

УДК 517.977

ББК 22.1

РАВНОВЕСНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ БИМАТРИЧНЫХ ИГРАХ СО СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ ВЫИГРЫШЕЙ

НИКОЛАЙ А. КРАСОВСКИЙ

Уральский государственный аграрный университет

620075, Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 42

e-mail: nkrasovskiy@gmail.com

АЛЕКСАНДР М. ТАРАСЬЕВ*

Институт математики и механики

им. Н.Н. Красовского УрО РАН

620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

e-mail: tam@imm.uran.ru

В работе исследуются модели эволюционных игр с ненулевой суммой на бесконечном интервале времени. Аппарат теории дифференциальных игр используется для анализа игровых взаимодействий между двумя группами участников эволюционной игры. Предполагается, что участники в группах подвержены управлению с помощью сигналов по изменению поведения. Выигрыши коалиций участников определяются как среднеинтегральные функционалы на бесконечном горизонте. Ставится задача построения динамического равновесия по Нэшу для рассматриваемой эволюционной игры. При определении равновесных по Нэшу решений применяются идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр. В работе используются динамические конструкции и методы анализа эво-

©2016 Н.А. Красовский, А.М. Тарасьев

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00486.

люционных игр. Большое внимание уделяется построению динамического равновесия по Нэшу со стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрышей и обладают гарантирующими свойствами согласно минимаксному подходу. Применение минимаксного подхода для построения оптимальных стратегий управления синтезирует траектории динамического равновесия по Нэшу, которые обеспечивают результат, лучший по сравнению со статическими решениями и эволюционными моделями с репликаторной динамикой. Проводится сравнение траекторий динамического равновесия по Нэшу для эволюционных игр со среднеинтегральными функционалами качества и предельными функционалами качества на бесконечном горизонте.

Ключевые слова: динамические биматричные игры, среднеинтегральные выигрыши, характеристики уравнений Гамильтона-Якоби, равновесные траектории.

1. Введение

Работа посвящена анализу моделей эволюционных игр с ненулевой суммой на бесконечном интервале времени. Особенностью анализа является применение аппарата теории дифференциальных игр [10] для описания игровых взаимодействий между двумя группами участников эволюционной игры. В рамках конструкций теории оптимального управления [17] предполагается возможность управляющих воздействий на участников коалиций с помощью сигналов по изменению поведения. Считается, что выигрыши коалиций участников определяются как среднеинтегральные функционалы на бесконечном горизонте. Ставится задача построения динамического равновесия по Нэшу для рассматриваемой эволюционной игры. При определении равновесных по Нэшу решений применяются идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [4]. Важно подчеркнуть, что в работе используются динамические конструкции и методы анализа эволюционных игр, которые основаны на подходах, предложенных в работе [11].

В построении динамики игрового взаимодействия участников коалиций используются элементы эволюционных игровых моделей [2,24,

26–28,30]. Применены также идеи и конструкции кооперативных динамических игр [13–16].

Взаимодействия между участниками представлены управляемым динамическим процессом, в котором соответствующие пропорции его участников формируют фазовый вектор. Такая динамика интерпретируется как обобщение уравнений А.Н. Колмогорова для вероятностей состояний [5], которые широко применяются в марковских процессах, стохастических моделях математической экономики и теории очередей. В динамику вводятся управляющие параметры вместо фиксированных параметров, описывающих входящие и исходящие потоки внутри групп. Динамический игровой процесс рассматривается на бесконечном интервале времени. Выигрыши участников коалиций в каждом раунде специфицируются матрицами выигрышей. Выигрыши коалиций в каждом периоде определяются как математическое ожидание выигрышей участников. На бесконечном интервале времени функционалы выигрышей коалиций определяются среднеинтегральными показателями (временными средними значениями), методы анализа которых в теории управления исследовались в работах [1,3].

Аналогично конструкциям неантагонистических дифференциальных игр [4] в работе вводится понятие динамического равновесия по Нэшу для динамической игры со среднеинтегральными показателями выигрышей в классе стратегий управления по принципу обратной связи. Следует отметить, что позиционные стратегии, построенные на основе статических стратегий «наказания» в биматричных играх, являются частью равновесия по Нэшу и в динамической постановке. Эти позиционные стратегии удерживают участников коалиций на статических равновесных решениях. Природа таких обратных связей является антагонистичной: они минимизируют выигрыш соперника, не максимизируя свой, и, в этом смысле, «наказывают» игроков противоположной коалиции. Отметим, что алгоритм построения стратегий «наказания» не представляет трудности, так как целиком определяется статическими нэшевскими решениями биматричных игр.

Основное внимание в работе уделяется построению позиционных стратегий, максимизирующих собственные выигрыши при любом поведении игроков противоположных коалиций, то есть «гарантирую-

щих» стратегий [10,12,29]. Эти решения строятся в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [17] и конструкций теории позиционных дифференциальных игр [10]. Решение задачи оптимального управления сочетает элементы принципа максимума, конструкции областей достижимости и выживаемости, и метода характеристик для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби [18–23,25]. Более точно, оптимальная траектория строится из кусков характеристик, а моменты переключения с одной характеристики на другую определяются из принципа максимума. Моменты и точки переключения генерируют линии переключения в фазовом пространстве, которые определяют синтез оптимальных позиционных стратегий. Следует отметить, что подобные методы численного построения позиционных стратегий используются в работах [6–9].

Траектории равновесных решений строятся на основе оптимальных позиционных стратегий, порожденных линиями переключения для характеристик уравнений Гамильтона-Якоби. Эти траектории имеют участки эволюционного развития вдоль характеристик, а перестройка происходит на линиях переключения. Характерной особенностью этих траекторий является гарантия выигрыша для среднеинтегральных показателей, значения которых не хуже, чем в точке статического равновесия по Нэшу. В рассмотренных приложениях равновесные траектории, состоящие из кусков характеристик, обладают свойством сходимости к новому положению равновесия с лучшими показателями выигрышей, чем в статических биматричных играх или моделях эволюционных игр с репликаторной динамикой [27].

В заключение для динамической биматричной игры рассматриваются равновесные траектории для двух функционалов выигрышей на бесконечном горизонте. Первый функционал основан на среднеинтегральных показателях, а второй функционал определяется предельным переходом от терминального. Отметим, что линии переключения для «глобального» среднеинтегрального показателя обеспечивают более длительное движение коалиций по градиенту «локальной» функции выигрышей, чем «глобальный» предельный функционал.

