Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.2, с. 3–27

УДК 519.83
ББК 22.18

О k-ДОСТИЖИМОСТИ ЯДЕР TU-КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Валерий А. Васильев*
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
e-mail: vasilev@math.nsc.ru

Основной результат статьи заключается в усилении теоремы автора о достижимости ядер сбалансированных TU-кооперативных игр. Полученное усиление позволяет смягчить влияние нетранзитивности классического доминирования α_v на качество последовательного улучшения доминируемых дележей игры v. Именно, установлена k-достижимость ядра $C(\alpha_v)$ любой сбалансированной TU-кооперативной игры v при всех натуральных k: для каждого доминируемого дележа x существует сходящаяся последовательность дележей $x_0, x_1, \ldots,$ такая, что $x_0 = x$, $\lim\ x_r \in C(\alpha_v)$ и x_{r-m} доминируется дележом x_r при всех $m \in [1,\ k]$ и $r \geq m$. Для обоснования того, что условие трансферабельности существенно, приводится пример NTU-игры G с «черной дырой», представляющей собой непустое замкнутое подмножество доминируемых дележей, содержащее все начинающиеся в нем α_G-монотонные траектории.

Ключевые слова: доминирование, ядро, динамическая система, обобщенная функция Ляпунова, k-достижимость.

1. Введение

Напомним [1-3], что TU-кооперативная игра n лиц (или *трансферабельная кооперативная игра n лиц*, в более благозвучной терминологии) обычно отождествляется со своей характеристической функцией $v : 2^N \to \mathbf{R}$, где $N = \{1, \ldots, n\}$, а 2^N – совокупность всех

* Работа поддержана грантами РФФИ 13-06-00311 и РГНФ 13-02-00226.

подмножеств N (предполагается, что $v(\emptyset) = 0$). Следуя традиционной терминологии, элементы множества N будем называть игроками, элементы $S \in 2^N$ – коалициями игроков, а величины $v(S)$ – максимальными гарантированными доходами, достижимыми усилиями коалиций S. Далее, $I(v)$ определяется как множество всех дележей игры v (множество индивидуально-рациональных распределений величины $v(N)$ между участниками игры v):

$$I(v) := \{x \in \mathbf{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq v(i), \quad i \in N\}.$$

Выше, как обычно, одноэлементные коалиции $\{i\}$ обозначаются одним символом i. На $I(v)$ определяется классическое [1] отношение доминирования α_v, сравнивающее дележи с точки зрения различных коалиций S (см.[1-3]):

$$x \ \alpha_v \ y \Leftrightarrow \exists S \subseteq N \ [(x_i < y_i, \ i \in S) \ \& \ (\sum_{i \in S} y_i \leq v(S))].$$

Напомним [2,3], что множество недоминируемых дележей игры v

$$C(\alpha_v) = \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v)[x \ \alpha_v \ y]\}$$

называется ее ядром. В социально-экономических и политологических приложениях большой интерес представляет асимптотика процессов последовательного доминирования (улучшения) дележей, оказавшихся за пределами ядра (сходятся ли эти процессы к недоминируемым дележам, или же проявляют некоторую цикличность, и т.п.) Говоря формально, речь идет о свойствах так называемых α_v-*монотонных* траекторий $\{x_r\}_{r=0}^{\infty} \subseteq I(v)$, начинающихся за пределами ядра $C(\alpha_v)$.

Определение 1.1. *Последовательность дележей $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ игры v называется α_v-монотонной (кратко: монотонной), если для всех $r \geq 0$ выполняется соотношение $x_r \ \alpha_v \ x_{r+1}$.*

Большой интерес, на наш взгляд, представляет случай, когда процесс последовательного улучшения дележа $x_0 \notin C(\alpha_v)$ (при надлежащем выборе доминирующих дележей) приводит, хотя бы в пределе, к недоминируемому дележу.

Определение 1.2. *Ядро $C(\alpha_v)$ игры v называется достижимым, если для каждого дележа $x \notin C(\alpha_v)$ существует сходящаяся α_v-монотонная последовательность дележей $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ игры v такая, что $x_0 = x$ и предел $\lim\limits_{r \to \infty} x_r$ принадлежит $C(\alpha_v)$.*

Теорема о достижимости ядра сбалансированной TU-кооперативной игры установлена в [5] (более подробное изложение имеется в [6]). Подчеркнем, что рассматриваемая в указанных работах постановка имеет дело с классическими определениями дележа и доминирования (в отличие, например, от статьи [7], где вместо $I(v)$ рассматривается существенно более широкое множество, значительно увеличивающее возможности «перестройки» доминируемых дележей).

Предлагаемое в работе обобщение теоремы о достижимоси ядра диктуется необходимостью повышения качества процесса последовательного улучшения доминируемых дележей, страдающее от нетранзитивности классического отношения доминирования (когда при соотношении $x_{r-1}\ \alpha_v\ x_r\ \alpha_v\ x_{r+1}$ дележ x_{r+1} не доминирует x_{r-1}; более того, может оказаться, что дележ x_{r-1} доминирует x_{r+1}). Конечно, радикальным усовершенствованием рассматриваемого процесса было бы обеспечение условия $x_r\ \alpha_v\ x_s$ для всех $r < s$. Но это невозможно, как показывают уже простейшие примеры игр 3-х лиц. Поэтому далее предлагается усиление требования α_v-монотонности, связанное с возможностью выбирать на каждом шаге последовательного доминирования такие дележи, которые улучшают не один, а сразу несколько (но не более, чем некоторое число k) непосредственно предшествующих дележей. Представляется, что помимо теоретической значимости, рассмотрение указанной возможности повышения качества последовательного улучшения представляет интерес и для некоторых социально-экономических и политологических приложений.

Определение 1.3. *Пусть k – произвольное натуральное число. Последовательность дележей $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ игры v называется (α_v, k)-монотонной (кратко: k-монотонной), если для всех $m \in [1, k]$ и $r \geq m$ выполняется соотношение $x_{r-m}\ \alpha_v\ x_r$.*

Отвечающее предложенному понятию k-монотонности определение k-достижимости ядра вполне аналогично определению 1.2.

Определение 1.4. *Пусть k – произвольное натуральное число. Ядро $C(\alpha_v)$ игры v называется k-достижимым, если для каждого дележа $x \notin C(\alpha_v)$ существует сходящаяся (α_v, k)-монотонная после-*

довательность дележей $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ *игры* v *такая, что* $x_0 = x$ *и предел* $\lim\limits_{r\to\infty} x_r$ *принадлежит ядру* $C(\alpha_v)$.

Основной результат работы – теорема о k-достижимости ядра $C(\alpha_v)$ для любой сбалансированной игры v и для каждого натурального k (усиление на случай $k > 1$ теоремы из [5] об 1-достижимости ядер сбалансированных игр).

Помимо введения работа содержит еще 4 раздела. В следующем разделе излагается несколько усиленный вариант теоремы о стабильности многозначных динамических систем [4] и его приложение к анализу условий достижимости ядер абстрактных отношений доминирования. Третий раздел содержит, для полноты изложения, упрощенное доказательство теоремы о достижимости ядер сбалансированных TU-кооперативных игр, установленной в [5] (см. также [6]). В четвертом разделе приводится доказательство основного результата – теоремы о k-достижимости ядер трансферабельных сбалансированных игр, обобщающей теорему о достижимости из [5]. Наконец, пятый раздел содержит пример NTU-игры 3-х лиц из работы [6], показывающий, что отсутствие трансферабельности может приводить к появлению «черных дыр» – непустых замкнутых множеств доминируемых дележей, не выпускающих из себя ни одной 1-монотонной траектории.

