Математическая Теория Игр и её Приложения, т.8, в.2, с. 28–57

УДК 519.86
ББК 22.1

СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СОГЛАСОВАНИЯ ОБЩЕСТВЕННЫХ И ЧАСТНЫХ ИНТЕРЕСОВ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ

Ольга И. Горбанева
Геннадий А. Угольницкий*
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Южного федерального университета
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
e-mail: gorbaneva@mail.ru, ougoln@mail.ru

Исследуются условия системной согласованности в теоретико-игровых моделях распределения ресурсов между общественной и частной деятельностью. Описываются экономические и административные механизмы управления системной согласованностью.

Ключевые слова: иерархические игры, механизмы управления, распределение ресурсов, системная согласованность.

1. Введение

Ключевая проблема менеджмента состоит в согласовании условий устойчивого развития организации в целом (олицетворяемых руководством организации) с интересами сотрудников, без усилий которых обеспечить устойчивое развитие нельзя. Иными словами, речь

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект №15-01-00432.

идет о проблеме согласования общественных и частных интересов, которая существует на уровне отдельных организаций различного типа и всего общества.

Математический анализ указанной проблемы проводится в теории контрактов [8], дизайне механизмов [1], информационной теории иерархических систем [6], теории активных систем [2], теории управления организационными системами [9,10], теории управления устойчивым развитием [11]. Важной проблемой принятия решений в системах с несколькими агентами выступает сравнение значений функции общественного благосостояния, получаемых при независимом эгоистичном принятии решений всеми агентами (ведущем к равновесию Нэша), с одной стороны, и при оптимизации этой функции всеми игроками (Парето-оптимальном решении), с другой стороны (проблема неэффективности равновесий [1]). Второй случай возможен либо при добровольной кооперации игроков, либо при введении внешнего управления. Общепринятым количественным показателем неэффективности равновесий служит введенная Х. Пападимитриу «цена анархии» [1], которая представляет собой отношение наихудшего значения функции общественного благосостояния на множестве равновесий Нэша к ее оптимальному значению. Когда цена анархии сильно отличается от единицы, возникает потребность в координации действий агентов для увеличения общественного благосостояния (задача мета-игрового синтеза).

В основополагающей статье Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя [3] были изучены модели, в которых функции выигрыша всех агентов состоят из двух частей – общественной (одинаковой для всех агентов) и частной составляющей. Показано, что если эта функция имеет вид свертки по минимуму, то при естественных предположениях в игре существует Парето-оптимальное равновесие Нэша (т.е. цена анархии равна единице). Исследование игр с учетом частных и общественных интересов продолжено, например, в работах [7,12].

Работы авторов [4,5] развивают указанные направления исследований. В них анализируется цена анархии в моделях согласования общественных и частных интересов (СОЧИ-моделях) при распределении ресурсов, основанных на идее Гермейера-Вателя, но использующих вместо минимума линейную свертку функций, в которых каждый игрок получает некоторую долю общественного дохода. Также вводится понятие системной согласованности, которая означает, что индивидуально оптимальные управления агентов глобально оптимальны с точки зрения общественного благосостояния. Для обеспечения системной согласованности проектируются административные и экономические механизмы управления.

По сравнению с указанными работами, в настоящей статье более детально исследуется системная согласованность административного и экономического механизмов управления. Выявлены условия системной согласованности при применении экономического механизма без обратной связи: доказано, что системной согласованности можно добиться только на концах отрезка (когда каждый агент выделяет все ресурсы либо на общие, либо на частные цели). В случае экономического механизма с обратной связью применялись два подхода: эмпирический и теоретический. Выявлены условия системной согласованности при эмпирическом подходе в общем случае. Также доказано, что при применении теоретического подхода в случае применения линейных и степенных функций с показателем, меньшим единицы, экономический механизм с обратной связью системно согласован. Рассмотрен административный механизм без обратной связи как с наличием затрат на контроль ресурсов, так и без таковых. Получены условия системной согласованности административного механизма без обратной связи.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 описываются статические СОЧИ-модели без управления верхнего уровня и приводятся результаты об их системной согласованности. В разделе 3 вводятся механизмы управления в СОЧИ-моделях, направленные на повышение системной координации, дается определение их согласованности. В разделе 4 детально анализируются экономические механизмы управления при наличии и отсутствии обратной связи. В разделе 5 изучаются административные механизмы управления. Раздел 6 содержит заключительные замечания.

2. Статические СОЧИ-модели

Рассмотрим статическую теоретико-игровую модель в нормальной форме вида

$$g_i(u_1,\dots,u_n)=p_i(r_i-u_i)+s_i(u_1,\dots,u_n)c(u_1,\dots,u_n)\to\max \quad (2.1)$$

$$0\le u_i\le r_i, r_i\ge 0, s_i(u_1,\dots,u_n)\ge 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}s_j(u_1,\dots,u_n)=\begin{cases}1, & \exists i: s_i(u_1,\dots,u_n)>0,\\ 0, & \forall i: s_i(u_1,\dots,u_n)=0,\end{cases} \quad (2.2)$$

$$i=1,\dots,n.$$

Здесь $N=\{1,\dots,n\}$ – конечное множество игроков (активных агентов);
$U_i=[0,r_i]$ – множество допустимых действий (стратегий) i-го игрока;
r_i – ресурс, которым располагает i-й игрок;
$g_i(u_1,\dots,u_n)$ – функция выигрыша i-го игрока; $g_i: U\to R$,
$U==U_1\times\ldots\times U_n$;
$p_i(r_i-u_i)$ – функция частных интересов (частная составляющая выигрыша) i-го игрока, аргумент которой – количество ресурсов (r_i-u_i), оставленных на частные цели;
$c(u_1,\dots,u_n)$ – функция общественного дохода;
$s_i(u_1,\dots,u_n)$ – доля общественного дохода, выделяемая игроку i;
$s_i(u_1,\dots,u_n)c(u_1,\dots,u_n)$ – общественная составляющая выигрыша i-го игрока.

Таким образом, в СОЧИ-модели каждый игрок делит свой ресурс r_i между общественными (доля u_i) и частными (доля r_i-u_i) интересами. Предполагается, что
– функция c монотонно возрастает по всем u_i, $c(0,\dots,0)=0$;
– функции p_i монотонно возрастают по (r_i-u_i) и монотонно убывают по u_i, $p_i(0)=0$, (при $u_i=r_i$);
– если $u_i>0$, то $s_i>0$, $i=1,\dots,n$. Таким образом, вариант $\sum\limits_{j=1}^{n}s_j=0$ отвечает случаю, когда $\forall i: u_i=0$; тогда общественный доход не создается и делить нечего.

Введем утилитарную функцию общественного благосостояния

$$g_0(u_1,\dots,u_n)=\sum_{j=1}^{n}g_j(u_1,\dots,u_n)=\sum_{j=1}^{n}p_j(r_j-u_j)+c(u_1,\dots,u_n). \tag{2.3}$$

Пусть $NE=\{u^{NE}_{(1)},\dots,u^{NE}_{(k)}\}$ – множество равновесий Нэша в игре (2.1)–(2.2), $u_{(j)}=(u_{(j)1},\dots,u_{(j)n})$ – исход игры, $g^{NE}_{\min}=\min\{g_0(u^{NE}_{(1)}),\dots,g_0(u^{NE}_{(k)})\}$, $g_{\max}=\max\limits_{u\in U}g_0(u)=g_0(u^{\max})$. Тогда цена анархии в модели (2.1)–(2.2) есть

$$PA=\frac{g^{NE}_{\min}}{g_{\max}}. \tag{2.4}$$

Очевидно, что $PA\le 1$. Если PA близка к единице, то эффективность равновесий высока и потребность в координации в модели (2.1)–(2.2) низка или вовсе отсутствует (при $PA=1$); чем меньше PA, тем больше потребность в координации.

