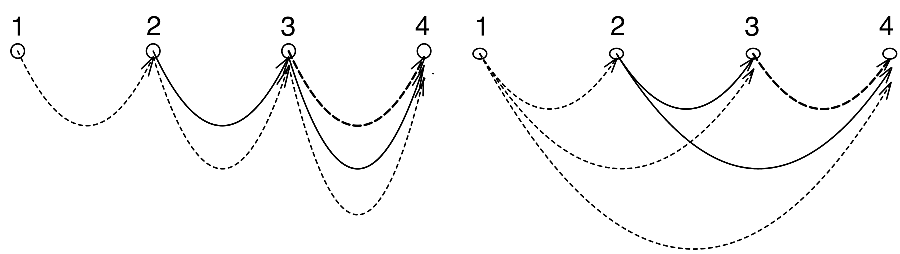

Рисунок 3. Структура предположений игроков в решении Штакельберга (слева) и в цепных РБС (справа).

Одна из возможных причин возникающего расхождения между цепными РБС и решениями Штакельберга может быть связана с разной структурой предположений игроков о взаимном поведении (см. рис. 3). В решении Штакельберга игроки выстраивают цепочки сложных предположений. Например, игрок 1 предполагает, что игрок 2 будет действовать, предполагая, что игрок 3 будет действовать, предполагая и т.д. В отличие от этого, в цепном РБС предположения игрока о поведении всех игроков с бо́льшим номером одинаковы, и они касаются только действий самих этих игроков. Таким образом, игроки не анализируют взаимные отклонения более, чем на один шаг вперед.

5. Продуктовое соревнование на отрезке

В качестве содержательного примера игры многих участников, в которой существует цепное РБС, рассмотрим задачу продуктового соревнования на отрезке [9, 18]. Рассмотрим континуальное множество потребителей с предпочтениями продуктовых характеристик, заданными на отрезке $[0,1]$. Предпочтения потребителей имеют неатомическую плотность распределения $\rho(x),\ x \in [0,1]$. N фирм производят продукцию с одинаковой фиксированной ценой и выбирают соответствующие ей характеристики x на отрезке $[0,1]$. Без ограничения общности, предположим, что их стратегии $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$. Будем считать потребление неэластичным, т.е. каждый потребитель покупает в точности единицу продукции. Пусть $B_i(x) = \{x \in [0,1] | \parallel x - x_i \parallel \le \parallel x - x_j \parallel \ \ \forall j \ne i\}$ обозначает область рынка, принадлежащую фирме i. Тогда функция выигрыша фирмы i:

$$U_i(x_i, x_{-i}) = (1+n)^{-1} \int_{B_i(x)} \rho(x)dx\,, \tag{5.1}$$

где n $(0 \le n \le N-1)$ – число других фирм (кроме фирмы i), выбравших расположение x_i. Итон и Липси в [9] заметили, что для $N = 3$ и $\rho = 1$ игра не имеет равновесий Нэша в чистых стратегиях.

В этой статье мы рассмотрим случай, когда $N > 2$, и предпочтения потребителей распределены с линейной плотностью $\rho(x) = x,\ x \in [0,1]$. Если три (или более) фирмы выбирают одинаковое расположение, то одна из них бесконечно малым смещением всегда может увеличить свой выигрыш за счет других двух (или более) фирм. Если две фирмы выберут одинаковое расположение, и у них есть сосед справа, то одна из этих двух фирм также бесконечно малым смещением может всегда увеличить свой выигрыш или за счет второй фирмы или за счет соседней фирмы справа. Если существует фирма, не совпадающая с другими по расположению, и она имеет соседа справа, то для нее всегда выгодно сместиться немного вправо (в направлении увеличения $\rho(x)$), и тем самым уменьшить выигрыш соседа справа. Таким образом, при любом выборе расположений фирмами в игре не существует равновесия Нэша в чистых стратегиях. Более того, в ней не существует (обычных) РБС, поскольку во всех игровых профилях существуют угрозы. Мы покажем, однако, что логика цепных РБС выявляет рациональное решение, при котором игроки рефлексивно учитывают взаимные угрозы.