2. Элементы динамической теории кооперативных игр

Ниже приводится несколько обобщенный результат из [4], касающийся условий устойчивости многозначных динамических систем, а также обсуждаются применения этого результата в анализе достижимости ядер некоторых абстрактных отношений доминирования.

Предполагается, что рассматриваемое далее метрическое пространство (X, d) является полным (здесь d – метрика этого пространства). Как и в [4], под многозначной динамической системой (м.д.с. – для краткости) на X будем понимать всякое соответствие $\varphi : X \to 2^X$, удовлетворяющее условию: $\varphi(x) \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$. Под траекторией системы φ, как обычно, понимается всякая последовательность $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$, для которой имеют место включения: $x_r \in \varphi(x_{r-1})$, $r = 1, 2, \ldots$.

Как обычно, графиком м.д.с. $\varphi : X \to 2^X$ будем называть множество $\mathrm{gr}\ \varphi := \{(x,y) \in X \times X \bigm| y \in \varphi(x)\}$. Далее, через φ_* будем обозначать расширение φ, определяемое формулой: $\varphi_*(x) := \cup_{m=1}^{\infty}\varphi^m(x)$, $x \in X$, где $\varphi^1(x) := \varphi(x)$, и $\varphi^{m+1}(x) := \cup_{y\in\varphi^m(x)}\varphi(y)$. Наконец, будем говорить, что функция $f : \mathrm{gr}\ \varphi \to \mathbf{R}$ является φ-ограниченной сверху по отношению ко второму аргументу, если функция $f(x,\cdot)$ является ограниченной сверху на множестве $\varphi(x)$ для каждого $x \in X$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что м.д.с.* $\varphi : X \to 2^X$ *допускает обобщенную функцию Ляпунова, если существует* φ_**-ограниченная сверху по отношению ко второму аргументу функция* $l : \mathrm{gr}\ \varphi_* \to \mathbf{R}_+$ *такая, что*

(L1) $l(x,y) \geq d(x,y)$ *для всех* $x \in X,\ y \in \varphi(x)$;

(L2) $l(x,z) \geq l(x,y) + l(y,z)$ *для всех* $x \in X,\ y \in \varphi_*(x),\ z \in \varphi_*(y)$.

Функцию l, удовлетворяющую условиям определения 2.1 (включая φ_*-ограниченность сверху по отношению ко второму аргументу), будем называть *обобщенной функцией Ляпунова м.д.с.* φ.

Ясно, что наличие обобщенной функции Ляпунова (без каких-либо дополнительных предположений о строении м.д.с. φ) еще не гарантирует сходимости всех траекторий φ к ее *финальному множеству*

$$E_\varphi := \{x \in X \bigm| \varphi(x) = \{x\}\}.$$

Полезным дополнительным свойством является так называемая полунепрерывность снизу либо самой системы φ, либо подходящих селекторов этой системы[1]. Напомним [4] соответствующее определение.

Определение 2.2. *М.д.с.* φ *называется полунепрерывной снизу, если для любых элементов* $x \in X$, $y \in \varphi(x)$ *и последовательности* $\{x_r\}_{r=1}^{\infty}$, *сходящейся к* x, *существует последовательность* $\{y_r\}_{r=1}^{\infty}$, *сходящаяся к* y, *такая, что* y_r *принадлежит* $\varphi(x_r)$ *для каждого* $r \geq 1$.

Как известно [4], для полунепрерывных снизу динамических систем существует стандартный метод выделения селекторов, имею-

---

[1] Как обычно, под селектором м.д.с. φ понимается всякая м.д.с. ψ, удовлетворяющая условию: $\psi(x) \subseteq \varphi(x)$ для всех $x \in X$.

щих те же финальные множества, что и исходная система, и обладающих свойством устойчивости (сходимости всех траекторий к элементам финальных множеств этих селекторов). Для того, чтобы сформулировать несколько обобщенную версию соответствующего результата из [4], отметим сразу же, что для любой м.д.с. φ, допускающей обобщенную функцию Ляпунова, выполняются соотношение $\rho_\varphi(x) < \infty,\ x \in X$, где

$$\rho_\varphi(x) := \sup\ \left\{d(x,y)\ \Big|\ y \in \varphi(x)\right\},\ x \in X.$$

Предложение 2.1. *Если м.д.с. φ полунепрерывна снизу и допускает обобщенную функцию Ляпунова, то ее финальное множество E_φ непусто. Более того, для любого $\delta \in (0,1)$ все траектории м.д.с. φ_δ, определяемой формулами: $\varphi_\delta(x) := \{x\}$ при $x \in E_\varphi$, и*

$$\varphi_\delta(x) := \left\{y \in \varphi(x)\ \Big|\ d(x,y) > \delta\rho_\varphi(x)\right\} \quad \text{при } x \notin E_\varphi,$$

сходятся к элементам ее финального множества, совпадающего с E_φ.

Доказательство. Зафиксируем какое-либо число $\delta \in (0,1)$. Поскольку определение м.д.с. φ_δ корректно вне зависимости от того, пусто или нет финальное множество E_φ, для доказательства предложения 2.1 достаточно установить справедливость его второй части. Именно, ниже устанавливается, что все траектории м.д.с. φ_δ сходятся к элементам множества E_φ (чем и доказывается непустота этого множества).

Приступая к доказательству сходимости траекторий рассматриваемой системы, отметим, что в силу определения обобщенной функции Ляпунова для любой траектории $\{x_r\}_{r=0}^\infty$ системы φ_δ выполняются неравенства

$$\sum_{r=0}^m d(x_r, x_{r+1}) \le \sum_{r=0}^m l(x_r, x_{r+1}) \le l(x_0, x_{m+1}), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда, по определению φ_δ и на основании включений $x_{r+1} \in \varphi_\delta(x_r),\ r \ge 0$, имеем: $d(x_r, x_{r+1}) > \delta\rho_\varphi(x_r),\ r \ge 0$. Следовательно, с учетом ограниченности сверху при любом $x \in X$ функции $l(x,\cdot)$ на множестве $\varphi_*(x)$, получаем

$$\sum_{r=0}^\infty d(x_r, x_{r+1}) \le \sup\ \left\{l(x_0, z)\Big| z \in \varphi_*(x_0)\right\} < \infty.$$

Значит, ввиду полноты метрического пространства (X, d) имеем: траектория $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ системы φ_δ является сходящейся.

Для доказательства того, что пределы таких траекторий являются элементами множества E_φ, воспользуемся тем, что в условиях полунепрерывности снизу м.д.с. φ полунепрерывной снизу является и функция $\rho = \rho_\varphi$. Для обоснования последнего утверждения покажем, что множество $M_\rho(a) = \{x \in X \Big| \rho(x) \leq a\}$ является замкнутым при любом выборе числа $a \in \mathbb{R}$. Итак, пусть $\{z_r\}_{r=0}^{\infty}$ – произвольная сходящаяся последовательность элементов из $M_\rho(a)$ и $z = \lim\ z_r$. Зафиксируем какой-либо элемент $y \in \varphi(z)$. В силу полунепрерывности снизу м.д.с. φ существует сходящаяся последовательность $\{y_r\}_{r=0}^{\infty}$ такая, что $y = \lim\ y_r$ и $y_r \in \varphi(z_r),\ r \geq 0$. Поскольку $d(z_r, y_r) \leq a$ для каждого $r \geq 0$, получаем $d(y, z) = \lim\ d(y_r, z_r) \leq a$. Поэтому, ввиду произвольности выбора $y \in \varphi(z)$, имеем: $\rho(z) = \sup\ \{d(y, z) \Big| y \in \varphi(z)\} \leq a$, что и доказывает полунепрерывность снизу функции ρ.