Определение 2.1. *Модель (2.1)–(2.2) системно согласована, если* $PA=1$.

Теорема 2.1. . *При $n\ge 2$ и выполнении условий 1) $p_i(0)=c(0)=0$; 2) $\frac{\partial p_i}{\partial u_i}>0$, $\frac{\partial c}{\partial u_i}>0$; 3) $\frac{\partial^2 p_i}{\partial u_i^2}<0$, $\frac{\partial^2 c}{\partial u_i^2}<0$, $i=1,\dots,n$, системная согласованность может иметь место только при определенном разбиении множества агентов на два класса: индивидуалистов и коллективистов ($N=C\cup I, C\cap I=\emptyset$), где $C=\{i\in N: u_i=r_i\}$, $I=\{i\in N: u_i=0\}$.*

Доказательство. Обозначим

$$u_1=(s_ic'(\sum_{i=1}^{n}u_i)-p_i'(r_i-u_i))^{-1}(0), u_2=(c'(\sum_{i=1}^{n}u_i)-p_i'(r_i-u_i))^{-1}(0).$$

Тогда

$$u_i^{NE}=\begin{cases}0, & u_1<0,\\ u_1, & 0<u_1<r_i,\\ r_i, & u_1>r_i.\end{cases}$$

$$u_i^{\max}=\begin{cases}0, & u_2<0,\\ u_2, & 0<u_2<r_i,\\ r_i, & u_2>r_i.\end{cases}$$

Как видно, значения стратегий совпадают на концах отрезка $[0, r_i]$, т.е. только тогда, когда агент является либо индивидуалистом, либо коллективистом. Докажем, что внутренние стратегии не совпадают. Так как $s_i < 1$, то $s_i c'(\sum_{i=1}^{n} u_i) < c'(\sum_{i=1}^{n} u_i)$, а значит, $s_i c'(\sum_{i=1}^{n} u_i) - p_i'(r_i - u_i) < c'(\sum_{i=1}^{n} u_i) - p_i'(r_i - u_i)$, а в силу убывания каждой из этих функций, их обратные функции тоже убывают, откуда ясно, что образ точки 0 в функции $c'(\sum_{i=1}^{n} u_i) - p_i'(r_i - u_i)$ больше образа точки 0 в функции $s_i c'(\sum_{i=1}^{n} u_i) - p_i'(r_i - u_i)$. □

Рассмотрим случай, при котором обе функции: общего дохода и частного дохода – степенные с положительным показателем, меньшим единицы (c и p_i теперь константы).

$$g_i(u_1, \ldots, u_n) = p_i(r_i - u_i)^\alpha + s_i c(\sum_{i \in N} u_i)^\alpha \to \max$$

$$g_0(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i \in N} p_i(r_i - u_i)^\alpha + c(\sum_{i \in N} u_i)^\alpha \to \max$$

$$s_i \geq 0, \sum_{j=1}^{n} s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases}, i = 1, \ldots, n,$$

$$0 \leq u_i \leq r_i, 0 < \alpha < 1.$$

Найдем оптимальные значения u_i. Условия первого порядка: $\frac{p_i}{s_i(r_i - u_i)^{1-\alpha}} = = \frac{c}{(\sum_{i \in N} u_i)^{1-\alpha}}$ откуда $u_j = r_j - \frac{\sqrt[1-\alpha]{p_j} \sum_{i \in N} r_i}{\sqrt[1-\alpha]{s_j c} + \sum_{i \in N} \sqrt[1-\alpha]{p_i}}$.

Чтобы избежать громоздкости в формульных выражениях, введем следующие обозначения: $A_j(S) = \sqrt[1-\alpha]{p_j} \sum_{i \in S} r_i$, $B_j(S) = \sqrt[1-\alpha]{s_j c} + \sum_{i \in S} \sqrt[1-\alpha]{p_i}$, $B(S) = \sqrt[1-\alpha]{c} + \sum_{i \in S} \sqrt[1-\alpha]{p_i}$.

С учетом ограничений индивидуально оптимальная стратегия каждого агента имеет вид

$$u_j^* = \max\{r_j - \frac{A_j(N)}{B_j(N)}, 0\}.$$

Рассуждая аналогично, получим глобально оптимальные стратегии агентов

$$u_j^{\max} = \max\{r_j - \frac{A_j(N)}{B(N)}, 0\}.$$

Видно, что системная согласованность возникает только в случае, когда все агенты индивидуалисты, а это возможно, когда $\forall j \in N$ $r_j < \frac{A_j}{B}$.

Теперь рассмотрим случай, при котором функция общего дохода степенная с положительным показателем, меньшим единицы, а функция частного дохода – линейная.

$$g_i(u_1, \dots, u_n) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(\sum_{i \in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$g_0(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i \in N} p_i(r_i - u_i) + c(\sum_{i \in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$s_i \geq 0, \sum_{j=1}^{n} s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases}, i = 1, \dots, n,$$
$$0 \leq u_i \leq r_i, 0 < \alpha < 1.$$

Найдем оптимальные значения u_i^*. Условия первого порядка: $\frac{p_i}{s_i} = \frac{\alpha c}{(\sum\limits_{i \in N} u_i)^{1-\alpha}}$ откуда $\sum\limits_{i \in N} u_i^* = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}$.

С учетом ограничения оптимальная стратегия каждого агента есть

$$\sum_{i \in N} u_i^* = \min\{\sum_{i \in N} r_i, \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}\}.$$

Таким образом, каждый агент считает, что в сумме все агенты должны потратить на общие цели определенное количество ресурсов. Рассуждая аналогично, получим глобально оптимальные стратегии агентов

$$\sum_{i \in N} u_i^{\max} = \min\{\sum_{i \in N} r_i, \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}\}.$$

Здесь min – номер агента, у которого величина p_i минимальна. Видно, что системная согласованность имеет место только в случае, когда все агенты коллективисты, а это возможно, когда $\forall i \in N$ $\sum\limits_{j \in N} r_j < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}$.

Алгоритм достижения системной согласованности имеет следующий вид:

1. Перенумеруем игроков по возрастанию величин p_i, то есть под номером один будет игрок с номером min.

2. Если у игрока 1 хватает нужного с точки зрения глобального оптимума количества ресурсов (выполняется условие $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} < r_1$), то $u_1 = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}}$, $u_{i>1} = 0$. Конец алгоритма.

   Если же ресурсов у первого игрока не хватает, т.е. $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} > r_1$, то $u_1 = r_1$, а остальные ресурсы в количестве $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - r_1$ выделят на общие цели другие агенты.

3. Если у агента 2 хватает ресурсов, то есть $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - r_1 < r_2$, то $u_2 = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - r_1$, $u_{i>2} = 0$, конец алгоритма, в противном случае $u_2 = r_2$, а остальные ресурсы в количестве $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - r_1 - r_2$ выделят на общие цели другие агенты.

4. Переходим к очередному агенту i. В случае, если у него хватает ресурсов, чтобы восполнить недостающее количество ресурсов на общие цели, то $u_i = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - \sum\limits_{j<i} r_j$, $u_{j>i} = 0$. Конец алгоритма. Если же у агента i ресурсов не хватает, то $u_i = r_i$, а остальные ресурсы в количестве $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - \sum\limits_{j<i} r_j$ выделяются другими агентами.

5. Повторяем шаг 4) до тех пор, пока либо найдется агент, у которого хватит ресурсов восполнить оставшуюся часть средств на общие цели (при этом оставшиеся агенты с большим номером все свои ресурсы выделяют на частные цели), либо пока все агенты не выделят все имеющиеся у них ресурсы на общие цели.