2. Динамика модели

Исследуется система дифференциальных уравнений, задающая динамику поведения двух групп (коалиций) игроков

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u, & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{y} &= -y + v, & y(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Параметр x , $0 \leq x \leq 1$, обозначает вероятность того, что произвольно выбранный игрок из первой группы придерживается первой стратегии (соответственно, $(1-x)$ есть вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Параметр y , $0 \leq y \leq 1$, есть вероятность выбора первой стратегии игроком из второй коалиции (соответственно, $(1-y)$ – вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, и могут быть интерпретированы как сигналы, рекомендуемые смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0$ ($v = 0$) соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение $u = 1$ ($v = 1$) соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение $u = x$ ($v = y$) соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию».

Следует отметить, что базис для динамики (2.1) и ее свойства были рассмотрены в работах [11,30]. Такая динамика обобщает дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний [5]. Такое обобщение предполагает, что коэффициенты входящих и исходящих потоков внутри коалиций участников не заданы априори и могут быть сконструированы как позиционные стратегии в управляемом процессе.

3. Локальные функции выигрышей

Предположим, что выигрыши игрока из первой коалиции описывается матрицей $A = a_{ij}$, а выигрыши игрока из второй коалиции описывается матрицей $B = b_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Локальные функции выигрышей коалиций в периоде t , $t \in [t_0, +\infty)$ определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матрицами A и B в биматричной игре, и

могут быть интерпретированы как «локальные» интересы коалиций

$$\begin{aligned}
 g_A(x(t), y(t)) = & \\
 a_{11}x(t)y(t) + a_{12}x(t)(1 - y(t)) + a_{21}(1 - x(t))y(t) + & \\
 + a_{22}(1 - x(t))(1 - y(t)) = & \quad (3.1) \\
 C_A x(t)y(t) - \alpha_1 x(t) - \alpha_2 y(t) + a_{22}, &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_B(x(t), y(t)) = & \\
 b_{11}x(t)y(t) + b_{12}x(t)(1 - y(t)) + b_{21}(1 - x(t))y(t) + & \\
 + b_{22}(1 - x(t))(1 - y(t)) = & \\
 C_B x(t)y(t) - \beta_1 x(t) - \beta_2 y(t) + b_{22}. &
 \end{aligned}$$

Здесь параметры C_A , α_1 , α_2 и C_B , β_1 , β_2 задаются в соответствии с классической теорией биматричных игр (см. [2])

$$\begin{aligned}
 C_A &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\
 D_A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\
 \alpha_1 &= a_{22} - a_{12}, \\
 \alpha_2 &= a_{22} - a_{21},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_B &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \\
 D_B &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \\
 \beta_1 &= b_{22} - b_{12}, \\
 \beta_2 &= b_{22} - b_{21}.
 \end{aligned}$$

4. Равновесие по Нэшу в дифференциальной игре со среднеинтегральными функционалами

В этом разделе рассматривается дифференциальная игра с ненулевой суммой двух коалиций со среднеинтегральными функционалами выигрышей на бесконечном горизонте

$$\begin{aligned}
 JI_A^\infty &= [JI_A^-, JI_A^+], & (4.1) \\
 JI_A^- &= JI_A^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - t_0)} \int_{t_0}^T g_A(x(t), y(t)) dt, \\
 JI_A^+ &= JI_A^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - t_0)} \int_{t_0}^T g_A(x(t), y(t)) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
JI_B^\infty &= [JI_B^-, JI_B^+], \\
JI_B^- &= JI_B^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - t_0)} \int_{t_0}^T g_B(x(t), y(t)) dt, \\
JI_B^+ &= JI_B^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(T - t_0)} \int_{t_0}^T g_B(x(t), y(t)) dt,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

определенными на траекториях $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (2.1).

Среднеинтегральные функционалы (4.1), (4.2) являются традиционными для задач эволюционной экономики и биологической эволюции. В задачах оптимального управления такие функционалы рассматривались в работах [1,3], в которых они назывались «временными средними значениями». В отличие от функционалов выигрышей, оптимизируемых в каждом периоде, они допускают возможность проигрыша в некоторых периодах для того, чтобы выигрывать в других периодах и получать лучший интегральный результат по всем периодам. Отметим, что это свойство обеспечивает иной характер линий переключения в оптимальных позиционных стратегиях управления по сравнению с задачами, в которых выигрыши оптимизируются в каждом периоде. Это обстоятельство дает возможность для более длительного пребывания системы в благоприятных областях, где значения локальных выигрышей коалиций строго больше значений выигрышей в состояниях статического равновесия по Нэшу.

Представим понятие динамического равновесия по Нэшу для эволюционной игры с динамикой (2.1) и среднеинтегральными функционалами выигрышей (4.1), (4.2) в контексте конструкций неантагонистических позиционных дифференциальных игр [4,10,11]. Определим динамическое равновесие по Нэшу в классе позиционных стратегий (обратных связей) $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$.

Определение 4.1. *Динамические равновесия по Нэшу (U^0, V^0) , $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$ из класса управлений по принципу обратной связи $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ для данной задачи определяются неравенствами*

$$JI_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq JI_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon,$$

$$JI_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \geq JI_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} (x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V^0), \quad (x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U, V^0), \\ (x_2(\cdot), y_2(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U^0, V). \end{aligned}$$

Здесь символом X обозначено множество траекторий, выходящих из начальной точки и порожденных соответствующими позиционными стратегиями в смысле работы [10].

5. Вспомогательные игры с нулевой суммой

Для построения желаемых равновесных обратных связей U^0, V^0 используем подход [4]. В соответствии с таким подходом, мы выстраиваем равновесие с помощью оптимальных обратных связей для дифференциальных игр $\Gamma_A = \Gamma_A^- \cup \Gamma_A^+$ и $\Gamma_B = \Gamma_B^- \cup \Gamma_B^+$ с выигрышами JI_A^∞ (4.1) и JI_B^∞ (4.2). В игре Γ_A первая коалиция гарантированно максимизирует функционал $JI_A^-(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, а вторая коалиция старается, напротив, минимизировать функционал $JI_A^+(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $V = v(t, x, y, \varepsilon)$. Наоборот, в игре Γ_B вторая коалиция гарантированно максимизирует функционал $JI_B^-(x(\cdot), y(\cdot))$, а первая коалиция минимизирует функционал $JI_B^+(x(\cdot), y(\cdot))$.