Для завершения доказательства предложения 2.1 допустим, от противного, что $x_* = \lim\ x_r$ не принадлежит финальному множеству E_φ. Но тогда, очевидно, $\rho(x_*) = c$ для некоторого $c > 0$. Отсюда, ввиду полунепрерывности снизу функции ρ имеем: существует номер r_0 такой, что $\rho(x_r) > c/2$ для всех $r \geq r_0$. Следовательно, по определению φ_δ, получаем: $d(x_r, x_{r+1}) > c\delta/2$ для всех $r \geq r_0$, что противоречит сходимости траектории $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$. Итак, $x_* = \lim\ x_r$ принадлежит финальному множеству E_φ, что и требовалось установить. $\square$

Приведем некоторые условия достижимости ядер абстрактных отношений доминирования, использующие предложение 2.1. Под абстрактным отношение доминирования будем понимать произвольное иррефлексивное (то есть, не содержащее пар вида (x, x)) бинарное отношение $\alpha \subseteq X \times X$. При этом будем предполагать, что множество α содержит хотя бы одну пару (x, y).

В стандартной игровой интерпретации соотношение $(x, y) \in \alpha$ трактуется так: альтернатива y «не хуже» альтернативы x (или, в другой терминологии: альтернатива y *α-доминирует* x, а также: x *α-доминируется* альтернативой y). Совокупность всех альтернатив, которые α-доминируют x (кратко: доминируют x) обозначается $\alpha(x) := \{y \in X \Big| (x, y) \in \alpha\}$. Соответственно, совокупность всех альтернатив, которые α-доминируются альтернативой y (кратко: доминируются y) обозначается $\alpha^{-1}(y) := \{x \in X \Big| (x,y) \in \alpha\}$. Кроме того, в дальнейшем используется стандартное сокращение

$$x \ \alpha \ y \iff (x,y) \in \alpha.$$

Ядром абстрактного доминирования α будем называть совокупность α-максимальных элементов

$$C(\alpha) := \{x \in X \Big| \alpha(x) = \emptyset\}.$$

В работе анализируются процессы последовательного улучшения доминируемых (оказавшихся за пределами ядра $C(\alpha)$) альтернатив. Эти процессы характеризуются повышенным качеством улучшающих альтернатив – по сравнению с теми, что рассматривались ранее (см., например, [5-7]). Введем соответствующие понятия.

Определение 2.3. *Пусть k – произвольное натуральное число. Последовательность $\{x_r\}_{r=0}^{\infty} \subseteq X$ называется (α, k)-монотонной (кратко: k-монотонной), если для каждого $m \in [1,k]$ и $r \geq m$ альтернатива x_r α-доминирует альтернативу x_{r-m}.*

Заметим, что $(\alpha, 1)$-монотонность (кратко: α-монотонность) совпадает с монотонностью, введенной и изучавшейся в [5,6]. Сформулируем понятие k-достижимости ядра доминирования α, представляющее обобщение на случай $k > 1$ понятия достижимости ядра, рассматривавшееся в [5,6].

Определение 2.4. *Пусть k – произвольное натуральное число. Будем говорить, что ядро $C(\alpha)$ является k-достижимым, если для каждой альтернативы $x \in X \setminus C(\alpha)$ существует сходящаяся k-монотонная последовательность $\{x_r\}_{r=0}^{\infty} \subseteq X$ такая, что $x_0 = x$ и $\lim\limits_{r\to\infty} x_r$ принадлежит $C(\alpha)$.*

В завершение этого раздела, опираясь на предложение 2.1, приведем некоторые условия 1-достижимости ядра из [5,6] для абстрактных отношений доминирования на компактном метрическом пространстве (X, d). Для их формулировки потребуется следующее определение

Определение 2.5. *Отношение доминирования α называется полуоткрытым снизу, если множества $\alpha^{-1}(x)$ являются открытыми для каждого $x \in X$.*

Как вытекает из предложения 2.1, для доказательства достижимости ядра $C(\alpha)$ отношения доминирования α достаточно построить полунепрерывный снизу селектор ψ соответствия

$$\varphi^\alpha(x) := \alpha(x) \cup \{x\}, \quad x \in X,$$

допускающий обобщенную функцию Ляпунова и удовлетворяющий соотношению $E_\psi = C(\alpha)$. Отыскивая интересующие нас селекторы м.д.с. φ^α в форме

$$\psi_l(x) := \{y \in \alpha(x) \;\Big|\; l(x,y) > d(x,y)\} \cup \{x\}, \quad x \in X,$$

при подходящем выборе функции l получаем следующий результат об условиях 1-достижимости ядра $C(\alpha)$ (ниже и далее $\varphi^\alpha_* := (\varphi^\alpha)_*$).

Теорема 2.1. *Пусть отношение доминирования α полуоткрыто снизу и при этом существует полунепрерывная снизу по первому аргументу и ограниченная сверху по второму функция $l : \mathrm{gr}\ \varphi^\alpha_* \to$ $\mathbf{R}_+$ такая, что*

$$l(x,z) \geq l(x,y) + l(y,z) \quad \textit{для всех} \quad x \in X,\ y \in \varphi^\alpha_*(x),\ z \in \varphi^\alpha_*(y).$$

Тогда при выполнении условия

$$\forall x \notin C(\alpha) \exists y \in \alpha(x)\ [l(x,y) > d(x,y)] \tag{2.1}$$

ядро $C(\alpha)$ непусто и 1-достижимо.

Доказательство. Положим

$$\varphi^\alpha_l = \{y \in \alpha(x) \Big| l(x,y) > d(x,y)\} \cup \{x\}, \quad x \in X. \tag{2.2}$$

Ясно, что м.д.с. φ^α_l является селектором системы φ^α, и при этом справедливо соотношение $E_{\varphi^\alpha_l} = C(\alpha)$. Кроме того, непосредственно из определения м.д.с. φ^α_l и из требований, касающихся функции l, вытекает, что сужение l на график системы $\psi = (\varphi^\alpha_l)_*$ является обобщенной функцией Ляпунова м.д.с. φ^α_l. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 2.1, согласно предложению 2.1, остается установить, что система φ_l^α является полунепрерывной снизу. Пусть $x = \lim\ x_m$ и $y \in \varphi_l^\alpha(x)$. Если $y = x$, то полагаем $y_m = x_m,\ m \geq 1$, и получаем требуемую последовательность: $\lim\ y_m = y$ и $y_m \in \varphi_l^\alpha(x_m)$ для каждого $m \geq 1$. Пусть теперь $y \in \varphi_l^\alpha(x)$ и $y \neq x$. Поскольку $\alpha^{-1}(y)$ непусто и открыто, а функция $l(\cdot, y)$ полунепрерывна снизу на $\alpha^{-1}(y)$, то ввиду включения $x \in \alpha^{-1}(y)$ имеем: существует окрестность U_x элемента x такая, что $U_x \subseteq \alpha^{-1}(y)$ и при этом $l(z, y) - d(z, y) > 0$ для всех $z \in U_x$. Здесь, наряду с полунепрерывностью снизу функции $l(\cdot, y)$ мы воспользовались непрерывностью метрики d и соотношением $l(x, y) - d(x, y) > 0$, вытекающим из определения системы φ_l^α. Согласно выбору окрестности U_x имеем: для каждого элемента $z \in U_x$ справедливо включение $y \in \alpha(z)$ и, следовательно, y принадлежит $\alpha(x_m)$ для всех m, больших некоторого m_0. Полагая $y_m = y$ при $m > m_0$ и $y_m = x_m$ при $m \leq m_0$, получаем требуемую последовательность и в случае $y \neq x$. $\square$

Одним из наиболее полезных следствий теоремы 2.1 является следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть α – произвольное полуоткрытое снизу бинарное отношение на X. Если X – компакт и, кроме того, существует непрерывная функция $u : X \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая требованию*

$$\forall x \notin C(\alpha)\ \exists y \in \alpha(x)\ [u(x) - u(y) > d(x, y)], \tag{2.3}$$

то $C(\alpha) \neq \emptyset$, и для каждого $x \in X \setminus C(\alpha)$ существует сходящаяся α-монотонная последовательность $\{x_r\}_{r=0}^\infty$ такая, что $x_0 = x$ и предел $\lim\ x_r$ принадлежит ядру $C(\alpha)$.