В итоге получим следующую процедуру: необходимо найти номер того агента m, для которого $\sum_{j<m} r_j < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} < \sum_{j\le m} r_j$. Тогда $u_{i<m} = r_i$, $u_m = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - \sum_{j<m} r_j$, $u_{i>m} = 0$. Если же такого m нет, то $\forall i \in N$ $u_i = r_i$.

3. Механизмы управления в статических СОЧИ-моделях

Условие системной согласованности само по себе выполняется редко, и для ее обеспечения целесообразно использовать механизмы управления. Будем теперь считать, что максимизация общественного благосостояния (2.3) составляет цель некоторого субъекта (Центра, ведущего, принципала, дизайнера механизмов), который для достижения этой цели имеет возможность воздействия на множества допустимых управлений и/или функции выигрыша агентов. Обозначим первую возможность $U_i = U_i(q_i)$, а вторую $g_i = g_i(p_i, u_i)$. Выделим следующие методы (механизмы) управления (табл. 1).

Таблица 1. Механизмы управления

Воздействие ведущего:	Без обратной связи – игры Штакельберга (Γ_1)	С обратной связью – игры Гермейера (Γ_2)
На множества допустимых управлений агентов (принуждение, или административное воздействие)	$q_i = const$	$q_i = q_i(u)$
На функции выигрыша агентов (убеждение, или экономическое воздействие)	$p_i = const$	$p_i = p_i(u)$

Ведущий может воздействовать на множества допустимых управлений агентов (административный механизм) или на их функции выигрыша (экономический механизм). Оба этих вида воздействия могут не использовать или использовать обратную связь по управлению. В первом случае возникает иерархическая игра типа Γ_1 (игра Штакельберга), во втором – иерархическая игра типа Γ_2. Таким образом, выделяются четыре типа механизмов управления, показанные в табл. 1. Следует сказать, что в авторских работах [11] выделен еще один механизм – убеждение, означающее добровольную кооперацию игроков; здесь этот механизм не рассматривается, поскольку переход к кооперации снимает проблему системного согласования.

Определение 3.1. *Механизм управления в модели (2.1)–(2.3) системно согласован, если в результате оптимальной реакции игроков на его применение модель оказывается системно согласованной.*

Рассмотрим проблему системной согласованности механизмов управления на примере СОЧИ-моделей вида (2.1)–(2.3). Экономические механизмы управления в модели (2.1)-(2.3) реализуются посредством выбора ведущим значений s_i. Для использования административных механизмов дополнительно предполагается, что ведущий может ограничивать допустимые управления агентов:

$$\tilde{q}_i \le u_i \le \bar{q}_i, i \in N. \tag{3.1}$$

Тогда представленные в табл. 1 механизмы управления можно конкретизировать для модели (2.1)–(2.3), (3.1) следующим образом (табл. 2).

Таблица 2. Механизмы системного согласования в СОЧИ-моделях

Воздействие ведущего:	Без обратной связи – игры Штакельберга (Γ_1)	С обратной связью – игры Гермейера (Γ_2)
На множества допустимых управлений агентов (принуждение, или административное воздействие)	$\tilde{q}_i \le u_i \le \bar{q}_i$, $\tilde{q}_i, \bar{q}_i = const$	$\tilde{q}_i(u) \le u_i \le \bar{q}_i(u)$
На функции выигрыша агентов (убеждение, или экономическое воздействие)	$s_i = const$	$s_i = s_i(u)$

4. Экономические механизмы системного согласования

4.1. Экономические механизмы системного согласования без обратной связи

Пусть сначала в модели (2.1)–(2.2) $\forall i \; s_i = const$. Используя условия первого порядка, получаем, что системная согласованность внутри области допустимых управлений возможна лишь при выполнении условия $\frac{\partial c}{\partial u_i} = 0$, $i \in N$, поэтому гораздо более вероятно выполнение требований системной согласованности на границе области допустимых управлений. Таким образом, при $\forall i \; s_i = const$, как правило, системная согласованность в моделях (2.1)–(2.2) имеет место тогда, когда все игроки являются либо чистыми индивидуалистами, либо чистыми коллективистами.

Если условие системного согласования не выполнено, то можно ставить задачу координации интересов в более слабой форме нахождения механизма экономического принуждения, максимизирующего цену анархии (2.4).

4.2. Экономические механизмы системного согласования с обратной связью

Пусть теперь в модели $s_i = s_i(u_i)$ или даже $s_i = s_i(u)$. Используя условия первого порядка, получаем, что системная согласованность внутри области допустимых управлений возможна лишь при

$$\frac{\partial s_i}{\partial u_i} c(u) = [1 - s_i(u)] \frac{\partial c(u)}{\partial u_i}, i \in N.$$

Для дальнейшего анализа можно использовать два подхода: эмпирический и теоретический. В рамках эмпирического подхода исследуются широко распространенные на практике способы распределения общего дохода. Например, рассмотрим механизм пропорционального распределения

$$s_i(u) = \begin{cases} \frac{u_i}{\sum\limits_{j \in N} u_j}, & \exists m : u_m > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 4.1. *Механизм пропорционального распределения системно согласован при линейной функции общего дохода.*

Доказательство. Условие первого порядка принимает вид

$$\sum_{j \neq i} u_j \left[\frac{\partial c\left(\sum\limits_{j \in N} u_j\right)}{\partial u_i} \sum_{j \in N} u_j - c\left(\sum_{j \in N} u_j\right) \right] = 0, i \in N.$$

Уравнение $\frac{\partial c\left(\sum\limits_{j \in N} u_j\right)}{\partial u_i} \sum\limits_{j \in N} u_j - c\left(\sum\limits_{j \in N} u_j\right) = 0$ сводится к виду $c\left(\sum\limits_{j \in N} u_j\right) = \hat{c}(u_{-i}) \sum\limits_{j \in N} u_j$. Так как функция c зависит только от суммы $\sum\limits_{j \in N} u_j$, а

$\hat{c}(u_{-i})$ от этой суммы не зависит, то $\hat{c}(u_{-i}) = const = c$, что говорит о том, что $c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right) = c\sum\limits_{j\in N} u_j$. □

Напомним, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ симметрична относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если при перестановке любых двух переменных вид функции не меняется, т.е. для любых $i, j : 1 \le i, j \le n$ выполняется соотношение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Теорема 4.2. *Механизм распределения $s_i(u)$ может быть системно согласованным, только если функция общего дохода $s_i(u)$ симметрична относительно u_{-i}.*

Доказательство. Условия первого порядка имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial p(u_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right)}{\partial u_i}, \\ \frac{\partial p(u_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial s_i(u_i)}{\partial u_i} c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right) + s_i(u)\frac{\partial c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right)}{\partial u_i}, \end{cases}$$

или $0 = \frac{\partial s_i(u_i)}{\partial u_i} c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right) + (s_i(u) - 1)\frac{\partial c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right)}{\partial u_i}$. Аналогично предыдущему утверждению, получаем

$$c\left(\sum_{j\in N} u_j\right) = \frac{\hat{c}(u_{-i})}{1 - s_i(u)}.$$

Левая часть симметрична относительно u_i, значит, и правая часть должна быть такой же. Для этого $s_i(u)$ должна быть симметричной относительно u_{-i}. Кроме того, правая часть, а значит, и $s_i(u)$, должна зависеть от $\sum\limits_{j\in N} u_j$. Заметим, что $s_i(u) = 1 - \frac{\hat{c}(u_{-i})}{c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right)}$, а учитывая условие $\sum\limits_{i\in N} s_i(u) = 1$, получим $c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right) = \frac{\sum\limits_{i\in N} \hat{c}(u_{-i})}{n-1}$. Так как левая часть от n не зависит, то в числителе справа $(n-1)$ одинаковое слагаемое, т.е. сумма n симметричных слагаемых дает $(n-1)$ одинаковых слагаемых $c\left(\sum\limits_{j\in N} u_j\right)$. Таким образом, $\hat{c}(u_{-i})$ должна быть симметричной относительно u_{-i}, и в итоге $\sum\limits_{i\in N} \hat{c}(u_{-i})$ должна зависеть от $\sum\limits_{j\in N} u_j$, т.е. $s_i(u) = 1 - \frac{(n-1)\hat{c}(u_{-i})}{\sum\limits_{i\in N}\hat{c}(u_{-i})}$. □

Замечание 4.1. Механизм равномерного распределения общественного дохода между лояльными к принципалу игроками

$$s_i(u) = \begin{cases} \frac{1}{|j: u_j = u_j^{\max}|}, & u_i = u_i^{\max}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n,$$

системно не согласован.