Проанализируем безопасность игроков. Все угрозы в игре можно разделить на два вида. Во-первых, это *угрозы сдвигаться вправо*. Они заключаются в том, что фирмам всегда выгодно сдвигаться вправо (кроме самой правой фирмы), создавая тем самым угрозу для соседней фирмы справа. Во-вторых, существуют *угрозы «подрезания» доли рынка*. Если область рынка, принадлежащая фирме и находящаяся справа или слева от нее, превышает долю рынка, принадлежащую некоторой другой фирме, то для последней становится выгодно перескочить в положение, находящееся прямо возле положения первой фирмы, и забрать соответствующую долю рынка. Сделаем следующее предположение об осторожном поведении игроков. Игроки максимизируют свой выигрыш при условии безопасности от угроз «подрезания» их доли рынка. В то же время, они могут допускать угрозу со стороны своего соседа слева сдвинуться вправо, при условии, что эта угроза сдерживается ответной угрозой соседу слева быть «подрезанным».

Опишем возникающее при этом решение. Прежде всего, заметим, что выбранные условия безопасности можно удовлетворить только в том случае, если все игроки (за исключением быть может двух самых правых игроков N и $N-1$) выбирают различные расположения $x_i \neq x_j$. Рассмотрим самую левую фирму. Она будет сдвигаться вправо, пока не возникнет угрозы «подрезания» области рынка слева от нее со стороны некоторой фирмы, расположенной правее ее и имеющей минимальную долю рынка в игре U_{min} (см. рис. 4 слева). Следующая фирма также сдвигается к своему правому соседу до тех пор, пока доля рынка слева от нее не превышает U_{min}. Продолжая рассуждение рекурсивно, получаем, что каждая фирма $i < N-1$ будет сдвигаться направо, пока для нее не возникнет угрозы «подрезания» рынка со стороны некоторой фирмы $j > i$ правее ее. Для последних двух самых правых фирм выгодно сдвигаться по направлению друг к другу, пока они не попадут в общее положение $x_N = x_{N-1}$ и не поделят оставшуюся долю рынка пополам, причем остается единственная возможность, чтобы область рынка справа и слева от этого положения равнялась U_{min} (см. рис. 4 справа).

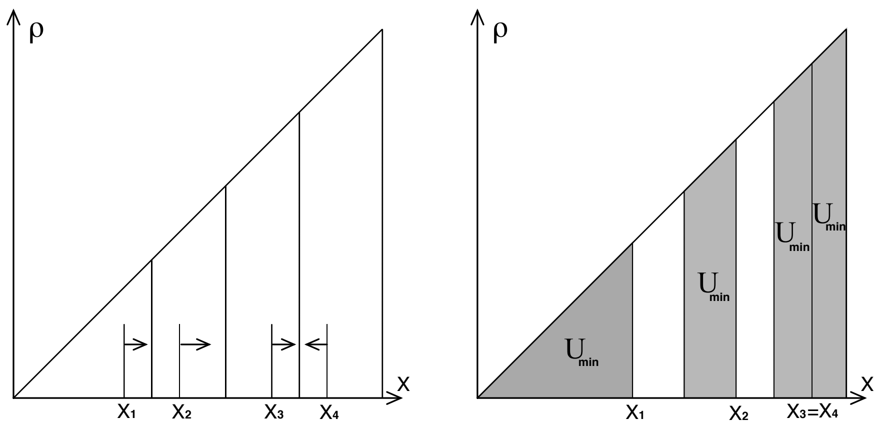

Рисунок 4. Положения фирм в цепном РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением предпочтений потребителей для $N = 4$.

Если формализовать это рассуждение, можно получить следующий строгий результат.