Доказательство. Полагая $l(x, y) = u(x) - u(y),\ (x, y) \in \mathrm{gr}\ \varphi_*^\alpha$, нетрудно убедиться, что бинарное отношение α, фигурирующее в следствии, и введенная функция l удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1. В частности, ограниченность сверху для каждой из функций $l(x, \cdot)$, $x \in X$, вытекает из непрерывности функции u и компактности пространства X. Условие (2.1) теоремы 2.1 для построенной функции u выполняется в силу требования (2.3). Это же требование обеспечивает выполнение равенства $E_{\varphi_l^\alpha} = C(\alpha)$, где, как и в доказательстве теоремы 2.1, м.д.с. φ_l^α определяется согласно формуле (2.2).

Суммируя сказанное, получаем: в условиях следствия 2.1 ядро $C(\alpha)$ непусто и 1-достижимо. □

3. Об 1-достижимости ядра трансферабельной кооперативной игры

Доказательство упоминавшейся теоремы о достижимости ядра сбалансированной TU-кооперативной игры n лиц (или, в терминологии предыдущих разделов – об 1-достижимости ядер таких игр) опирается на следствие 2.1 из второго раздела. При этом в качестве функции u будет использоваться нормированное евклидово расстояние до ядра $C(\alpha_v)$:

$$u_v(x) := 4nd_2(x, C(\alpha_v)), \quad x \in I(v),$$

где $d_2(x, C(\alpha_v)) = \inf \left\{\|x-u\|_2 \,\middle|\, u \in C(\alpha_v)\right\}$ – евклидово расстояние от точки x до множества $C(\alpha_v)$.

Предложение 3.1. *Для любого доминируемого дележа $x \in I(v)$ сбалансированной игры v существует доминирующий его дележ этой игры y такой, что*

$$u_v(x) - u_v(y) > \|x-y\|_2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Учитывая сбалансированность игры v, не уменьшая общности, можно считать, что v является 0-нормализованной игрой: $v(i) = 0$ для всех $i \in N$. Действительно, учитывая сбалансированность семейства $\{S, \{\{i\}\}_{i\in N\setminus S}\}$ при любом $S \subseteq N$, имеем: $v(S) + \sum\limits_{i\in N\setminus S} v(i) \le v(N)$ для каждой коалиции $S \subseteq N$. Поэтому $\tilde v(S) \le \tilde v(N)$ для всех $S \subseteq N$, где $\tilde v(S) := v(S) - \sum\limits_{i\in S} v(i),\ S \subseteq N$. Далее, ясно, что $\tilde v(i) = 0$ для каждого $i \in N$ и, кроме того, $C(\alpha_{\tilde v}) = C(\alpha_v) - v^{(1)} = C(\tilde v)$, где вектор $v^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой $v_i^{(1)} = v(i)$, $i \in N$, а $C(\tilde v)$ – так называемое c-ядро игры $\tilde v$: $C(\tilde v) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,\middle|\, x(N) = \tilde v(N),\ x(S) \ge \tilde v(S),\ S \subseteq N\right\}$. Здесь и далее используется стандартное обозначение

$$x(S) := \sum_{i\in S} x_i, \quad S \subseteq N.$$

Таким образом, переходя, если необходимо, к игре $\tilde{v}$, будем считать, что рассматриваемая игра является 0-нормализованной и допускает представление ядра $C(\alpha_v)$ в виде решения системы линейных уравнений и неравенств

$$C(\alpha_v) = C(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \big| \ x(N) = v(N), \ x(S) \geq v(S), \quad S \subseteq N\}.$$

Для доказательства искомого соотношения (3.1) зафиксируем произвольный дележ $x \in I(v) \setminus C(v)$ и покажем, что существует $z \in I(v)$ удовлетворяющий неравенству

$$u_v(x) - u_v(z) > ||x - z||_2 \tag{3.2}$$

и следующему ослабленному условию доминирования:

$$x \ \tilde{\alpha}_v \ z, \tag{3.3}$$

где $x \ \tilde{\alpha}_v \ z \Leftrightarrow \exists S \ [(x(S) < z(S) \leq v(S))\&(x_i \leq z_i, \ i \in S)]$. Ясно, что при условии $x \ \tilde{\alpha}_v \ z$ любая окрестность дележа z содержит дележ $y \in \alpha_v(x)$, сохраняющий, в силу непрерывности функции u_v, неравенство (3.2). Поэтому существование z, удовлетворяющего соотношениям (3.2) и (3.3), доказывает наше предложение.

Для построения вышеуказанного дележа z рассмотрим элемент u ядра $C(v)$, ближайший к x в смысле нормы $||\cdot||_2$. Нетрудно убедиться, что для u найдется коалиция $S \subseteq N$ такая, что $x(S) < u(S) = v(S)$. Действительно, положим $\Omega_x = \{T \subseteq N \big| \ x(T) < v(T)\}$ и покажем, что существует коалиция $S \in \Omega_x$, для которой выполняется равенство $u(S) = v(S)$. Допуская противное и учитывая, что u принадлежит множеству $C(v)$, получаем: $u(T) > v(T)$ для всех $T \in \Omega_x$. Из этих неравенств, ввиду соотношений $u \in C(v)$ и $x(T) \geq v(T), T \notin \Omega_x$, вытекает, что дележ $u_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)u$ принадлежит $C(v)$ при достаточно малом $\lambda \in (0, 1)$. Но, как нетрудно проверить, для каждого $\lambda \in (0, 1)$ справедливо неравенство $\|x - u_\lambda\|_2 < \|x - u\|_2$, приводящее к противоречию с предположением о том, что u является наименее уклоняющимся от x элементом множества $C(v)$.

Итак, зафиксируем какую-либо коалицию S такую, что $x(S) <$

$u(S) = v(S)$ и положим

$$\begin{aligned} S_1 &= \{i \in S | \ x_i < u_i\}, \\ S_2 &= \{i \in N \setminus S | \ x_i > u_i\}, \\ T_1 &= \{i \in S | \ x_i \geq u_i\}, \\ T_2 &= \{i \in N \setminus S | \ x_i \leq u_i\}. \end{aligned}$$

По определению S, x и u имеем: коалиции S_1 и S_2 непустые. Поэтому, если $T_1^+ = \{i \in T_1 | \ x_i > u_i\} = \emptyset$, то в качестве дележа z, удовлетворяющего условиям (3.2) и (3.3), можно взять u. Если же множество T_1^+ непусто, то полагая

$$e(x,S) = v(S) - x(S),$$
$$q_j = e(x,S)/|u(S_j) - x(S_j)|, \ j = 1,2,$$

определим $z \in \mathbb{R}^N$ формулой

$$z_i = \begin{cases} x_i + q_1(u_i - x_i) & , \quad i \in S_1, \\ x_i + q_2(u_i - x_i) & , \quad i \in S_2, \\ x_i & , \quad i \in T_1 \cup T_2. \end{cases}$$

Покажем, что z является дележом игры v. С этой целью заметим, что очевидное соотношение

$$e(x,S) = \Big| \sum_{i \in S_j \cup T_j} (u_i - x_i) \Big|, \quad j = 1,2,$$

влечет включения $q_1, q_2 \in (0,1]$. Поэтому справедливы неравенства $z_i \geq \min \{x_i, u_i\} \geq 0$ для всех $i \in S_1 \cup S_2$. Эти неравенства вместе с соотношениями $e(x,S) = q_j \big| u(S_j) - x(S_j) \big|$, $j = 1,2$, и доказывают требуемое включение $z \in I(v)$. Принимая во внимание, что коалиция S_1 непустая, из соотношений

$$z(S) = x(S) + e(x,S) = v(S), \ x_i = z_i, \quad i \in T_1$$

получаем

$$x(S) < z(S) \leq v(S), \ x_i \leq z_i, \quad i \in S.$$

По определению доминирования $\tilde{\alpha}_v$, указанные неравенства означают, что дележ z доминирует (в смысле бинарного отношения $\tilde{\alpha}_v$) дележ x с помощью коалиции $S = S_1 \cup T_1$.