Введем следующие обозначения. Обратные связи, решающие, соответственно, задачу гарантированной максимизации функционалов выигрышей JI_A^-, JI_B^- обозначим $u_A^0 = u_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Заметим, что такие обратные связи представляют гарантированную максимизацию выигрышей коалиций в длительной перспективе, и могут называться «положительными». Через $u_B^0 = u_B^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_A^0 = v_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ обозначим обратные связи наиболее неблагоприятные для противоположных коалиций, а именно, те, которые минимизирует функционалы выигрышей JI_B^+, JI_A^+ противоположных коалиций. Назовем такие обратные связи «наказывающими».

Заметим, что негибкие решения отмеченных проблем могут быть получены в рамках классической теории биматричных игр. В самом деле, предположим для определенности (это предположение делается с иллюстративными целями, и не ограничивает общность решения), что выполнены следующие соотношения для параметров матриц A и B , соответствующие почти антагонистической структуре биматричной игры,

$$\begin{aligned}
C_A > 0, & \quad C_B < 0, \\
0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, & \quad 0 < x_B = \frac{\beta_2}{C_B} < 1, \\
0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} < 1, & \quad 0 < y_B = \frac{\beta_1}{C_B} < 1.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 5.1. Дифференциальные игры Γ_A^-, Γ_A^+ имеют равные значения

$$w_A^- = w_A^+ = w_A = \frac{D_A}{C_A},$$

и дифференциальные игры Γ_B^-, Γ_B^+ имеют равные значения

$$w_B^- = w_B^+ = w_B = \frac{D_B}{C_B}$$

для произвольного начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [1, 0]$. Эти значения, например, могут быть гарантированы «позитивными» обратными связями u_A^{cl}, v_B^{cl} соответствующими классическим решениям x_A, y_B

$$u_A^0 = u_A^{cl} = u_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_A < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_A, \\ [0, 1], & x = x_A. \end{cases}$$

$$v_B^0 = v_B^{cl} = v_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_B < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_B, \\ [0, 1], & y = y_B. \end{cases}$$

«Наказывающие» обратные связи определяются формулами

$$u_B^0 = u_B^{cl} = u_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_B < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_B, \\ [0, 1], & x = x_B, \end{cases}$$

$$v_A^0 = v_A^{cl} = v_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_A < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_A, \\ [0, 1], & y = y_A, \end{cases}$$

и соответствуют классическим статическим решениям x_B, y_A (5.1), которые генерируют статическое равновесие по Нэшу $NE = (x_B, y_A)$.

Доказательство этого утверждения можно получить прямой постановкой указанных стратегий в соответствующие функционалы выигрышей (4.1), (4.2).

Замечание 5.1. Значения функций выигрышей $g_A(x, y)$, $g_B(x, y)$ совпадают в точках (x_A, y_B) , (x_B, y_A)

$$g_A(x_A, y_B) = g_A(x_B, y_A) = w_A, \quad g_B(x_A, y_B) = g_B(x_B, y_A) = w_B.$$

Точка $NE = (x_B, y_A)$ есть «взаимно наказывающее» равновесие по Нэшу, а точка (x_A, y_B) не обладает равновесными свойствами в соответствующей статической игре.

6. Построение динамического равновесия по Нэшу

Построим пару обратных связей, которые составляют равновесие по Нэшу. Для этого соединим «позитивные» обратные связи u_A^0, v_B^0 и «наказывающие» обратные связи u_B^0, v_A^0 .

Выберем начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Выберем траекторию $(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^0(\cdot), v_B^0(\cdot))$, сгенерированную «позитивными» обратными связями $u_A^0 = u_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Возьмем $T_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} g_A(x^0(t), y^0(t)) &> J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ g_B(x^0(t), y^0(t)) &> J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ t &\in [T_\varepsilon, +\infty]. \end{aligned}$$

Обозначим через $u_A^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$, $v_B^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговую реализацию стратегий u_A^0, v_B^0 такую, что соответствующая пошаговая траектория $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^0(t), y^0(t)) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon.$$

Из результатов работы [4] вытекает следующее утверждение.

Предложение 6.1. *Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, соединяющая вместе «позитивные» обратные связи u_A^0, v_B^0 и «наказывающие» обратные связи u_B^0, v_A^0 в соответствии с соотношениями*

$$U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y), & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является динамическим ε -равновесием по Нэшу.

Ниже конструируются гибкие «позитивные» обратные связи, которые генерируют траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$, сводящие к «лучшим» положениям, чем негибкое динамическое равновесие $(x_B, y_A), (x_A, y_B)$ по обоим критериям $J_A^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_A, J_B^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_B$.

7. Двухшаговые задачи оптимального управления

Для построения «позитивных» обратных связей $u_A^0 = u_A^{fl}(x, y), v_B^0 = v_B^{fl}(x, y)$ рассмотрим в этом разделе вспомогательную двухшаговую задачу оптимального управления со среднеинтегральным функционалом выигрышей для первой коалиции в ситуации, когда действия второй коалиции наиболее неблагоприятны. А именно, проанализируем задачу оптимального управления для динамической системы (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u, & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &= -y + v, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

с функционалом выигрышей

$$J_A^f = \int_0^{T_f} g_A(x(t), y(t)) dt.$$

Здесь без ограничения общности считаем, что $t_0 = 0, T = T_f$, и терминальный момент времени $T_f = T_f(x_0, y_0)$ определим позднее.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что цена статической игры равна нулю, и выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} w_A &= \frac{D_A}{C_A} = 0, & C_A &> 0, \\ 0 < x_A &= \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, & 0 < y_A &= \frac{\alpha_1}{C_A} < 1. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Рассмотрим случай, когда начальные условия (x_0, y_0) системы (7.1) удовлетворяют соотношениям

$$x_0 = x_A, \quad y_0 > y_A. \quad (7.3)$$

Предположим, что действия второй коалиции наиболее неблагоприятны для первой коалиции. Для траекторий системы (7.1), стартующих из начальных положений (x_0, y_0) (7.3), эти действия $v_A^0 = v_A^{cl}(x, y)$ определяются соотношением

$$v_A^{cl}(x, y) \equiv 0.$$

В данной ситуации оптимальные действия $u_A^0 = u_A^{fl}(x, y)$ первой коалиции согласно функционалам выигрышей J_A^f могут быть представлены как двухшаговое импульсное управление: оно равняется единице от начального момента времени $t_0 = 0$ до момента оптимального переключения s и затем равняется нулю до конечного момента времени T_f

$$u_A^0(t) = u_A^{fl}(x(t), y(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_0 \leq t < s, \\ 0, & \text{если } s \leq t < T_f. \end{cases}$$

Здесь величина s является параметром оптимизации. Конечный момент времени T_f определяется из следующего условия. Траектория $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (7.1), стартующая с линии, на которой $x(t_0) = x_A$, возвращается на эту линию, когда $x(T_f) = x_A$.