Утверждение 5.1. *В продуктовом соревновании $N > 2$ фирм на отрезке $[0, 1]$ с линейным распределением предпочтений потребителей $\rho(x) = x,\ x \in [0, 1]$ существует единственное (с точностью до перестановки игроков) цепное РБС, определяемое уравнениями*

$$x_i^2 - \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 = 2U_{min}, \quad i = 2, \ldots, N-1\,, \qquad (5.2)$$
$$x_1^2 = 1 - x_N^2 = 2U_{min}; \quad x_N = x_{N-1}\,.$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что положения, определяемые системой (5.2), являются по определению цепным РБС с игроками, пронумерованными в порядке их расположения слева направо.

Докажем, что это цепное РБС единственно (с точностью до перестановки игроков). Рассмотрим произвольное цепное РБС в продуктовом соревновании с линейным распределением предпочтений потребителей $\rho(x) = x$.

1. Заметим, что в цепном РБС не может быть трех (или более) фирм, выбравших одинаковое положение. В самом деле, в этом случае любая из этих фирм может бесконечно малым смещением увеличить свой выигрыш за счет других двух (или более) фирм. А в цепном РБС никакие две фирмы не могут угрожать друг другу одновременно. По той же причине, если две фирмы в цепном РБС выбирают одинаковое положение, то принадлежащие им области рынка слева и справа от этого положения должны быть равны.

2. Любая фирма всегда угрожает своему непосредственному соседу справа (если он есть) немного сдвинуться вправо (в направлении увеличения $\rho(x)$). Поэтому, в любом цепном РБС фирмы могут быть пронумерованы только в порядке их расположения слева направо (и никак иначе). Таким образом, можно считать, что расположения фирм $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$ пронумерованы точно в соответствии с их порядком в цепном РБС.

3. По определению цепного РБС расположение самого правого игрока должно быть его наилучшим ответом. Если это расположение не совпадает с расположением какого-либо другого игрока, то оно не может являться наилучшим ответом, поскольку иначе самому правому игроку будет выгодно немного сместиться влево. Поэтому два самых правых игрока всегда выбирают в цепном РБС одинаковое положение: $x_{N-1} = x_N$. Как было отмечено в пункте 1, принадлежащие им области рынка слева и справа от общего положения должны быть равны.

4. Предположим, что фирмы $i-1$ и i имеющие соседа справа выбирают одинаковое расположение в цепном РБС. Тогда фирма i может увеличить свой выигрыш небольшим сдвигом вправо. В этом случае «подрезаемая» доля рынка справа от фирмы i будет меньше «подрезаемой» доли рынка слева от фирмы $i+1$. Так что, после небольшого сдвига фирмы i вправо не может возникнуть угрозы «подрезать» ее долю рынка со стороны фирм $j > i+1$ расположенных справа, если не было угроз «подрезания» доли рынка у фирмы $i+1$ со стороны этих фирм в исходном положении цепного РБС. Также не может возникнуть встречной угрозы фирме i со стороны фирмы $i+1$ сдвинуться влево, поскольку это будет для нее (для фирмы $i+1$) невыгодно. Даже если фирма $(i+1)$ имеет самое правое расположение, то согласно пункту 3, это расположение выбирает еще одна фирма, и если фирма $(i+1)$ сместится влево у нее появится сосед справа. Таким образом, получается, что небольшой сдвиг фирмы i вправо из исходного положения является безопасным отклонением по отношению к игрокам $j > i$, что противоречит определению цепного РБС. Следовательно, наше предположение было неверным, и все фирмы (кроме двух самых правых фирм N и $N-1$) выбирают в цепном РБС различные расположения.