Чтобы доказать неравенство (3.2), укажем сначала верхнюю оценку разности $\|x-z\|_2$. Именно, в силу определения вектора z и величин q_1, q_2 имеем

$$\|x-z\|_2 = \Big[\sum_{j=1}^{2} q_j^2\Big(\sum_{i\in S_j}(u_i-x_i)^2\Big)\Big]^{1/2} =$$

$$e(x,S)\Big[\sum_{j=1}^{2}\sum_{i\in S_j}(u_i-x_i)^2/(u(S_j)-x(S_j))^2\Big]^{1/2} \le \sqrt{2}\; e(x,S). \qquad (3.4)$$

Далее, отметим, что согласно определению функции u_v справедливо неравенство

$$(4n)^{-1}(u_v(x)-u_v(z)) \ge \|x-u\|_2 - \|z-u\|_2. \qquad (3.5)$$

Для установления нижней оценки разности $\|x-u\|_2 - \|z-u\|_2$ отметим, что по определению дележа z справедливо равенство $\|z-u\|_2 = [(\|x-u\|_2)^2] - (Q_1+Q_2)]^{1/2}$, где

$$Q_j = (2q_j - q_j^2)\cdot\sum_{i\in S_j}(x_i-u_i)^2,\ j=1,2.$$

Поскольку $q_1, q_2 \in (0,1]$, имеем: $2q_1 - q_1^2 > 0$, $2q_2 - q_2^2 > 0$ и, следовательно, $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$. Поэтому справедливы соотношения

$$\|x-u\|_2 - \|z-u\|_2 = \frac{(\|x-u\|_2)^2 - (\|z-u\|_2)^2}{\|x-u\|_2 + \|z-u\|_2} \ge (Q_1+Q_2)/2\|x-u\|_2. \qquad (3.6)$$

Для оценки правой части этих соотношений воспользуемся специальным случаем неравенства Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2/(\sum_{i=1}^{m} a_i)^2 \ge 1/m \qquad (3.7)$$

для всех натуральных m. Более детально, в силу определения величины $e(x,S)$ и коалиций S_1, S_2, T_1, T_2 имеем

$$\sum_{i\in T_j}(x_i-u_i)^2 \le (u(T_j)-x(T_j))^2 \le (u(S_j)-x(S_j))^2,\ j=1,2.$$

Поэтому, в силу (3.7) получаем

$$\sum_{i\in T_j}(x_i-u_i)^2 \le [x(S_j)-u(S_j)]^2 \le |S_j|\sum_{i\in S_j}(x_i-u_i)^2,\ j=1,2. \qquad (3.8)$$

Следовательно, на основании неравенств $|S_j|<n$, $j=1,2$, имеем

$$\sum_{i\in S_j\cup T_j}(x_i-u_i)^2 \le n\sum_{i\in S_j}(x_i-u_i)^2,\ j=1,2.$$

Суммируя эти неравенства и извлекая корень квадратный из обеих частей, получаем

$$\|x-u\|_2 \le \sqrt{n}\Big[\sum_{i\in S_1\cup S_2}(x_i-u_i)^2\Big]^{1/2}.$$

Отсюда, по определению Q_1, Q_2 имеем

$$\|x-u\|_2 \le \sqrt{n}\Big[\sum_{j=1}^{2} Q_j/(2q_j-q_j^2)\Big]^{1/2}.$$

Комбинируя эти неравенства и оценку (3.6), получаем

$$\|x-u\|_2-\|z-u\|_2 \ge \frac{Q_1+Q_2}{2\sqrt{n}\Big[\sum_{j=1}^{2} Q_j/(2q_j-q_j^2)\Big]^{1/2}}. \qquad (3.9)$$

Оценивая знаменатель правой части соотношения (3.9), в качестве первого шага перепишем (используя определение величин q_1, q_2) последние неравенства в (3.8) в следующей форме

$$q_j^2\sum_{i\in S_j}(x_i-u_i)^2 \ge e^2(x,S)/|S_j|,\ j=1,2.$$

Отсюда, принимая во внимание определение величин Q_1, Q_2, в силу неравенств $2q_j-q_j^2\ge q_j$, $j=1,2$, получаем

$$2q_j-q_j^2 \ge e^2(x,S)/(|S_j|Q_j),\ j=1,2.$$

Поэтому оценку знаменателя правой части неравенства (3.9) можно продолжить следующим образом

$$2\sqrt{n}\Big[\sum_{j=1}^{2} Q_j/(2q_j-q_j^2)\Big]^{1/2} \le 2\sqrt{n}\Big(\sum_{j=1}^{2}|S_j|Q_j^2\Big)^{1/2}/e(x,S) \le$$

$$2n(Q_1^2+Q_2^2)^{1/2}/e(x,S) \leq 2n(Q_1+Q_2)/e(x,S).$$

Наконец, используя соотношения (3.5) и (3.9), имеем: $u_v(x) - u_v(z) \geq 2e(x,S)$. Отсюда, применяя оценку $\|x-z\|_2 \leq \sqrt{2}e(x,S)$, данную соотношениями (3.4), получаем требуемое неравенство $u_v(x) - u_v(z) > \|x-z\|_2$. □

На основании доказанного предложения и следствия 2.1 получаем следующую теорему об 1-достижимости ядер сбалансированных трансферабельных кооперативных игр.

Теорема 3.1. *Пусть v – произвольная сбалансированная TU-кооперативная игра. Тогда для каждого $x \in I(v) \setminus C(\alpha_v)$ существует сходящаяся последовательность дележей $x_0, x_1, \ldots,$ такая, что $x_0 = x$, $\lim\ x_r \in C(\alpha_v)$ и $x_{r-1}\ \alpha_v\ x_r$ для всех $r \geq 1$.*

Доказательство. Непосредственно из определения отношения доминирования α_v вытекает, что достаточно малые изменения $\tilde{x}$ любого дележа x, доминируемого каким-либо дележом y, остаются доминируемыми этим же дележом y. Действительно, пусть выполняются условия доминирования: $x_i < y_i$ для всех i из некоторой коалиции S, и при этом $\sum\limits_{i \in S} y_i \leq v(S)$. Выбирая в качестве окрестности элемента x множество $U = \{\tilde{x} \in I(v) \Big| \|\tilde{x} - x\|_\infty < \delta\}$, где $\|z\|_\infty = \max\ \{|z_i| \Big| i \in N\}$ - стандартная max-норма, а $\delta = \min\ \{|x_i - y_i| \Big| i \in S\}$, нетрудно убедиться, что $\tilde{x}_i < y_i$ для всех $i \in S$ и $\tilde{x} \in U$. Последние неравенства (с учетом условия $\sum\limits_{i \in S} y_i \leq v(S)$) и означают, что все дележи из окрестности U элемента x доминируются дележом y. Отсюда, в силу произвольности выбора x и y, получаем: все множества $\alpha_v^{-1}(y)$, $y \in I(v)$, открыты. Значит, отношение доминирования α_v полуоткрыто снизу.Отсюда, на основании предложения 3.1 и следствия 2.1 и получается искомый результат: в условиях теоремы 3.1 ядро $C(\alpha_v)$ является 1-достижимым. □

В заключение этого раздела приведем пример, показывающий, что выбор евклидовой нормы для построения функции Ляпунова в предложении 2.1 не является случайным. Именно, существуют нормы, не обеспечивающие выполнения даже минимального требования убывания вдоль монотонных траекторий. Как показывает рассматриваемая далее игра 4-х лиц, к таким «неподходящим» нормам относится и стандартная max-норма $\|x\|_\infty = \max\{|x|_i \mid i \in N\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$.