Доказательство. Функция $s_i(u)$ не удовлетворяет условиям предыдущего утверждения. □

Теоретический подход основан на теореме Гермейера (см. [5]). Применим этот подход к случаю, когда и функция общего дохода, и функция частного дохода степенные с показателем, меньшим единицы:

$$g_i(u_1, \ldots, u_n) = p_i(r_i - u_i)^\alpha + s_i c(\sum_{i\in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$g_0(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i\in N} p_i(r_i - u_i)^\alpha + c(\sum_{i\in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$s_i \geq 0, \sum_{j=1}^{n} s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases}, i = 1, \ldots, n,$$
$$0 \leq u_i \leq r_i, 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 4.3. *Экономический механизм с обратной связью в случае, когда функции общего и частного дохода степенные с показателем, меньшим единицы, системно согласован.*

Доказательство. Заметим, что стратегия наказания имеет вид $s_i^P = 0$, при этом оптимальная реакция агента $E_i = \{u_i = 0\}$, доход агента равен $L_i = p_i r_i^\alpha$, а доход принципала

$$K_2 = \max_{s_i} \min_{u_i \in E_i} \left[\sum_{i\in N} p_i (r_i - u_i)^\alpha + c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^\alpha \right] =$$

$$= \max_{s_i} \left[\sum_{i \in N} p_i (r_i)^\alpha \right] = \sum_{i\in N} p_i (r_i)^\alpha.$$

Найдем множество стратегий D_i, при которых доход агента больше L_i:

$$p_i (r_i - u_i)^\alpha + c \left(\sum_{i\in N} u_i \right)^\alpha > p_i r_i^\alpha.$$

Это возможно только при $s_i > \frac{p_i r_i^\alpha - p_i (r_i - u_i)^\alpha}{c \left(\sum\limits_{i\in N} u_i \right)^\alpha}$.

Найдем величину K_1:

$$K_1 = \max_{s_i \in D_i} \max_{u_i} \left[\sum_{i\in N} p_i (r_i - u_i)^\alpha + c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^\alpha \right] =$$

$$= \max_{u_i} \left[\sum_{i\in N} p_i (r_i - u_i)^\alpha + c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^\alpha \right].$$

Как показано выше, с учетом введенных величин $A_j(S)$, $B_j(S)$ и $B(S)$

$$u_j^{\max} = \max\{r_j - \frac{A_j(N)}{B(N)}, 0\}.$$

Докажем, что при этом можно подобрать $s_i > \frac{p_i r_i^\alpha - p_i (r_i - u_i)^\alpha}{c \left(\sum\limits_{i\in N} u_i \right)^\alpha}$, что гарантирует выгодность стратегии $u_j^{\max}$ для агента. Для тех агентов, у которых $u_j^{\max} = 0$, это можно обеспечить стратегией $s_j = \epsilon_j$, для остальных агентов

$$s_i > \frac{p_i r_i^\alpha - p_i \left(\frac{A_i(N)}{B(N)} \right)^\alpha}{c \left(\sum\limits_{i \in N} \left(r_i - \frac{A_i(N)}{B(N)} \right) \right)^\alpha}.$$

Это возможно только при $\sum\limits_{j=1}^{n} s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases}$ или при

$$\sum_{i \in C'} p_i r_i^\alpha - \sum_{i\in C'} p_i \left(\frac{A_i(C')}{B(C')} \right)^\alpha < c \left(\sum_{i \in C'} \left(r_i - \frac{A_i(C')}{B(C')} \right) \right)^\alpha.$$

Проведем необходимые преобразования:

$$\sum_{i\in C'} p_i r_i^\alpha - \frac{\left(\sum\limits_{i\in C'} r_i\right)^\alpha \sum\limits_{i\in C'} \sqrt[1-\alpha]{p_i}}{B(C')^\alpha} <$$
$$< c\left(\sum_{i\in C'} r_i\right)^\alpha \left(\frac{\sqrt[1-\alpha]{c}}{B(C')}\right)^\alpha,$$

$$B(C')^\alpha \sum_{i\in C'} p_i r_i^\alpha - \left(\sum_{i\in C'} r_i\right)^\alpha B(C') < 0,$$
$$\sum_{i\in C'} p_i r_i^\alpha < \left(\sum_{i\in C'} r_i\right)^\alpha B(C')^{1-\alpha}.$$

Так как $\left(\sum\limits_{i\in C'} r_i\right)^\alpha < \sum\limits_{i\in C'} r_i^\alpha$ и $\left(\sqrt[1-\alpha]{c} + \sum\limits_{i\in C'} \sqrt[1-\alpha]{p_i}\right)^{1-\alpha} < (\sqrt[1-\alpha]{c})^{1-\alpha} + \sum\limits_{i\in C'} (\sqrt[1-\alpha]{p_i})^{1-\alpha} = c + \sum\limits_{i\in C'} p_i$, то $\sum\limits_{i\in C'} p_i r_i^\alpha < \sum\limits_{i\in C'} r_i^\alpha \left(c + \sum\limits_{i\in C'} p_i\right)$, $\sum\limits_{i\in C'} r_i^\alpha \left(c + \sum\limits_{i\in C'} p_i - p_i\right) > 0$, последнее неравенство очевидно, а в силу эквивалентности преобразований и первоначальное неравенство справедливо, что говорит о том, что в данном случае механизм побуждения с обратной связью системно согласован. □

Применим теоретический подход к случаю, когда функция частного дохода степенная, с показателем, меньшим единицы, а функция общего дохода линейна:

$$g_i(u_1,\ldots,u_n) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(\sum_{i\in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$g_0(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i\in N} p_i(r_i - u_i) + c(\sum_{i\in N} u_i)^\alpha \to \max$$
$$s_i \geq 0, \sum_{j=1}^n s_j = \begin{cases} 1, & \exists i : s_i > 0, \\ 0, & \forall i : s_i = 0, \end{cases}, i = 1,\ldots,n,$$
$$0 \leq u_i \leq r_i, 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 4.4. *Экономический механизм с обратной связью при теоретическом подходе в случае, когда функция общего дохода степенная с показателем, меньшим единицы, а функция частного дохода линейна, системно согласован.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям выше заметим, что стратегия наказания есть $s_i^P = 0$, при этом оптимальная реакция агента $E_i = \{u_i = 0\}$, доход агента равен $L_i = p_i r_i$, а доход принципала $K_2 = \sum\limits_{i \in N} p_i r_i$.