5. Учитывая полученные выше условия, построение системы уравнений (5.2) для определения расположений игроков в произвольном цепном РБС проводится следующим однозначным способом. Обозначим через i_{min} номер фирмы, имеющей минимальный выигрыш в игре $U_{min} = \min\limits_{1 \le i \le N} U_i(x_i, x_{-i})$, где U_i определяется согласно (5.1) (или наименьший такой номер, если таких фирм несколько). Рассмотрим фирму 1 в цепном РБС. Согласно пункту 2 она имеет самое левое расположение x_1. Согласно пункту 4, следующая фирма слева выбирает расположение $x_2 > x_1$. Если $i_{min} = 1$, то для фирмы 1 небольшое смещение вправо будет являться выгодным безопасным отклонением. Поскольку в цепном РБС это невозможно, то $i_{min} \neq 1$. Более того, фирма 1 не может безопасно и выгодно сместиться вправо только в том случае, если при этом возникнет угроза «подрезания» области рынка слева от нее со стороны фирмы i_{min}, расположенной правее. Формально это условие записывается как $x_1^2 = 2U_{min}$. Рассмотрим фирму 2 в цепном РБС, имеющую (согласно пунктам 2 и 4) следующее расположение слева $x_2 > x_1$. Если $2 < N-1$, то согласно пункту 4, следующая фирма слева выбирает расположение $x_3 > x_2$, и доказывается аналогично, что $i_{min} \neq 2$ (т.е. $i_{min} > 2$). Фирма 2 в цепном РБС не может безопасно и выгодно сместиться вправо только в том случае, если при этом возникнет угроза подрезания области рынка слева от нее со стороны фирмы i_{min}, расположенной правее, т.е. $x_2^2 - \left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)^2 = 2U_{min}$. Продолжая рассуждать рекурсивно, получаем, что для каждой фирмы $i < N-1$, во-первых $i_{min} \neq i$

(т.е. $i_{min} > i$), а во-вторых $x_i^2 - \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)^2 = 2U_{min}$. Отсюда получаем остальные уравнения (5.2). Для двух последних в цепном РБС фирм, расположенных правее всех, согласно пункту 3, выполняется $x_{N-1} = x_N$, и они делят оставшуюся долю рынка пополам. При этом остается единственная возможность, что $i_{min} \in \{N, N-1\}$ и $1 - x_N^2 = 2U_{min}$. Система (5.2) легко сводится к двум уравнениям для x_N и U_{min}: $x_N^2 = 1 - 2U_{min}$; $x_N = f(U_{min})$, где $f(U_{min})$ – строго возрастающая функция. Эта система всегда имеет единственное решение. Таким образом, положения фирм в рассматриваемой игре задаются системой (5.2) единственным образом (с точностью до перестановки игроков). $\square$

На рис. 4 представлено точное решение (5.2) для четырех фирм:

$$x_1 = \sqrt{2U_{min}}, \quad x_2 = \frac{5}{3}\sqrt{2U_{min}}, \quad x_3 = x_4 = \sqrt{1 - 2U_{min}},$$

где величина $2U_{min} \approx 0.17677$ находится из условия:

$$\frac{5}{3}\sqrt{2U_{min}} + \sqrt{1 - 2U_{min}} = 2\sqrt{1 - 4U_{min}}\,.$$

Таким образом, хотя в игре не существует ни равновесия Нэша, ни безопасных профилей, логика цепного РБС позволяет обнаружить рациональное единственное решение, в котором игроки рефлексивно учитывают взаимные угрозы. Напрашивается сравнение найденного решения с соответствующим решением Штакельберга. Хотя мы не нашли точного решения Штакельберга для данной задачи в случае произвольного числа фирм N, но численное ее решение для $N = 3$ и $N = 4$ совпало с решением (5.2) с точностью не хуже $2 \cdot 10^{-4}$ по расположениям игроков. Таким образом, можно предположить, что в данной задаче цепные РБС совпадают с решением Штакельберга. В связи с этим становится принципиальным дальнейшее исследование соотношения этих концепций в случае многих игроков. Вопрос о поиске содержательного примера, в котором цепное РБС отличалось бы от решения Штакельберга, также остается открытым.