Пример 3.1. Упомянутая игра определяется формулой

$$v(S) = \begin{cases} 1 & , \quad S = \{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}; \\ 1/2 & , \quad S = \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}; \\ 0 & , \quad |S| \le 2 \text{ и } S \neq \{2,4\}, \{3,4\}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что ядро $C(\alpha_v)$ игры v состоит из единственного элемента $c = (0, 1/2, 1/2, 0) : C(\alpha_v) = \{c\}$.

Далее, ясно, что дележ $\bar{x} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ может доминироваться только дележами вида

$$z = (1/4 + \delta_1, 1/4 + \delta_2, 1/4 + \delta_3, 1/4 - \delta) \tag{3.10}$$

посредством коалиции $\{1,2,3\}$. Выше мы берем $\delta = \sum\limits_{i=1}^{3} \delta_i$, и предполагаем, что $\delta \le 1/4$ и $\delta_i > 0$ для каждого $i = 1,2,3$. Согласно формуле (3.10) получаем:

$$\rho_\infty(z, C(\alpha_v)) = \|z - c\|_\infty = 1/4 + \delta_1$$

для всех z, доминирующих дележ $\bar{x}$. С другой стороны, справедливо равенство

$$\rho_\infty(\bar{x}, C(\alpha_v)) = \|\bar{x} - c\|_\infty = 1/4.$$

Суммируя вышесказанное, имеем: при использовании нормы $\|\cdot\|_\infty$ переход к любому из дележей, доминирующих $\bar{x}$, приводит к удалению от ядра $C(\alpha_v)$, что исключает применение этой нормы для построения функции Ляпунова для рассматриваемого отношения доминирования α_v.

Отметим еще, что для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ можно взять $\delta_i = 1/12$, $i = 1,2,3$, дающие для дележа $\tilde{z} = (1/3, 1/3, 1/3, 0) \in \alpha_v(\bar{x})$ следующие соотношения

$$\rho_2(\tilde{z}, C(\alpha_v)) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} < \rho_2(\bar{x}, C(\alpha_v)) = 1/2.$$

4. Доказательство основного результата

Ниже приводится формулировка и доказательство основного результата работы – теоремы о k-достижимости ядра сбалансированной трансферабельной кооперативной игры. Используемая аргументация в значительной мере опирается на установленную ранее теорему об 1-достижимости ядра [6]. Все подробности случая $k = 1$ (включая доказательство теоремы о достижимости ядер и изложение используемых фактов динамической теории кооперативных игр) содержатся в двух предыдущих разделах. Как уже отмечалось, основной мотив для рассмотрения случая $k > 1$ – попытка повысить качество процесса последовательного улучшения доминируемых дележей, страдающее от нетранзитивности классического отношения доминирования (когда при соотношении $x_{r-1}\ \alpha_v\ x_r\ \alpha_v\ x_{r+1}$ дележ x_{r+1} не доминирует x_{r-1}; более того, может оказаться, что дележ x_{r-1} доминирует x_{r+1}). Построение k-монотонных траекторий при $k > 1$ позволяет предлагать на каждом шаге последовательного доминирования такие дележи, которые улучшают не один, а сразу несколько непосредственно предшествующих дележей. Представляется, что указанное обстоятельство обеспечивает в некоторых социально-экономических и политологических приложениях повышенную стабильность процессов последовательного улучшения,

Теорема 4.1. *Пусть v – произвольная трансферабельная кооперативная игра n лиц с непустым ядром $C(\alpha_v)$. Тогда для любого натурального числа k и для любого дележа $x \notin C(\alpha_v)$ существует сходящаяся последовательность $\{x_r\}_0^\infty \subseteq I(v)$ такая, что $x_0 = x$, предел $\lim\limits_{r\to\infty} x_r$ принадлежит ядру $C(\alpha_v)$, и при этом $x_{r-m}\ \alpha_v\ x_r$ для всех натуральных $m \in [1, k]$ и $r \geq m$.*

Доказательство. Поскольку при $k = 1$ доказываемое утверждение в точности совпадает с теоремой о достижимости ядра (теорема 3.1 из предыдущего раздела), в дальнейшем рассматривается случай $k > 1$. Итак, пусть v – произвольная трансферабельная кооперативная игра с непустым ядром $C(\alpha_v)$, k – какое-либо натуральное число, большее единицы, а x – некоторый доминируемый дележ игры v. В силу упоминавшейся теоремы о достижимости ядра существует α_v-монотонная, сходящаяся последовательность дележей

$\{x_r\}_{r-0}^{\infty}$ игры v такая, что $x_0 = x$ и ее предел x_* принадлежит ядру: $x_* = \lim\limits_{r\to\infty} x_r \in C(\alpha_v)$. Для каждого $r \geq 1$ обозначим через S_r коалицию, по которой дележ $x_r = (x_{r,1}, \ldots, x_{r,n})$ доминирует дележ $x_{r-1} = (x_{r-1,1}, \ldots, x_{r-1,n})$:

$$x_{r-1,i} < x_{r,i},\ i \in S_r; \quad x_r(S_r) \leq v(S_r), \quad r = 1, 2, \ldots, \qquad (4.1).$$

В дальнейшем, ввиду эквивалентности всех норм в конечномерном пространстве, будем, не уменьшая общности, считать, что на $I(v)$ задана max-метрика $\rho_\infty(x,y) = \|x - y\|_\infty = \max\,\{|x_i - y_i| \big| i \in N\}$ (соответственно, все рассматриваемые ниже расстояния и окрестности элементов из $I(v)$ берутся в max-метрике). С помощью max-метрики введем важные для модификации последовательности $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ окрестности U_r элементов x_r. Именно, введем величины $\varepsilon_r = \min\,\{x_{r,i} - x_{r-1,i} \big| i \in S_r\}$ и положим $\delta_r = \min\,\{\varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}\}$, $r \geq 1$ (здесь $x_{0,i}$ - компоненты дележа $x_0 = x$). Далее, обозначим через U_r окрестности радиуса δ_r дележей x_r :

$$U_r = \{y \in I(v) \big| \rho_\infty(x_r, y) < \delta_r\}, \quad r = 1, 2, \ldots. \qquad (4.2)$$

Зафиксируем теперь для каждого $r \geq 1$ «связку» дележей $\{x_r^m\}_{m=1}^{k-1}$ из окрестности U_r, удовлетворяющих условию α_v-монотонности относительно коалиции S_r :

$$x_{r,i}^1 \ < \ x_{r,i}^2 \ < \ldots \ < \ x_{r,i}^{k-1} \ < x_{\ r,i}, \quad i \in S_r, \qquad (4.3)$$

где $x_{r,i}^m$ – i-ая компонента вектора $x_r^m = (x_{r,1}^m, \ldots, x_{r,n}^m)$. Другими словами, условие монотонности означает (в силу неравенства $x_r(S_r) \leq v(S_r)$, вытекающего из того, что x_{r-1} доминируется дележом x_r по коалицииS_r), что в связке $\{x_r^m\}_{m=1}^{k-1}$ (относящейся к дележу x_r) каждый элемент x_r^m доминирует предыдущий по коалиции S_r, и при этом последний элемент доминируется дележом x_r. Отметим сразу же, что указанные соотношения

$$x_r^1\ \alpha_v\ x_r^2\ \alpha_v\ \ldots\ \alpha_v\ x_r^{k-1}\ \alpha_v\ x_r,$$

характеризуются определенной транзитивностью: каждый элемент последовательности доминирует все предшествующие ему дележи. В частности, дележ x_r доминирует (наряду с x_{r-1}) каждый из дележей связки $\{x_r^m\}_{m=1}^{k-1}$.