Рассмотрим две совокупности характеристик. Первая описывается системой дифференциальных уравнений при значении управляющего параметра $u = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 1, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{7.4}$$

решения которой определяются формулой Коши

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0 - 1)e^{-t} + 1, \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь начальные положения (x_0, y_0) удовлетворяют условиям (7.3), и параметр времени t удовлетворяет неравенству $0 \leq t < s$.

Вторая совокупность характеристик задана системой дифференциальных уравнений при значении управляющего параметра $u = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -y, \end{aligned} \tag{7.6}$$

решения которой определяются формулой Коши

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 e^{-t}, \\ y(t) &= y_1 e^{-t}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь начальные положения $(x_1, y_1) = (x_1(s), y_1(s))$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s) = (x_0 - 1)e^{-s} + 1, \\ y_1 &= y_1(s) = y_0 e^{-s}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

и параметр времени t удовлетворяет неравенству $0 \leq t < p$. Здесь конечный момент времени $p = p(s)$ и конечное положение $(x_2, y_2) = (x_2(s), y_2(s))$ всей траектории $(x(\cdot), y(\cdot))$ заданы формулами

$$\begin{aligned} x_1 e^{-p} &= x_A, \quad p = p(s) = \ln \frac{x_1(s)}{x_A}, \\ x_2 &= x_A, \\ y_2 &= y_1 e^{-p}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такой момент времени s и соответствующую точку переключения $(x_1, y_1) = (x_1(s), y_1(s))$ на траектории $(x(\cdot), y(\cdot))$, при которой интеграл $I = I(s)$ достигает максимальной величины

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s) \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \int_0^s (C_A((x_0 - 1)e^{-t} + 1)y_0 e^{-t} - \\ &\quad \alpha_1((x_0 - 1)e^{-t} + 1) - \alpha_2 y_0 e^{-t} + a_{22}) dt \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \int_0^{p(s)} (C_A x_1(s) y_1(s) e^{-2t} - \\ &\quad \alpha_1 x_1(s) e^{-t} - \alpha_2 y_1(s) e^{-t} + a_{22}) dt \end{aligned} \quad (7.12)$$

На рис. 1 показаны начальное положение IP , выбранное на прямой $x = x_A$ при $y > y_A$, характеристика CH , ориентированная на вершину квадрата $(1, 0)$, характеристики CH_1, CH_2, CH_3 , ориентированные на вершину квадрата $(0, 0)$, точки переключения SP_1, SP_2, SP_3 движения по характеристикам и конечные точки движения FP_1, FP_2, FP_3 , расположенные на прямой $x = x_A$.

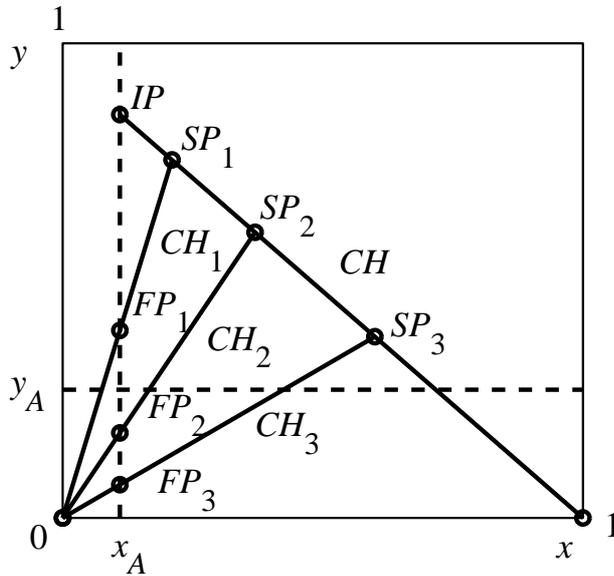


Рисунок 1. Семейства характеристик и точки переключения в двухшаговой задаче оптимального управления

8. Решение двухшаговой задачи оптимального управления

Получим решение двухшаговой задачи оптимального управления (7.4)-(7.12), вычислив производную dI/ds , представив ее как функцию оптимальных точек переключения $(x, y) = (x_1, y_1)$, приравняв эту производную к нулю $dI/ds = 0$ и найдя уравнение $F(x, y) = 0$ для кривой, состоящей из оптимальных точек переключения (x, y) .

В начале вычислим интегралы I_1, I_2

$$I_1 = I_1(s) = C_A(x_0 - 1)y_0 \frac{(1 - e^{-2s})}{2} + C_A y_0 (1 - e^{-s}) - \alpha_1((x_0 - 1)(1 - e^{-s}) + s) - \alpha_2 y_0 (1 - e^{-s}) + a_{22}s,$$

$$I_2 = I_2(s) = C_A x_1(s) y_1(s) \frac{(1 - e^{-2p(s)})}{2} - \alpha_1 x_1(s) (1 - e^{-p(s)}) - \alpha_2 y_1(s) (1 - e^{-p(s)}) + a_{22}p(s).$$