6. Заключение

В поисках альтернативной концепции равновесий для бескоалиционных игр, в которых нет равновесий Нэша в чистых стратегиях, в [2] были предложены *равновесия в безопасных стратегиях (РБС)* как модель осторожного поведения игроков. На практике, однако, предлагаемые в этой концепции условия безопасности для некоторых игр оказались слишком сильными. В данной статье мы рассматриваем такую модификацию РБС, в которой стандартные условия безопасности стратегии и отклонения игрока ослаблены. В частности, они рассматриваются по отношению не ко всем игрокам, а только избирательно к определенной группе игроков. Был рассмотрен самый простой случай, когда игроки могут быть так пронумерованы, что каждый игрок i в своем поведении избегает всех угроз со стороны игроков $j > i$, но допускает угрозы со стороны игроков $j < i$ при условии, что эти угрозы эффективно сдерживаются некоторыми встречными угрозами. Такая модификация РБС была названа *цепным РБС*. Она позволяет учесть асимметричное отношение игроков к взаимным угрозам в безкоалиционной игре в простейшем случае, когда все игроки строго упорядочены в своем отношении к безопасности. Содержательный смысл таких равновесий проиллюстрирован на примере двух известных непрерывных игр, в которых не существует чистых равновесий Нэша и (обычных) РБС. Тем не менее, логика цепного РБС позволяет обнаружить в этих играх рациональное решение, в котором игроки рефлексивно учитывают взаимные угрозы.

На первый взгляд может показаться, что условие строгой упорядоченности игроков по их отношению к безопасности может подходить только для довольно специального класса игр. Тем не менее, идея цепных РБС легко обобщается на произвольные разбиения игроков на классы безопасности, в которых игроки по разному относятся к угрозам игроков из разных классов. Такие равновесия были определены как *сложные (или асимметричные) РБС* в [2, 3]. Несколько общих методов нахождения таких равновесий было предложено в [13]. Предлагаемая концепция не отвечает до конца на вопрос, какая структура взаимных угроз реализуется в конкретной игре. Тем не менее, предложенный формализм позволяет выявлять все возможные в игре структуры таких взаимных угроз при асимметричных взаимодействиях. Мы предполагаем, что он позволит систематически выявлять в бескоалиционных играх новые квазиравновесные положения, которые не получается идентифицировать другими методами.

Еще один принципиальный результат работы состоит в том, что была обнаружена тесная связь между цепными РБС и решениями Штакельберга в случае игры двух лиц. В этом случае точки Штакельберга оказываются *слабыми* цепными РБС. Было также показано, что эти концепции начинают существенно расходиться в игре с более чем двумя участниками. Тем не менее, в ходе дополнительного исследования мы обнаружили, что в обоих рассмотренных нами примерах найденные цепные РБС практически совпадают с решениями Штакельберга. Это вызвало целый ряд дальнейших вопросов. Существуют ли содержательные примеры цепных РБС, не являющиеся точками Штакельберга? Наоборот, существуют ли содержательные решения Штакельберга, не являющиеся цепными РБС? Если есть принципиальное отличие этих решений, то в чем оно? А если его нет, то как тогда цепные РБС позволяют получать алгоритмически более трудные для нахождения решения Штакельберга? Можно ли в этом случае сказать, что класс асимметричных РБС включает все решения Штакельберга как частный случай? Все эти открытые вопросы выходят за рамки настоящей статьи и задают направление наших дальнейших исследований.

Благодарности

Статья написана на основе доклада, прочитанного на Европейской конференции по теории игр SING 11, совмещенной с Международной конференцией «Теория игр и менеджмент» GTM 2015. Мы глубоко признательны К. Д'Апремону, Ф.Т. Алескерову и Д.А. Новикову за постоянный интерес и поддержку этого исследования. Мы благодарим М.В. Губко, Н.А. Коргина и В.О. Корепанова за содержательные дискуссии. Благодарим рецензента за содержательные и конструктивные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-01-00131-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алескеров Ф.Т. *Теоретико-игровое моделирование: попытка краткого обсуждения и прогноза развития* // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. Т. 17, вып. 1. С. 181–184.
2. Искаков М.Б. *Равновесие в безопасных стратегиях* // Автоматика и телемеханика. 2005. №3. С. 139–153.
3. Искаков М.Б., Искаков А.Б. *Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях* // Управление большими системами. 2014. Вып. 51. С. 130–157.
4. Искаков А.Б., Искаков М.Б. *Равновесия в безопасных стратегиях в ценовой дуополии Бертрана-Эджворта* // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 2. С. 42–59.
5. d'Aspremont C., Gerard-Varet L.-A. *Stackelberg-Solvable Games and Pre-Play Communication* // Journal of Economic Theory. 1980. V. 23(2). P. 201–217.
6. Baye M.R., Kovenock D., de Vries C.G. *The solution of the Tullock rent-seeking game when $R > 2$: mixed-strategy equilibria and mean dissipation rates* // Discussion Paper 1993-68, Tilburg University, Center for Economic Research, 1993.
7. Borel E. *The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels* // Econometrica. 1953. V. 21(1). P. 97–100.
8. Dasgupta P., Maskin E. *The existence of equilibrium in discontinuous economic games, II: Applications* // Review Economic Studies. 1986. V. LIII. P. 27–41.
9. Eaton C., Lipsey R. *The Principle of Minimum Differentiation Reconsidered: Some New Developments in the Theory of Spatial Competition* // Review of Economic Studies. 1975. V. 42. P. 27–50.
10. Iskakov M., Iskakov A., Zakharov A. *Equilibria in secure strategies in the Tullock contest* // CORE Discussion Paper 2014/10. Louvain: Universite Catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics, 2014.