Множество стратегий D_i, при которых доход агента больше L_i:

$$s_i c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^{\alpha} > p_i u_i.$$

Это возможно только при выполнении условия

$$s_i > \frac{p_i u_i}{c\left(\sum\limits_{i \in N} u_i\right)^{\alpha}}. \tag{4.1}$$

Найдем величину K_1:

$$K_1 = \max_{s_i \in D_i} \max_{u_i} \left[\sum_{i \in N} p_i (r_i - u_i) + c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^{\alpha} \right] =$$
$$= \max_{u_i} \left[\sum_{i \in N} p_i (r_i - u_i) + c \left(\sum_{i \in N} u_i \right)^{\alpha} \right].$$

Как показано выше,

$$\sum_{i \in N} u_i^{\max} = \min\{\sum_{i \in N} r_i, \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}\}.$$

Напомним процедуру выбора агентом своей стратегии. Перенумеруем игроков по возрастанию величин p_i. Далее необходимо найти номер такого агента m, для которого $\sum\limits_{j<m} r_j < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} < \sum\limits_{j \le m} r_j$. Тогда $u_{i<m} = r_i$, $u_m = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_1}} - \sum\limits_{j<m} r_j$, $u_{i>m} = 0$. Если же такого m нет, то все $u_i = r_i$. Докажем, что при этом можно выполнить (4.1), что гарантирует выгодность стратегии $u_j^{\max}$ для агента. Рассмотрим два случая:

1. все $u_i = r_i$, что происходит при выполнении условия $\sum\limits_{j\in N} r_j < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}$ или $p_{\min} < \frac{\alpha c}{\left(\sum\limits_{j\in N} r_j\right)^{1-\alpha}}$. Нужно доказать, что можно выполнить (4.1), что возможно при $\sum\limits_{i\in N} p_i r_i < c\left(\sum\limits_{i\in N} r_i\right)^{\alpha}$. Чтобы доказать данное неравенство, рассмотрим выражение $\sum\limits_{i\in N} p_i r_i - c\left(\sum\limits_{i\in N} r_i\right)^{\alpha}$ и докажем, что оно отрицательно. Действительно, имеем $\sum\limits_{i\in N} p_i r_i - c\left(\sum\limits_{i\in N} r_i\right)^{\alpha} < \frac{\alpha c}{\left(\sum\limits_{j\in N} r_j\right)^{1-\alpha}} \sum\limits_{j\in N} r_j - c\left(\sum\limits_{i\in N} r_i\right)^{\alpha} = c\left(\sum\limits_{i\in N} r_i\right)^{\alpha}(\alpha-1) < 0$.

2. $\sum\limits_{i\in N} u_i^{\max} = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}$, что происходит при выполнении условия $\sum\limits_{i\in N} r_i > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}$. Для тех агентов, у которых $u_j^{\max} = 0$, это можно обеспечить стратегией $s_i = \epsilon_j$, для остальных агентов нужно доказать, что выполнено (4.1). Это возможно только при $\sum\limits_{i\in C'} p_i u_i < c\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}\right)^{\alpha}$. Проведем необходимые преобразования:

$$\sum_{i\in C'} p_i u_i - c\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}\right)^{\alpha} = \sum_{i<m} p_i r_i + p_m\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}} - \sum_{i<m} r_i\right) - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha^{\alpha} c}{p_{\min}^{\alpha}}} < p_m\left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}}}\right) - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha^{\alpha} c}{p_{\min}^{\alpha}}} = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_m^{\alpha}}} - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha^{\alpha} c}{p_{\min}^{\alpha}}} < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}^{\alpha}}} - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha^{\alpha} c}{p_{\min}^{\alpha}}} = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha^{\alpha} c}{p_{\min}^{\alpha}}}(\alpha-1) < 0,$$

что говорит о системной согласованности данного механизма.

□

5. Административные механизмы системного согласования

Предположим теперь, что ведущий может ограничивать множества допустимых управлений агентов. Рассмотрим только случай административного принуждения без обратной связи, поскольку наиболее естественной интерпретацией обратной связи служит коррупция, анализу которой при системном согласовании предполагается посвятить отдельную работу. Тогда модель (2.1)–(2.2) принимает вид

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{q}_i, \bar{q}_i, u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u) \to \max, \\ \tilde{q}_i \le u_i \le \bar{q}_i, s_i \in [0, 1], \\ g_0(\tilde{q}, \bar{q}, u) = \sum_{j \in N} p_j(r_j - u_j) + c(u) \to \max, \\ 0 \le \tilde{q}_i \le \bar{q}_i \le r_i, i \in N. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ясно, что если возможности ведущего не ограничены, то задача (5.1) имеет тривиальное решение $\tilde{q}_i = \bar{q}_i = u_i^{\max}, i \in N$. Поэтому реальная постановка задачи проектирования административных механизмов системного согласования требует учета затрат ведущего. Тогда задача (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} g_0(\tilde{q}, \bar{q}, u) = \sum_{j \in N} p_j(r_j - u_j) + c(u) - C(\tilde{q}, \bar{q}) \to \max, \\ 0 \le \tilde{q}_i \le \bar{q}_i \le r_i, i \in N, \end{aligned}$$

где $C(\tilde{q}, \bar{q})$ – непрерывно дифференцируемая и выпуклая по всем аргументам функция затрат ведущего на принуждение. Проиллюстрируем этот подход на простом примере. Пусть

$$\begin{aligned} g_i(\tilde{q}_i, \bar{q}_i, u) = k_i(r_i - u_i) + s_i K \sum_{j \in N} u_j \to \max, \\ \tilde{q}_i \le u_i \le \bar{q}_i, s_i \in [0, 1], \\ g_0(\tilde{q}, \bar{q}, u) = \sum_{j \in N} k_j(r_j - u_j) + K \sum_{j \in N} u_j - \sum_{j \in N} (\tilde{m}_j \tilde{q}_j + \bar{m}_j \bar{q}_j) \to \max, \\ 0 \le \tilde{q}_i \le \bar{q}_i \le r_i, i \in N, \end{aligned}$$

где $K, k_i, \tilde{m}_j, \bar{m}_j$ – известные положительные константы. Условия первого порядка дают

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_i} = s_i K - k_i \Rightarrow u_j^* = \begin{cases} r_i, & k_i \le s_i K, \\ 0, & k_i > s_i K; \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial u_i} = K - k_i \Rightarrow u_j^{\max} = \begin{cases} r_i, & k_i \le K, \\ 0, & k_i > K; \end{cases}$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \hat{q}_i} = -\tilde{m}_i, \frac{\partial g_0}{\partial \bar{q}_i} = -\bar{m}_i \Rightarrow \tilde{q}_i^{\max} = \bar{q}_i^{\max} = 0.$$

Заметим, что если $k_i > K$, то тем более $k_i > s_i K$, поэтому $u_i^{\max} = = u_i^* = 0$ и принуждение не требуется (модель системно согласована). Если же $k_i \le K$, то надо различать два случая:

1. $k_i \le s_i K \Rightarrow u_i^{\max} = u_i^* = r_i$, и принуждение вновь не требуется;

2. $s_i K < k_i \le K \Rightarrow u_i^* = 0, u_i^{\max} = r_i$. Тогда нужно сравнивать выигрыши ведущего при наличии и отсутствии административного принуждения. Обозначим через M множество агентов, для которых $s_i K < k_i \le K$. Имеем при административном воздействии $g_0(r, 0, r) = K \sum\limits_{j \in M} r_j - \sum\limits_{j \in M} \tilde{m}_j r_j$, а при отказе от него $g_0(0, 0, 0) = \sum\limits_{j \in M} k_j r_j$. Таким образом, административное принуждение целесообразно при условии $\sum\limits_{j \in M} (K - \tilde{m}_j - k_j) r_j > 0$.