Вычислим производные dI_1/ds , dI_2/ds и представим их как функции оптимальных точек переключения $(x, y) = (x_1, y_1)$

$$\begin{aligned}\frac{dI_1}{ds} &= C_A(x_0 - 1)y_0e^{-2s} + C_Ay_0e^{-s} - \\ &\alpha_1((x_0 - 1)e^{-s} + 1) - \alpha_2y_0e^{-s} + a_{22} = \\ &C_Axy - \alpha_1x - \alpha_2y + a_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_2}{ds} &= C_A\left(\frac{dx}{ds}y\frac{(1 - e^{-2p})}{2} + \right. \\ &x\frac{dy}{ds}\frac{(1 - e^{-2p})}{2} + xy e^{-2p}\frac{dp}{ds}) - \\ &\alpha_1\frac{dx}{ds}(1 - e^{-p}) - \alpha_1x e^{-p}\frac{dp}{ds} - \\ &\alpha_2\frac{dy}{ds}(1 - e^{-p}) - \alpha_2y e^{-p}\frac{dp}{ds} + a_{22}\frac{dp}{ds} = \\ &(C_A^2x^2y - \alpha_2^2y - 2C_A^2x^3y - \\ &2\alpha_1C_Ax^2 + 2\alpha_1C_Ax^3 + 2\alpha_2C_Ax^2y + \\ &2C_Aa_{22}x - 2C_Aa_{22}x^2)/(2C_Ax^2).\end{aligned}$$

Из последнего уравнения примем во внимание следующие выражения для производных dx/ds , dy/ds , dp/ds и экспонент e^{-p} , e^{-2p} , $(1 - e^{-p})$, $(1 - e^{-2p})$ как функций переменных (x, y)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= 1 - x, \\ \frac{dy}{ds} &= -y, \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{1 - x}{x}, \\ e^{-p} &= \frac{\alpha_2}{C_Ax}, \\ e^{-2p} &= \frac{\alpha_2^2}{C_A^2x^2}, \\ 1 - e^{-p} &= \frac{C_Ax - \alpha_2}{C_Ax}, \\ 1 - e^{-2p} &= \frac{C_A^2x^2 - \alpha_2^2}{C_A^2x^2}.\end{aligned}$$

Равновесные траектории для среднеинтегральных выигрышей 73

Суммируя производные dI_1/ds , dI_2/ds , приведем выражение к общему знаменателю и, приравняв сумму к нулю, получим следующее уравнение для линии переключения

$$\frac{C_A^2 x^2 y - 2\alpha_1 C_A x^2 - \alpha_2^2 y + 2C_A a_{22} x}{2C_A x^2} = 0.$$

Принимая во внимание тот факт, что $w_A = 0$ (см. (7.2)), получим конечное выражение для линии переключения M_A^1

$$y = \frac{2\alpha_1 x}{C_A x + \alpha_2}.$$

Кривая M_A^1 является гиперболой, которая проходит через точки $(0, 0)$, (x_A, y_A) и имеет горизонтальную асимптоту

$$y = \frac{2\alpha_1}{C_A}.$$

Для того, чтобы построить законченную кривую переключения M_A для оптимальной стратегии первой коалиции в игре со среднеинтегральными выигрышами в случае $C_A > 0$, следует добавить к кривой M_A^1 подобную кривую M_A^2 в области, где $y \leq y_A$

$$\begin{aligned} M_A &= M_A^1 \cup M_A^2, & (8.1) \\ M_A^1 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{2\alpha_1 x}{C_A x + \alpha_2}, y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\ M_A^2 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \right. \\ &\quad \left. y = -\frac{2(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{C_A(1 - x) + (C_A - \alpha_2)} + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}. \end{aligned}$$

В случае, когда $C_A < 0$, кривые M_A , M_A^1 и M_A^2 описываются формулами

$$\begin{aligned} M_A &= M_A^1 \cup M_A^2, & (8.2) \\ M_A^1 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{2\alpha_1(1 - x)}{C_A(1 - x) + (C_A - \alpha_2)}, y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \\ M_A^2 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{2(C_A - \alpha_1)x}{C_A x + \alpha_2} + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}. \end{aligned}$$

Кривая M_A делит единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на две части: верхнюю часть

$$D_A^u \supset \{(x, y) : x = x_A, y > y_A\}$$

и нижнюю часть

$$D_A^l \supset \{(x, y) : x = x_A, y < y_A\}.$$

«Позитивная» обратная связь u_A^{fl} имеет следующую структуру

$$u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, -\operatorname{sgn}(C_A)\}, & \text{если } (x, y) \in D_A^u, \\ \max\{0, \operatorname{sgn}(C_A)\}, & \text{если } (x, y) \in D_A^l, \\ [0, 1], & \text{если } (x, y) \in M_A. \end{cases} \quad (8.3)$$

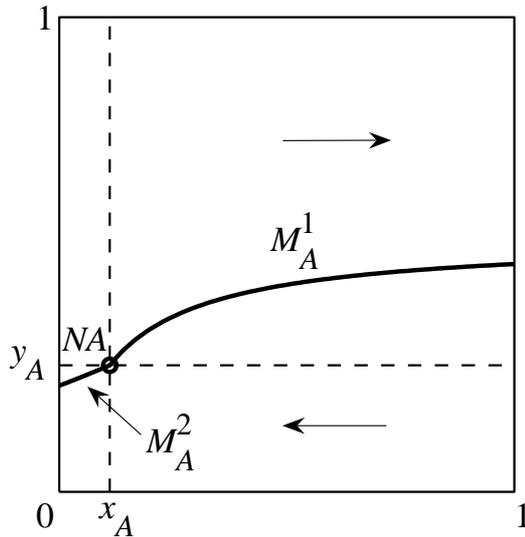


Рисунок 2. Кривая переключения для игроков первой коалиции в задаче со среднеинтегральным функционалом выигрышей

На рис. 2 показаны кривые переключения M_A^1 , M_A^2 для игроков первой коалиции. Направления скоростей \dot{x} изображены горизонтальными (левыми и правыми) стрелками.