Переходя к построению последовательности $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$, стартующей из зафиксированного выше дележе $x \notin C(\alpha_v)$ и удовлетворяющей всем требованиям k-достижимости, отметим для полноты аргументации, что существование вышеупомянутых связок $\{x_r^m\}_{m=1}^{k-1}$ следует непосредственно из определения доминирования, неравенства $x(S_r) \leq v(S_r)$ и очевидных соотношений $x_{r,i} > 0,\ i \in S_r$ (вытекающих при $r \geq 1$ из условия доминирования дележа x_{r-1} дележом x_r по коалиции S_r и из 0-нормализованности игры v). Искомая последовательность $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$ строится из фигурировавших ранее элементов x_r и x_r^m согласно формуле

$$y_s = \begin{cases} x_0 = x & , \quad \text{при } s = 0; \\ x_r & , \quad \text{при } s = kr > 0; \\ x_{r+1}^m & , \quad \text{при } s = kr + m.\ r \geq 0 \text{ и } m \in [1, k-1]. \end{cases}$$

Сначала убедимся, что предел последовательности $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$ существует и равен x_*. Итак, зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует номер s_0 такой, что $\rho_\infty(y_s, x_*) < \varepsilon$ для всех $s > s_0$. С этой целью отметим, что в силу сходимости последовательности $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ к дележу x_*, существует номер r_0 такой, что $\rho_\infty(x_r, x_*) < \varepsilon/2$ для всех $r \geq r_0$. Кроме того, по этой же причине выполняется соотношение $\delta_r \to 0$. Действительно, непосредственно из определения величин δ_r вытекают неравенства $\delta_r \leq \|x_r - x_{r-1}\|_\infty,\ r \geq 1$. Но в силу вышеупомянутой сходимости $x_r \to x_*$ имеем: $\lim\limits_{r\to\infty} \|x_r - x_{r-1}\|_\infty = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Выберем r_1 так, чтобы для всех $r \geq r_1$ выполнялись неравенства $\delta_r < \varepsilon/2$ и положим $s_0 = k\bar{r}$, где $\bar{r} = \max\ \{r_0, r_1\} + 1$. Оценим норму разности $\|y_s - x_*\|_\infty$ для $s > s_0$ отдельно для двух случаев: 1) число s делится на k и 2) s не равно нулю по модулю k. В первом случае ввиду $s = kr(s) > k\bar{r}$ имеем: $r(s) > r_0$. Отсюда, в силу равенства $y_{kr(s)} = x_{r(s)}$, вытекающего из построения элементов y_s и из выбора номера r_0, имеем $\|y_s - x_*\|_\infty = \|x_{r(s)} - x_*\|_\infty < \varepsilon/2$.

Что касается второго случая (при $s = kr(s) + m(s) > s_0,\ m(s) \in [1, k-1]$), то здесь формула для y_s имеет вид $y_s = x_{r(s)+1}^{m(s)}$. В силу принадлежности дележа $x_{r(s)+1}^{m(s)}$ окрестности $U_{r(s)+1}$ элемента $x_{r(s)+1}$, получаем (ввиду (4.2) и очевидного неравенства $r(s) + 1 > r_1$):

$$\|y_s - x_*\|_\infty \leq \|x_{r(s)+1}^{m(s)} - x_{r(s)+1}\|_\infty + \|x_{r(s)+1} - x_*\|_\infty < \delta_{r(s)+1} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Итак, в обоих случаях получена искомая оценка, что и завершает доказательство сходимости последовательности $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$ к недоминируемому дележу игры v.

На последнем этапе доказательства теоремы остается убедиться в том, что каждый элемент y_s последовательности $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$ при $s > 0$ доминирует не только непосредственно предшествующий y_{s-1}, но (при $s > 1$) и остальные «примыкающие слева» к y_s дележи $y_{s'}$ в количестве $\min\{k-1, s-1\}$ элементов. Понятно, что для начального отрезка $\{y_s\}_{s=0}^{k}$ рассматриваемой последовательности требуемые соотношения ($y_l\ \alpha_v\ y_m$ при $l < m,\ l, m \in [0, k]$) выполняются в силу соотношений (4.3), условия $x_0\ \alpha_v\ x_1$ и принадлежности всех дележей $y_1, \ldots, y_{r-1}$ окрестности радиуса $\delta_1 < \varepsilon_1$ элемента x_1. Рассмотрим общий случай $s > k$ и, как и ранее, проанализируем отдельно две возможные ситуации:1) число s делится на k и 2) s не делится на k. В первой ситуации, по определению векторов y_s имеем: $y_s = x_r$ для некоторого $r \geq 1$. Но в этом случае по выбору последовательности $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ получаем $y_{s-k} = x_{r-1}\ \alpha_v\ y_s = x_r$ и, кроме того, из формулы (4.3) вытекают соотношения $y_{k(r-1)+m} = x_r^m\ \alpha_v\ y_s = x_r$ для всех натуральных $m \in [1, k-1]$ Но приведенные соотношения и означают, что каждый из k предшествующих дележей доминируется дележом y_s : для любого натурального $m \in [1, k]$ справедливо соотношение $y_{s-m}\ \alpha_v\ y_s$. Во второй ситуации имеем: $s = kr + m$ для некоторых $r \geq 1$ и $m \in [1, k-1]$. Тогда, согласно определению векторов y_s справедливо равенство $y_s = x_{r+1}^m$ По определению элементов x_{r+1}^m (формула (4.3)) дележ $y_s = x_{r+1}^m$ при $m > 1$ доминирует все дележи $x_{r+1}^1, \ldots, x_{r+1}^{m-1}$ по коалиции S_{r+1}. Далее, в силу включений $x_{r+1}^1 \in U_{r+1}$ и $x_r, x_r^1, \ldots, x_r^{k-1} \in U_r$ и выбора радиусов δ_r, δ_{r+1} окрестностей U_r, U_{r+1} получаем: дележ x_{r+1}^1 доминирует все дележи $x_r, x_r^1, \ldots, x_r^{k-1}$ по коалиции S_{r+1}. Суммируя вышесказанное и учитывая транзитивность доминирования по одной и той же коалиции S_{r+1}, имеем: дележ y_s доминирует не менее $k + m - 1$ непосредственно предшествующих дележей $y_{s-k-m+1}$, $y_{s-k-m+2}, \ldots, y_{s-1}$. Нетрудно проверить, что при $m = 1$ работает аналогичная (только несколько упрощенная) аргументация, показывающая, что в этом случае число непосредственно предшествующих дележей, доминируемых элементом y_s, не меньше k.

Итак, все условия k-достижимости для последовательности $\{y_s\}_{s=0}^{\infty}$ выполняются, что и доказывает теорему 4.1. □

5. Контрпример для нетрансферабельной игры

Для подтверждения того, что условие трансферабельности является существенным для теоремы о k-достижимости ядра, ниже воспроизводится пример из работы [6], демонстрирующий нетрансферабельную игру с «черной дырой»: непустым замкнутым множеством доминируемых дележей, содержащим все начинающиеся в нем монотонные.траектории (когда каждый дележ, кроме начального, доминирует предшествующий). Пример показывает, что даже 1-достижимость не гарантируется для нетрансферабельных игр.