Будем рассматривать модели

$$g_i(q_i, u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u) \to \max,$$
$$q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0, 1],$$
$$g_0(q, u) = \sum_{j \in N} p_j(r_j - u_j) + c(u) - D(q) \to \max,$$
$$0 \le q_i \le r_i, i \in N,$$

то есть принципал назначает долю ресурсов, меньше которой агент не может использовать на общие цели. При этом в качестве функции затрат будем брать следующие:

1. отсутствие затрат на контроль $D(q) = 0$ (для сравнения);

2. линейную $D(q) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i$ в иллюстративных целях;

3. квадратичную $D(q) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i^2$, как делается в большинстве работ;

4. гиперболическую $D(q) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i q_i}{r_i - q_i}$, которая, на наш взгляд, более адекватна, поскольку при нулевом контроле затрат нет ($D(0) = 0$), затраты при увеличении контроля возрастают, а 100%-й контроль невозможен ($\lim\limits_{q_i \to r_i} D(q) = \infty$).

Случай отсутствия затрат

$$\begin{aligned} g_i(q_i, u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u) \to \max, \\ q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0,1], \\ g_0(q, u) = \sum_{j \in N} p_j(r_j - u_j) + c(u) \to \max, \\ 0 \le q_i \le r_i, i \in N \end{aligned}$$

сводится к тому, что целевой функцией принципала становится функция общественного благосостояния, которая уже исследована нами в более ранних работах. В этом случае оптимальная стратегия агента без учета условия $q_i \le u_i \le r_i$ будет u_i^*, но оптимальная стратегия принципала $q_i = u_i^{\max}$. Доказано, что $u_i^{\max} \ge u_i^*$, поэтому оптимальная стратегия агента с учетом условия $q_i \le u_i \le r_i$ будет $u_i = q_i = u_i^{\max}$, что говорит о системной согласованности.

Рассмотрим случай, когда все три вида функций модели: затрат, дохода от общей и частной деятельности линейные.

$$\begin{aligned} g_i(q_i, u) = p_i \cdot (r_i - u_i) + s_i c \sum_{i=1}^{n} u_i \to \max, \\ q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0,1], \\ g_0(q, u) = \sum_{j \in N} p_j \cdot (r_j - u_j) + c \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \to \max, \\ 0 \le q_i \le r_i, i \in N. \end{aligned}$$

Оптимальная стратегия агента $u_i^* = \begin{cases} r_i, & p_i \le s_i c, \\ q_i, & \text{иначе}. \end{cases}$ Найдем оптимальную стратегию Центра. Для этого разобьем множество агентов на два класса: $I = \{i : u_i = q_i\}$ и $C = \{i : u_i = r_i\}$. Тогда целевая функция принципала выглядит следующим образом:

$$g_0(q,u) = \sum_{j\in N} p_j \cdot (r_j - q_j) + c\sum_{i\in I}^{n} q_i + c\sum_{i\in C}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \to \max,$$
$$0 \le q_i \le r_i, i \in N.$$

Так как доход принципала не зависит от величины q_i агентов-коллективистов, то здесь принуждение не нужно, т.е. $q_i = 0$. В случае же агента-индивидуалиста

$$q_i = \begin{cases} r_i, & p_i + \alpha_i < c, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Следовательно, $q_i = \begin{cases} r_i, & p_i + \alpha_i < c, s_i c < p_i \\ 0, & p_i + \alpha_i > c \text{ или } s_i c > p_i, \end{cases}$

а $u_i = \begin{cases} r_i, & p_i + \alpha_i < c \text{ или } s_i c > p_i \\ 0, & p_i + \alpha_i > c, s_i c < p_i. \end{cases}$

Доход агента при этом равен

$$g_{i\in I, c>p_i+\alpha_i} = s_i c \sum_{i\in C\cup\{i|c>p_i+\alpha_i\}} r_i,$$
$$g_{i\in I, c<p_i+\alpha_i} = p_i r_i + s_i c \sum_{i\in C\cup\{i|c>p_i+\alpha_i\}} r_i,$$
$$g_{i\in C} = s_i c \sum_{i\in C\cup\{i|c>p_i+\alpha_i\}} r_i.$$

Доход же принципала

$$g_0(q,u) = \sum_{j\in I, c<p_j+\alpha_j} p_j r_j + c \sum_{i\in C\cup\{i|c>p_i+\alpha_i\}} r_i - \sum_{j\in I, c>p_j+\alpha_j} \alpha_j r_j.$$

Пусть теперь функция затрат и функция дохода общей деятельности линейны, а функция частной деятельности степенная с показателем, меньшим единицы:

$$g_i(q_i,u) = p_i \cdot (r_i - u_i)^\alpha + s_i c \sum_{i=1}^{n} u_i \to \max,$$
$$q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0,1],$$
$$g_0(q,u) = \sum_{j\in N} p_j \cdot (r_j - u_j)^\alpha + c\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \to \max,$$
$$0 \le q_i \le r_i, i \in N.$$

Оптимальная стратегия агента $u_i^* = \begin{cases} r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{s_i c}}, & s_i c > \frac{p_i \alpha}{(r_i - q_i)^{1-\alpha}}, \\ q_i, & s_i c < \frac{p_i \alpha}{(r_i - q_i)^{1-\alpha}}. \end{cases}$
Найдем оптимальную стратегию принципала. Для этого разобьем множество агентов на два класса: $I = \{i : u_i = q_i\}$ и $C' = \{i : u_i \neq q_i\}$. Тогда целевая функция принципала выглядит следующим образом:

$$g_0(q,u) = \sum_{j\in I} p_j \cdot (r_j - q_j)^\alpha + \sum_{j\in C'} p_j \cdot \left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_j}{s_j c}}\right)^\alpha + c\sum_{i\in I} q_i +$$
$$+c\sum_{i\in C'} r_i - c\sum_{i\in C'} \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{s_i c}} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i.$$

Так как доход принципала не зависит от величины q_i агентов-коллективистов, то здесь принуждение не нужно, т.е. $q_i = 0$. В случае же агента-индивидуалиста

$$q_i = \begin{cases} r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{c-\alpha_i}}, & c > \alpha_i, c - \alpha_i > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, \\ 0, & c > \alpha_i, c - \alpha_i < \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, \\ r_i, & c < \alpha_i. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая условие $q_i \le u_i \le r_i$:

$$u_i = \begin{cases} r_i, & c < \alpha_i, \\ 0, & c > \alpha_i, c - \alpha_i < \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, s_i c < \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, \\ r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{c-\alpha_i}}, & c > \alpha_i, c - \alpha_i > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, s_i < 1 - \frac{\alpha_i}{c}, \\ r_i - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{s_i c}}, & c > \alpha_i, c - \alpha_i > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, (s_i c > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, \text{или} s_i > 1 - \frac{\alpha_i}{c}). \end{cases}$$

Условие системного согласования состоит в отсутствии агентов, для которых $c > \alpha_i, c - \alpha_i > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, s_i c > \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}$ или $c > \alpha_i, c - \alpha_i >$ $> \frac{p_i\alpha}{r_i^{1-\alpha}}, s_i > 1 - \frac{\alpha_i}{c}$.

Рассмотрим случай, когда функция затрат и функция дохода от частной деятельности линейны, а функция дохода от общей деятельности степенная с показателем, меньшим единицы

$$g_i(q_i, u) = p_i \cdot (r_i - u_i) + s_i c \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{\alpha} \to \max,$$
$$q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0,1],$$
$$g_0(q, u) = \sum_{j \in N} p_j \cdot (r_j - u_j) + c \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \to \max,$$
$$0 \le q_i \le r_i, i \in N.$$

Оптимальная стратегия агента

$$\sum_{i \in N} u_i^* = \begin{cases} \sum\limits_{i \in N} r_i, & \sum\limits_{i \in N} r_i < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}, \\ \sum\limits_{i \in N} q_i, & \sum\limits_{i \in N} q_i > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}, \\ \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}}, & \sum\limits_{i \in N} q_i < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} < \sum\limits_{i \in N} r_i. \end{cases}$$

Выделение ресурсов i-м агентом происходит следующим образом:

1. Перенумеруем игроков по убыванию величин p_i/s_i.