Равновесные траектории для среднеинтегральных выигрышей 75

Для второй коалиции можно получить подобные кривые переключения M_B для задачи оптимального управления со среднеинтегральным функционалом, отвечающим матрице B . Более точно, в случае когда $C_B > 0$, кривая переключения M_B задается соотношениями

$$\begin{aligned} M_B &= M_B^1 \cup M_B^2, & (8.4) \\ M_B^1 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\beta_1 x}{2\beta_2 - C_B x}, x \geq \frac{\beta_2}{C_B} \right\}, \\ M_B^2 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \right. \\ &\quad \left. y = -\frac{(C_B - \beta_1)(1 - x)}{2(C_B - \beta_2) - C_B(1 - x)} + 1, x \leq \frac{\beta_2}{C_B} \right\}. \end{aligned}$$

В случае, когда параметр C_B отрицателен $C_B < 0$, кривые M_B , M_B^1 и M_B^2 определяются формулами

$$\begin{aligned} M_B &= M_B^1 \cup M_B^2, & (8.5) \\ M_B^1 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_B - \beta_1)x}{2\beta_2 - C_B x} + 1, x \geq \frac{\beta_2}{C_B} \right\}, \\ M_B^2 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \right. \\ &\quad \left. y = \frac{\beta_1(1 - x)}{2(C_B - \beta_2) - C_B(1 - x)}, x \leq \frac{\beta_2}{C_B} \right\}. \end{aligned}$$

Кривая M_B делит единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на две части: левую часть

$$D_B^l \supset \{(x, y) : x < x_B, y = y_B\}$$

и правую часть

$$D_B^r \supset \{(x, y) : x > x_B, y = y_B\}.$$

«Позитивная» обратная связь v_B^{fl} имеет следующую структуру

$$v_B^{fl} = v_B^{fl}(x, y) = \begin{cases} \max\{0, -\operatorname{sgn}(C_B)\}, & \text{если } (x, y) \in D_B^l, \\ \max\{0, \operatorname{sgn}(C_B)\}, & \text{если } (x, y) \in D_B^r, \\ [0, 1], & \text{если } (x, y) \in M_B. \end{cases} \quad (8.6)$$

9. Гарантированные значения среднеинтегральных выигрышей

Сформулируем утверждение, которое подтверждает, что «позитивное» оптимальное управление по принципу обратной связи $u_A^{fl}(x, y)$ (8.3) с кривой переключения M_A , определенной формулами (8.1), (8.2), гарантирует, что значение среднеинтегрального функционала выигрышей больше или равно, чем цена w_A (7.2) статической матричной игры.

Предложение 9.1. *Для любого начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и для любой траектории*

$$(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{fl}), \quad x^{fl}(t_0) = x_0, \quad y^{fl}(t_0) = y_0, \quad t_0 = 0,$$

сгенерированной оптимальным управлением по принципу обратной связи $u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y)$ существует конечный момент времени $t_ \in [0, T_A]$ такой, что в этот момент времени траектория $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$ достигает линии, где $x = x_A$, то есть $x^{fl}(t_*) = x_A$. Тогда, в соответствии с конструкцией оптимального управления, максимизирующего интеграл (7.10) по принципу обратной связи u_A^{fl} , справедлива следующая оценка*

$$\int_{t_*}^T g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) dt \geq w_A(T - t_*), \quad \forall T \geq t_*. \quad (9.1)$$

В частности, это неравенство остается в силе, когда время T стремится к бесконечности

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(T - t_*)} \int_{t_*}^T g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) dt \geq w_A. \quad (9.2)$$

Неравенства (9.1), (9.2) означают, что значение среднеинтегрального функционала не хуже, чем цена w_A (7.2) статической матричной игры.

Аналогичный результат справедлив для траекторий, которые генерируются оптимальным управлением v_B^{fl} (8.6), соответствующим кривой переключения M_B (8.4), (8.5).

Замечание 9.1. Рассмотрим приемлемую траекторию $(x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$, которая генерируется «позитивными» обратными связями u_A^{fl} (8.3),

Равновесные траектории для среднеинтегральных выигрышей 77

v_B^{fl} (8.6). Тогда, в соответствии с предложением 9.1. имеют место следующие неравенства

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(T - t_*)} \int_{t_*}^T g_A(x_{AB}^{fl}(t), y_{fl}^{ds}(t)) dt \geq w_A,$$

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(T - t_*)} \int_{t_*}^T g_A(x_{AB}^{fl}(t), y_{AB}^{fl}(t)) dt \geq w_B,$$

и, следовательно, приемлемая траектория $(x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$ обеспечивает лучший результат для обеих коалиций, чем траектории, сходящиеся к точкам статического равновесия по Нэшу, в которых соответствующие выигрыши равны величинам w_A и w_B .

10. Равновесные траектории в игре со среднеинтегральными выигрышами

Рассмотрим для примера матрицы выигрышей игроков двух коалиций на финансовом рынке, которые отражают данные по исследованным рынкам акций [31] и облигаций [32] в США. Матрица A соответствует поведению торговцев, которые играют на повышение курса и называются «быками». Матрица B соответствует поведению торговцев, которые играют на понижение курса и называются «медведями». Параметры матриц означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (10.1)$$

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 10 - 0 - 1.75 + 3 = 11.25,$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12} = 3 - 0 = 3, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21} = 3 - 1.75 = 1.25,$$

$$x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} = \frac{1.25}{11.25} = 0.11, \quad y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} = \frac{3}{11.25} = 0.27,$$

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -5 - 3 - 10 + 0.5 = -17.5,$$

$$\beta_1 = b_{22} - b_{12} = 0.5 - 3 = -2.5, \quad \beta_2 = b_{22} - b_{21} = 0.5 - 10 = -9.5,$$

$$x_B = \frac{\beta_2}{C_B} = \frac{-9.5}{-17.5} = 0.54, \quad y_B = \frac{\beta_1}{C_B} = \frac{-2.5}{-17.5} = 0.14.$$

Число $a_{11} = 10$ в матрице A означает десятипроцентную доходность игроков первой коалиции «быков» при вложении в рынок акций в условиях того, что игроки второй коалиции «медведей» также вкладываются в акции. Число $a_{12} = 0$ соответствует нулевой доходности игроков первой коалиции «быков» от рынка акций при условии, что игроки второй коалиции «медведей» уходят с рынка акций в рынок облигаций. Число $a_{21} = 1.75$ обозначает доходность в 1.75% «быков» от облигаций, если «медведи» вкладываются в акции. Число $a_{22} = 3$ обозначает трехпроцентную доходность «быков» от облигаций при условии, что «медведи» также переходят в рынок облигаций. Коэффициенты матрицы B аналогично задают доходности инвестиций в акции и облигации коалиции «медведей», инвестиционные стратегии которых определяются столбцами матрицы B ,

Таким образом, получается, что игроки коалиции «быков» зарабатывают в случае роста доходности рынков, когда игроки обеих коалиций вкладываются в один и тот же рынок. А игроки коалиции «медведей» получают доход от инвестиций в случае падения рынков, когда игроки коалиции «быков» переходят с одного рынка на другой.