Ниже через $G(S)$ обозначаются множества дележей, достижимых усилиями коалиции S нетрансферабельной игры G, через α_G – стандартное отношение доминирования на $G(N)$, определяемое формулой (далее y_S – сужение вектора $y \in \mathbf{R^N}$ на $S \subseteq N$):

$$x \ \alpha_G \ y \Leftrightarrow \exists S \subseteq N[\forall i \in S(x_i < y_i)\&(y_S \in G(S))].$$

Пример 5.1. Рассмотрим игру 3-х лиц, определяемую на подмножествах множества $N = \{1,2,3\}$ посредством характеристической функции $G: \ S \mapsto G(S) \subseteq \mathbb{R}^S, \ S \subseteq N$, согласно формулам

$$\begin{aligned}
G(N) &= \{x \in \mathbb{R}_+^N | \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}, \\
G(\{1,2\}) &= \{x \in \mathbb{R}_+^{\{1,2\}} | x_1 + x_2 \le 2/3\}, \\
G(\{1,3\}) &= \{x \in \mathbb{R}_+^{\{1,3\}} | x_1 + x_3 \le 2/3, \ x_1 \le 1/3\}, \\
G(\{2,3\}) &= \{x \in \mathbb{R}_+^{\{2,3\}} | x_2 + x_3 \le 5/6, \ x_2 \le 1/2\}, \\
G(\{i\}) &= \{0\}, \ i \in N.
\end{aligned}$$

Как обычно, мы используем стандартное отношение доминирования α_G на $G(N)$, определяемое в случае нетрансферабельной игры формулой

$$x \ \alpha_G \ y \Leftrightarrow \exists S \subseteq N[\forall i \in S(x_i < y_i)\&(y_S \in G(S))],$$

где $y_S \in \mathbb{R}^S$ обозначает сужение вектора $y = (y_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ на множество $S: \ (y_S)_i = y_i, \ i \in S$. Нетрудно убедиться, что ядро $C(\alpha_G)$ игры

G (состоящее из совокупности α_G-максимальных элементов множества $G(N)$, имеет вид

$$C(\alpha_G) = \{x \in G(N) | x_1 \geq 1/3,\ x_2 \geq 1/2\}.$$

Упоминавшаяся выше «черная дыра» определяется следующим образом:

$$B = \{x \in G(N) | x_1 + x_2 \leq 2/3,\ x_1 + x_3 \leq 2/3,\ x_2 + x_3 \leq 5/6\}.$$

Именно, ниже устанавливается, что множество B содержит все начинающиеся в нем α_G-монотонные траектории, а также их предельные точки, и не пересекается с ядром $C(\alpha_G)$.

Начнем с того, что соотношение $B \cap C(G) = \emptyset$ вытекает непосредственно из несовместности неравенств $x_1 + x_2 \leq 2/3$, $x_1 \geq 1/3$, $x_2 \geq 1/2$. Поэтому, ввиду непустоты и замкнутости множества B, единственное, что остается проверить для завершения доказательства недостижимости ядра $C(\alpha_G)$ из точек $x \in B$ – справедливость импликации

$$(x\ \alpha_G\ y) \& (x \in B) \Rightarrow y \in B.$$

Зафиксируем произвольный дележ $x \in B$ и какой-либо $y \in G(N)$ такой, что $x\ \alpha_G\ y$. Для доказательства включения $y \in B$ рассмотрим три возможных случая, отвечающих двух-элементным доминирующим коалициям $S = \{i, j\} : (y_i, y_j) \in G(\{i, j\}), x_i < y_i, x_j < y_j$.

1. $S = \{1, 2\}$. Поскольку в этом случае $y_1 + y_2 \leq 2/3$, остается доказать, что выполняются неравенства $y_1 + y_3 \leq 2/3,\ y_2 + y_3 \leq 5/6$. Допуская, что $y_1 + y_3 > 2/3$, получаем $y_2 < 1/3$, что противоречит соотношениям $y_2 > x_2 \geq 1/3$. Предполагая, что $y_2 + y_3 > 5/6$, имеем $y_1 < 1/6$, что противоречит неравенствам $y_1 > x_1 \geq 1/6$ (поскольку должно выполняться неравенство $x_2 + x_3 \leq 5/6$).

2. $S = \{1, 3\}$. Согласно определению множества $G(\{1, 3\})$ справедливы неравенства $y_1 + y_3 \leq 2/3$, $y_1 \leq 1/3$. Поскольку включение $x \in B$ влечет справедливость соотношений $x_1 \geq 1/6,\ x_3 \geq 1/3$, из условий $y_1 > x_1 \geq 1/6$ получаем неравенство $y_2 + y_3 < 5/6$. Аналогично, в силу соотношений $y_3 > x_3 \geq 1/3$ имеем $y_1 + y_2 < 2/3$.

3. $S = \{2, 3\}$. По определению множества $G(\{2, 3\})$ получаем соотношения $y_2 + y_3 \leq 5/6$, $y_2 \leq 1/2$. Поскольку включение $x \in B$

влечет справедливость неравенств $x_2 \geq 1/3$, $x_3 \geq 1/3$, из соотношений $y_2 > x_2 \geq 1/3$ получаем неравенство $y_1 + y_3 < 2/3$. Далее, учитывая соотношения $y_3 > x_3 \geq 1/3$, имеем: $y_1 + y_2 < 2/3$.

Итак, во всех возможных случаях из соотношений $x\ \alpha_G\ y$ и $x \in B$ вытекает включение $y \in B$. Следовательно, любая α_G-монотонная траектория, стартующая из множества B, остается в нем вместе со всеми своими предельными точками (ввиду замкнутости B). Отсюда, в силу соотношения $B \cap C(G) = \emptyset$, получаем требуемое: ядро $C(\alpha_G)$ не достижимо из точек множества B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: «Наука», 1970.

2. Оуэн Г. *Теория игр.* М.: «Мир», 1971.

3. Розенмюллер И. *Кооперативные игры и рынки.* М.: «Мир», 1974.

4. Mashler M., Peleg B. *Stable sets and stable points of set-valued dynamic systems with applications to game theory* // SIAM J. of Control and Optimization. 1976. V.14. P. 985–995.

5. Vasil'ev V.A. *Generalized von Neumann-Morgenstern solutions and accessibility of cores* // Soviet Math. Dokl. 1987. V.36. P.374–378.

6. Vasil'ev V.A. *Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games.* In: Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory (eds. T. Driessen, G. van der Laan, V.Vasil'ev, and E.Yanovskaya), Berlin-New York: Springer-Verlag, 2006. P. 91–150.

7. Wu L. S.-Y. *A dynamic theory for the class of games with nonempty cores* // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 32. N.2. P. 328–338.

ON K-ACCESSIBILITY OF THE CORE OF TU-COOPERATIVE GAME

Valery A. Vasil'ev, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc., prof. (vasilev@math.nsc.ru).

Abstract: In the paper, a strengthening of the core-accessibility theorem by the author is proposed. The results obtained demonstrate that for any $k \geq 1$, and for any imputation x outside of the nonempty core, a k-monotonic sequential improvement trajectory $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$ with $x_0 = x$ exists, which converges to some element of the core. Here, k-monotonicity means that for any $r > 0$, an imputation x_r dominates any preceding imputation x_{r-m} with $r \geq m$ and $m \in [1, k]$. Note that the core-accessibility theorem, mentioned above, was established for the case $k = 1$.
To show that TU-property is essential to provide k-accessibility of the core, we propose an example of NTU-cooperative game G with a "black hole" being a closed subset $B \subseteq G(N)$ that doesn't intersect the core $C(\alpha_G)$ and contains all the sequential improvement trajectories originating at any point $x \in B$.

Keywords: domination, core, dynamical system, generalized Lyapunov function, k-accessibility.