2. Если у игрока 1 хватает кажущегося ему необходимым количества ресурсов (выполняется условие $\sum\limits_{i \in N} q_i < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}} < r_1 + \sum\limits_{i>1} q_i$), то $u_1 = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}} - \sum\limits_{i>1} q_i$, $u_{i>1} = q_i$. Конец алгоритма. В противном случае, т.е. если $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}} > r_1 + \sum\limits_{i>1} q_i$, имеем $u_i = r_i$, а остальные ресурсы добавляют другие агенты. Если же $\sum\limits_{i \in N} q_i > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}}$, то все агенты выделяют только минимальное количество ресурсов на общие цели, т.е. $u_i = q_i$. Конец алгоритма.
   Переходим к агенту 2. Если у него хватает ресурсов, то есть $\sum\limits_{i>1} q_i < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_2 c}{p_2}} - r_1 < r_2 + \sum\limits_{i>2} q_i$, то $u_2 = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_2 c}{p_2}} - r_1 - \sum\limits_{i>2} q_i$, $u_{i>2} = q_i$, конец алгоритма.
   Если же $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_2 c}{p_2}} - r_1 > r_2 + \sum\limits_{i>2} q_i$, то $u_2 = r_2$, а остальные ресурсы добавляют другие агенты. Наконец, если $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_2 c}{p_2}} - r_1 < \sum\limits_{i>1} q_i$, то все оставшиеся агенты выделяют только минимальное количество ресурсов на общие цели, т.е. $u_{i>1} = q_i$. Конец алгоритма.

3. Переходим к очередному агенту i. В случае, если у него хватает ресурсов, чтобы выделить оставшиеся ресурсы на общие цели (т.е.,$\sum\limits_{j\geq i} q_j \leq \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} - \sum\limits_{j<i} r_j < r_i + \sum\limits_{j>i} q_j$), то $u_i = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} - - \sum\limits_{j<i} r_j - \sum\limits_{j>i} q_j$, $u_{j>i} = q_j$. Конец алгоритма. В противном случае (т.е. $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} - \sum\limits_{j<i} r_j > r_i + \sum\limits_{j>i} q_j$), имеем $u_i = r_i$, а остальные ресурсы добавляют другие агенты. Если же $\sum\limits_{j\geq i} q_j > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} - - \sum\limits_{j<i} r_j$, то данный и все оставшиеся агенты выделяют на общие цели минимальное количество ресурсов, т.е. $u_{j\geq i} = q_j$. Конец алгоритма.

4. Повторяем шаг 3 до тех пор, пока либо найдется агент с номером l, у которого есть возможность добавить оставшуюся часть средств на общие цели (при этом оставшиеся агенты с большим номером на общие цели выделяют лишь минимальное количество ресурсов, и на общие цели всеми агентами будет выделено количество ресурсов в размере $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_l c}{p_l}}$), либо пока все агенты не ассигнуют все имеющиеся у них ресурсы на общие цели.

Найдем оптимальную стратегию принципала. Если после перенумерации $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_n c}{p_n}} > \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, то все агенты направляют все свои ресурсы на общие цели, и необходимости в принуждении нет.

В случае, когда $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}} < \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$, и все агенты вынуждены потратить на общие цели лишь минимально возможное количество ресурсов $u_i = q_i$, задача принципала выглядит следующим образом:

$$g_0(q,u) = \sum_{j\in N} p_j \cdot (r_j - u_j) + c\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i,$$
$$0 \leq q_i \leq r_i, i \in N,$$

решение которой

$$\sum_{i\in N} q_i = \min\{\sum_{i\in N} r_i, \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min} + \alpha_{\min}}}\}$$

min – номер того агента, у которого сумма величин $p_i + \alpha_i$ минимальна. Это возможно в случае, если $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}+\alpha_{\min}}} > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}}$ или $p_1 > s_1(p_{\min} + \alpha_{\min})$.

Если же $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{p_{\min}+\alpha_{\min}}} < \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_1 c}{p_1}}$, то не все агенты вынуждены тратить лишь минимально возможную долю средств на общие цели.

Рассмотрим случай, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i \leq \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_i c}{p_i}} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. В этом случае агенты выделяют ресурсы в соответствии с приведенным алгоритмом, причем существует агент l, на котором алгоритм завершается. Целевая функция принципала при этом равна:

$$g_0(q,u) = \sum_{j>l} p_j \cdot (r_j - q_j) + p_l \cdot c \left(r_l - \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_l c}{p_l}} + \sum_{i<l} r_i + \sum_{i>l} q_i \right) + \\ + c \left(\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_l c}{p_l}} \right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i.$$

Поскольку от $q_{i\leq l}$ зависит только последнее слагаемое, то $q_{i\leq l} = 0$. В силу линейности функции по $q_{i>l}$ получим $q_{i>l} = \begin{cases} r_i, & p_l > p_i + \alpha_i, \\ 0, & p_l < p_i + \alpha_i. \end{cases}$ В этом случае должно выполняться условие $\sum\limits_{i<l, p_l > p_i + \alpha_i} r_i \leq \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_l c}{p_l}} \leq$ $\leq \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Если же $\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_{l-1} c}{p_{l-1}}} > \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$, а $\sum\limits_{i<l, p_l > p_i + \alpha_i} r_i > \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha s_l c}{p_l}}$, то целевая функция принципала выглядит следующим образом: $g_0(q,u) =$ $= p_l \cdot (r_l - q_l) + c \left(\sum\limits_{i<l} r_i + \sum\limits_{i\geq l} q_i \right)^{\alpha} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i q_i$.

Заметим, что в этом случае $q_{i<l} = 0$, а условия первого порядка для остальных агентов дают

$$\sum_{i\geq l} q_i = \min\{\sum_{i\in N} r_i, \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha c}{\min(p_l + \alpha_l, p_{i>l})}}\}.$$

Рассмотрим случай, когда функция затрат линейная, а функции доходов от общей и частной деятельности степенные с показателем, меньшим единицы:

$$g_i(q_i,u) = p_i \cdot (r_i - u_i)^\alpha + s_i c \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^\alpha \to \max,$$
$$q_i \le u_i \le r_i, s_i \in [0,1],$$
$$g_0(q,u) = \sum_{j\in N} p_j \cdot (r_j - u_j)^\alpha + c\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^\alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i \to \max,$$
$$0 \le q_i \le r_i, i \in N.$$

Оптимальная стратегия агента с учетом введенных ранее величин $A_j(S)$, $B_j(S)$ и $B(S)$:

$$u_j^* = \max\{r_j - \frac{A_j}{B_j}, q_j\}.$$

Найдем оптимальную стратегию принципала. Для этого разобьем множество агентов на два класса: $I = \{i : u_i = q_i\}$ и $C' = \{i : u_i \ne q_i\}$. Тогда целевая функция принципала выглядит следующим образом:

$$g_0(q,u) = \sum_{j\in I} p_j \cdot (r_j - q_j)^\alpha + \sum_{i\in C'} p_i \cdot \left(\frac{A_i(C')}{B_i(C')}\right)^\alpha +$$
$$+c\left(\sum_{i\in I} q_i + \sum_{i\in C'} r_i - \sum_{i\in C'} \frac{A_i(C')}{B_i(C')}\right)^\alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i.$$