Для игры коалиции «быков» и «медведей» построены кривые переключения M_A , M_B и проведены расчеты равновесных траекторий динамики рынка.

На рис. 3. представлены указанные расчеты, показаны седловые точки NA , NB в статических антагонистических играх, точка равновесия по Нэшу NE в статической биматричной игре, линии переключения управлений игроков $M_A = M_A^1 \cup M_A^2$ и $M_B = M_B^1 \cup M_B^2$ в динамической биматричной игре со среднеинтегральными выигрышами для матриц A , B (10.1). Стрелками указано поле скоростей игроков коалиций: если точка (x, y) находится выше кривой M_A , то скорость движения первой коалиции направлена слева направо; если эта точка находится ниже кривой M_A , то направление движения происходит справа налево; если точка (x, y) находится слева от кривой M_B , то движение игроков второй коалиции производится снизу вверх; если точка (x, y) расположена справа от кривой M_B , то скорость движения второй коалиции направлена сверху вниз. Поле направлений порождает равновесные траектории, одна из которых

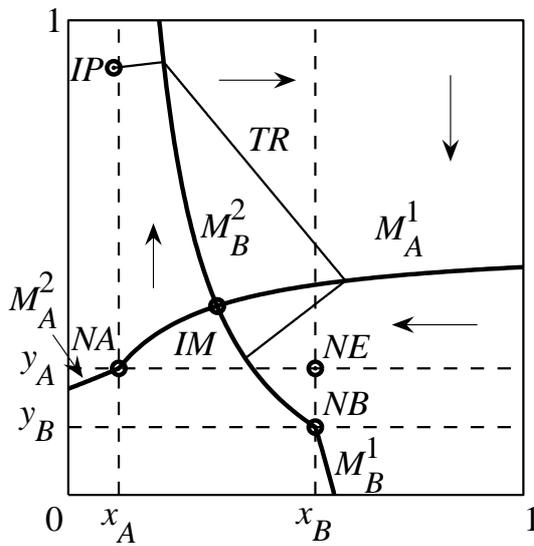


Рисунок 3. Равновесная траектория в игре со среднеинтегральными выигрышами

представлена на рисунке.

Траектория $TR = (x_{AB}^{fl}(\cdot), y_{AB}^{fl}(\cdot))$ стартует из начального положения $IP = (0.1, 0.9)$ и движется по характеристике в направлении угла $(1, 1)$ единичного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ с управляющими сигналами $u = 1, v = 1$. Затем она пересекает линию переключения M_B , и вторая коалиция переключает управление v с 1 на 0. Далее, траектория TR движется в направлении угла $(1, 0)$ до тех пор, пока не встречается с линией переключения M_A . Здесь игроки первой коалиции меняют управляющий сигнал u с 1 на 0. После этого движение траектории направлено по характеристике в угол $(0, 0)$. Затем траектория пересекает линию M_B , на которой возникает скользящий режим, в процессе которого происходит переключение управлений второй коалиции, и траектория TR сходится к точке $IM = M_A \cap M_B$ пересечения линий переключения M_A, M_B .

Напомним, что смена управлений игроками коалиций соответствует изменению поведения инвесторов и влечет перевод средств из рынка акций в рынок облигаций при переключении сигнала с единицы на ноль и, наоборот, перевод средств из рынка облигаций в рынок акций при переключении сигнала с нуля на единицу.

11. Сравнение равновесных траекторий для различных функционалов качества на бесконечном горизонте

В этом разделе приводится сравнение линий переключения оптимальных стратегий и равновесных траекторий для модели динамической биматричной игры с различными функционалами качества на бесконечном горизонте времени: среднеинтегральным функционалом, рассматриваемом в данной работе, и глобальным предельным функционалом из работы [6].

Такое сравнение представляет значительный интерес, поскольку среднеинтегральный функционал является в некотором смысле релаксацией жесткого подхода, задаваемого глобальным предельным функционалом. Эта возможность релаксации для среднеинтегрального функционала приводит к тому, что синтез управлений в динамической постановке сближается с синтезом в статической постановке, что означает сближение долгосрочных и краткосрочных интересов игроков.

Напомним, что в отличие от среднеинтегрального функционала выигрышей (4.1) глобальный предельный функционал задается следующими соотношениями, которые представляют собой долгосрочные значения выигрышей, например, для первого игрока,

$$\begin{aligned} J_A^\infty &= [J_A^-, J_A^+], \\ J_A^- &= J_A^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)), \\ J_A^+ &= J_A^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Синтез управлений для глобального предельного функционала описывается формулами

$$\begin{aligned} K_A &= K_A^1 \cup K_A^2, \\ K_A^1 &= \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x, y \geq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\}, \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$K_A^2 = \left\{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]: \right. \\ \left. y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A} \right\},$$

которые существенно отличаются от кривых переключения M_A (8.1) для первой коалиции в игре со среднеинтегральными функционалами.

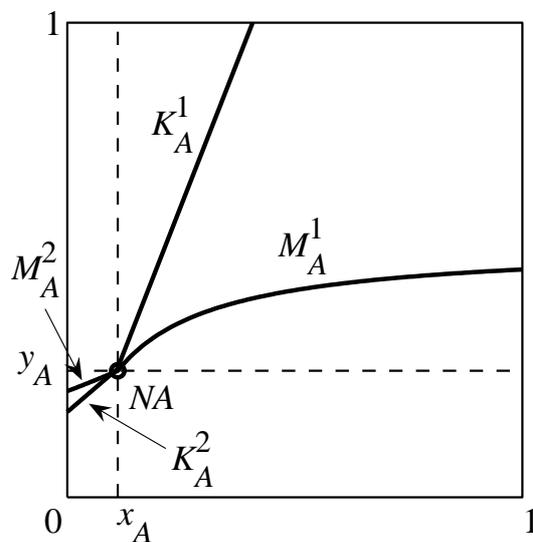


Рисунок 4. Линии переключения K_A и M_A управлений игроков первой коалиции в игре с глобальным предельным функционалом и игре со среднеинтегральным функционалом

На рис. 4 изображены линии переключения $K_A = K_A^1 \cup K_A^2$ и $M_A = M_A^1 \cup M_A^2$ управлений игроков первой коалиции в игре с глобальным предельным функционалом и игре со среднеинтегральным функционалом, соответственно. Кривая M_A^1 расположена ниже линии K_A^1 и касается ее в седловой точке NA . Кривая M_A^2 расположена выше линии K_A^2 и касается ее в седловой точке NA .