11. Iskakov M., Iskakov A. *Equilibrium in secure strategies* // CORE Discussion Paper 2012/61. Louvain: Universite Catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics, 2012.

12. Iskakov M., Iskakov A. *Solution of the Hotelling's game in secure strategies* // Economics Letters. 2012. V. 117. P. 115–118.

13. Iskakov M., Iskakov A. *Asymmetric equilibria in secure strategies* // Working Paper WP7/2015/03, National Research University Higher School of Economics. Moscow: Higher School of Economics Publ. House, 2015.

14. Kats A., Thisse J.-F. *Unilaterally competitive games* // International Journal of Game Theory. 1992. V. 21. P. 291–299.

15. Osborne M.J., Pitchik C. *Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition* // Econometrica. 1987. V. 55(4). P. 911–922.

16. Owen G. *Game Theory*. New York: Academic Press, 1968.

17. Rothschild, M., Stiglitz, J.E. *Equilibrium in competitive insurance markets: an essay on the economics of imperfect information* // Quarterly Journal of Economics. 1976. V. 90. P. 629–649.

18. Shaked A. *Non-Existence of Equilibrium for the 2-Dimensional 3-Firms Location Problem* // Review of Economic Studies. 1975. V. 42. P. 51–56.

19. Stackelberg H. *Marktform und Gleichgewicht*. Wien und Berlin: Springer, 1934.

20. Wilson C. *A model of insurance markets with incomplete information* // Journal of Economic Theory. 1977. V. 16. P. 167–207.

CHAIN EQUILIBRIA IN SECURE STRATEGIES

Alexey B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Dr. (isk_alex@mail.ru, iskakov@ipu.ru),
Mikhail B. Iskakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Dr. (mih_iskakov@mail.ru).

Abstract: In this paper we introduce a modification of the concept of Equilibrium in Secure Strategies (EinSS), which takes into account non-uniform attitudes of players to security in noncooperative games. In particular, we examine an asymmetric attitude of players to mutual threats in the simplest case, when all players are strictly ordered by their relation to security. Namely, we assume that players can be reindexed so that each player i in his behavior takes into account threats posed by players $j > i$ but ignores threats of players $j < i$ provided that these threats are effectively contained by some counter threats. A corresponding equilibrium we call Chain EinSS. The conceptual meaning of this equilibrium is illustrated by two continuous games, which fail to have pure Nash equilibrium or (conventional) EinSS. The Colonel Blotto two-person game (Borel 1953, Owen 1968) for two battlefields with different price always admits a Chain EinSS with intuitive interpretation. The product competition of many players on a segment (Eaton, Lipsey 1975, Shaked 1975) with a linear distribution of consumer preferences always admits a unique (up to permutation of players) Chain EinSS solution. We compare Chain EinSS with Stackelberg equilibrium.

Keywords: noncooperative games, equilibrium in secure strategies, asymmetric behavior, Blotto games, product competition, Stackelberg equilibrium.