Отсюда видно, что $q_{i\in C'} = 0$, а условие первого порядка на $q_{i\in I} = 0$ дает

$$\frac{\alpha p_i}{(r_i - q_i)^{1-\alpha}} + \alpha_i = \frac{\alpha c}{\left(\sum\limits_{i\in I} q_i + \sum\limits_{i\in C'} r_i - \sum\limits_{i\in C'} \frac{A_i(C')}{B_i(C')}\right)^{1-\alpha}}.$$

Так как правая часть одинаковая при любом i, для двух агентов $i, j \in I$ получим $\frac{\alpha p_i}{(r_i - q_i)^{1-\alpha}} + \alpha_i = \frac{\alpha p_j}{(r_j - q_j)^{1-\alpha}} + \alpha_j$ или $(r_i - q_i)^{1-\alpha} = \frac{\alpha p_i (r_j - q_j)^{1-\alpha}}{\alpha p_j + (\alpha_j - \alpha_i)(r_j - q_j)^{1-\alpha}}$ или $q_i = r_i - (r_j - q_j)\sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i}{\alpha p_j + (\alpha_j - \alpha_i)(r_j - q_j)^{1-\alpha}}}$. Подставив это в условие первого порядка, получим

$$\frac{\alpha p_j}{(r_j - q_j)^{1-\alpha}} + \alpha_j =$$
$$= \frac{\alpha c}{\left(\sum\limits_{i\in N} r_i + \sum\limits_{i\in I} \sqrt[1-\alpha]{\frac{\alpha p_i (r_j - q_j)^{1-\alpha}}{\alpha p_j + (\alpha_j - \alpha_i)(r_j - q_j)^{1-\alpha}}} - \sum\limits_{i\in C'} \frac{A_i(C')}{B_i(C')}\right)^{1-\alpha}}.$$

Здесь применимы только численные методы.

В случае, когда функция затрат квадратичная, функции дохода от общей и частной деятельности линейные

$$\begin{aligned} g_i(q_i,u) = p_i\cdot(r_i-u_i)+s_i c\sum_{i=1}^{n}u_i \to \max,\\ q_i\le u_i\le r_i, s_i\in[0,1],\\ g_0(q,u)=\sum_{j\in N}p_j\cdot(r_j-u_j)+c\sum_{i=1}^{n}u_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i q_i^2\to\max,\\ 0\le q_i\le r_i, i\in N \end{aligned}$$

по аналогии получим, что для агентов-коллективистов принуждение не нужно, т.е. $q_i=0$. В случае же агента-индивидуалиста

$$q_i=\begin{cases} r_i, & p_i<c-2\alpha_i r_i,\\ \frac{c-p_i}{2\alpha_i}, & c-2\alpha_i r_i<p_i<c,\\ 0, & p_i>c. \end{cases}$$

Следовательно,$u_i = \begin{cases} r_i, & p_i<c-2\alpha_i r_i \text{ или } p_i<s_i c,\\ \frac{c-p_i}{2\alpha_i}, & c-2\alpha_i r_i<p_i<c, p_i>s_i c\\ 0, & p_i>c. \end{cases}$

Условие системного согласования состоит в отсутствии агентов, для которых $p_i>c-2\alpha_i r_i$, $p_i<s_i c$.

Для случая, когда функции затрат гиперболические, а функции дохода от общей и частной деятельности линейные, аналогично получаем

$$\begin{aligned} g_i(q_i,u) = p_i\cdot(r_i-u_i)+s_i c\sum_{i=1}^{n}u_i \to \max,\\ q_i\le u_i\le r_i, s_i\in[0,1],\\ g_0(q,u)=\sum_{j\in N}p_j\cdot(r_j-u_j)+c\sum_{i=1}^{n}u_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i q_i}{r_i-q_i}\to\max,\\ 0\le q_i\le r_i, i\in N. \end{aligned}$$

В случае агентов-коллективистов принуждение не нужно, т.е. $q_i=0$.

В случае же агента-индивидуалиста

$$q_i = \begin{cases} r_i, & p_i > c, \\ r_i - \sqrt{\frac{\alpha r_i}{c-p_i}}, & c - \frac{\alpha_i}{r_i} < p_i < c, \\ 0, & p_i < c - \frac{\alpha_i}{r_i}, \end{cases}$$

откуда $u_i = \begin{cases} r_i, & p_i > c \text{ или } p_i < s_i c, \\ r_i - \sqrt{\frac{\alpha r_i}{c-p_i}}, & c - \frac{\alpha_i}{r_i} < p_i < c, p_i > s_i c \\ 0, & s_i c < p_i < c - \frac{\alpha_i}{r_i}. \end{cases}$

6. Заключение

Проблема согласования общественных и частных интересов актуальна на всех уровнях организации общества. Данная статья посвящена исследованию СОЧИ-моделей, эффективности равновесий в них, анализу экономических и административных механизмов управления в СОЧИ-моделях. Найдены условия системной согласованности в СОЧИ-моделях. Исследованы экономический и административный механизмы управления системной согласованностью. Для анализа экономического механизма использовалось два подхода: эмпирический и теоретический. Выявлены условия согласованности экономического механизма управления для достаточно общей постановки. Для административного механизма условия согласованности пока изучены для частных вариантов отсутствия затрат на контроль, а также различных сочетаний функций затрат: линейной, квадратичной, гиперболической. Показано, что если затрат на контроль нет, то административный механизм системно согласован. В остальных случаях найдены оптимальные стратегии участников системы и условия системного согласования административного механизма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Algorithmic Game Theory.* Ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. Cambridge University Press, 2007.

2. Burkov V.N., Opoitsev V.I. *Metagame approach to the control in hierarchical systems* // Automation and Remote Control. 1974. V. 35. N 1. P. 93–103.

3. Germeier Yu.B., Vatel I.A. *Equilibrium situations in games with a hierarchical structure of the vector of criteria* // Lecture Notes in Computer Science. 1975. N. 27. P. 460-465.

4. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *Purpose and Non-Purpose Resource Use Models in Two-Level Control Systems* // Advances in Systems Science and Applications. 2013. V. 13. N 4. P. 378–390.

5. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. *System Compatibility, Price of Anarchy and Control Mechanisms in the Models of Concordance of Private and Public Interests* // Advances in Systems Science and Applications. 2015. V. 15. N 1. P. 45–59.

6. Kononenko A.F. *Game-theory analysis of a two-level hierarchical control system* // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1974. V. 14. N 5. P. 72–81.

7. Kukushkin N.S. *A Condition for Existence of Nash Equilibrium in Games with Public and Private Objectives* // Games and Economic Behavior. 1994. N 7. P. 177–192.

8. Laffont J.-J., Martimort D. *The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model*. Princeton University Press, 2002.

9. *Mechanism Design and Management: Mathematical Methods for Smart Organizations*. Ed. by Prof. D. Novikov. N.Y.: Nova Science Publishers, 2013.

10. Novikov D. *Theory of Control in Organizations*. N.Y.: Nova Science Publishers, 2013.

11. Ougolnitsky G. *Sustainable Management*. N.Y.: Nova Science Publishers, 2011.

12. Ye D., Chen J. *Non-cooperative games on multidimensional resource allocation* // Future Generation Computer Systems. 2013. N 29. P. 1345–1352.

STATIC MODELS OF CONCORDANCE OF PRIVATE AND PUBLIC INTERESTS IN RESOURCE ALLOCATION

Olga I. Gorbaneva, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Cand.Sc., Associate Professor (gorbaneva@mail.ru).
Guennady A. Ougolnitsky, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Dr.Sc., Professor (ougoln@mail.ru).

Abstract: Conditions of system compatibility in the models of resource allocation between private and public activity are analyzed. Economic and administrative control mechanisms of the system compatibility are described.

Keywords: control mechanisms, hierarchical games, resource allocation, system compatibility.