Такая конфигурация линий переключения K_A и M_A соответствует идеологии сближения краткосрочных интересов, задаваемых значениями статической функции выигрышей $g_A(x, y)$, с долгосрочными интересами в динамической игре при переходе от глобальных предельных функционалов к среднеинтегральным функционалам. Более точно, поле направлений для краткосрочных интересов задается движением слева направо в области $y > y_A$, и движением справа налево в области $y < y_A$. При этом, поле направлений для долгосрочных интересов, задаваемых линией K_A для глобального предельного функционала, вступает в противоречие с полем направлений для краткосрочных интересов, например, в области, лежащей ниже линии K_A^1 при $y > y_A$, и в области, лежащей выше линии K_A^2 при $y < y_A$. Следует отметить, что кривая переключения M_A для среднеинтегрального функционала существенно сужает области противоречий между краткосрочными и долгосрочными интересами игроков, так как это противоречие возникает, в более узкой области, лежащей ниже линии M_A^1 при $y > y_A$, и в области, лежащей выше линии M_A^2 при $y < y_A$.

На рис. 5 представлено поле направлений движения игроков первой коалиции для краткосрочного функционала выигрышей, задаваемого функцией $g_A(x, y)$ (3.1).

На рис. 6 изображено поле направлений движения игроков первой коалиции для долгосрочных выигрышей первого типа, задаваемого глобальным предельным функционалом J_A^∞ (11.1) и линией переключения направлений K_A (11.2).

На рис. 7 показано поле направлений движения игроков первой коалиции для долгосрочных выигрышей второго типа, задаваемого среднеинтегральным функционалом JI_A^∞ (4.1) и кривой переключения направлений M_A (8.1).

На рис. 6, 7 заштрихованные участки изображают области противоречий в движении игроков первой коалиции между краткосрочными и долгосрочными интересами первого и второго типа, соответственно. Видно, что область противоречия на рис. 7 между краткосрочными интересами и долгосрочными интересами второго типа гораздо меньше, чем область противоречий на рис. 6 между краткосрочными интересами и долгосрочными интересами первого типа. Таким образом, переход от глобальных предельных функционалов

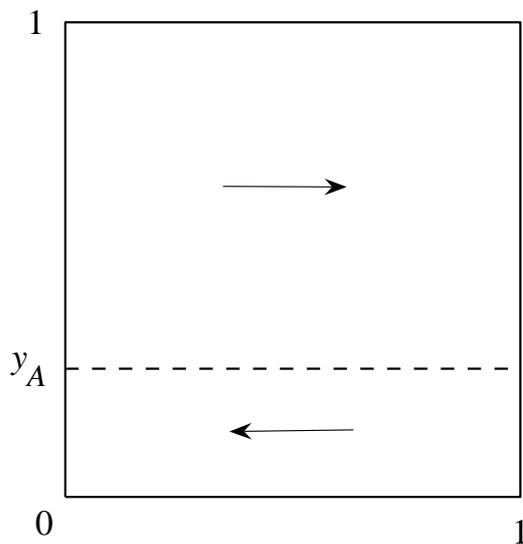


Рисунок 5. Поле направлений движения игроков первой коалиции для краткосрочных интересов

к среднеинтегральным функционалам существенно сужает область противоречий по отношению к краткосрочным интересам.

В заключение приведем сравнение значений функционалов выигрышей на равновесных траекториях, порождаемых линиями переключения K_A , K_B и кривыми переключения M_A , M_B в играх с долгосрочными интересами первого и второго типа.

На рис. 8 представлена равновесная траектория TR , порожденная линиями переключения K_A , K_B для долгосрочных интересов первого типа, которые задаются глобальными предельными функционалами. Эта траектория начинается в начальной точке $IP = (0.1, 0.9)$ и заканчивает свое движение скользящим режимом вдоль линии переключения K_A в точке пересечения IK линий переключения K_A и K_B .

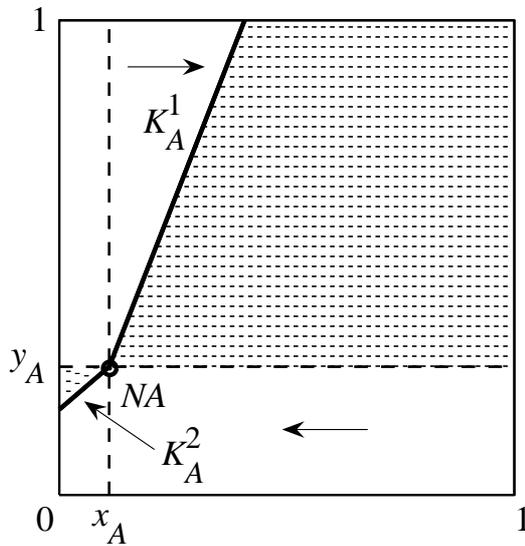


Рисунок 6. Поле направлений движения игроков первой коалиции для долгосрочных интересов, задаваемых глобальным предельным функционалом

Значения глобальных предельных функционалов выигрышей в виде процентных ставок доходности в точке IK определяются величинами:

$$J_A^\infty = g_A(x_{IK}, y_{IK}) = 2.7, \quad J_B^\infty = g_B(x_{IK}, y_{IK}) = 2.9.$$

Напомним, что равновесная траектория, порожденная кривыми переключения M_A, M_B , приведена на рис. 3. Эта равновесная траектория сходится к пересечению IM кривых переключения M_A, M_B . Значения среднеинтегральных функционалов выигрышей в виде процентных ставок доходности в этой точке равны:

$$JI_A^\infty = g_A(x_{IM}, y_{IM}) = 3.0, \quad JI_B^\infty = g_B(x_{IM}, y_{IM}) = 2.8.$$

Согласно теории значения долгосрочных выигрышей первого и второго типа в точках пересечения IK и IM выше по обоим критериям, чем в статической точке равновесия по Нэшу NE , а также на

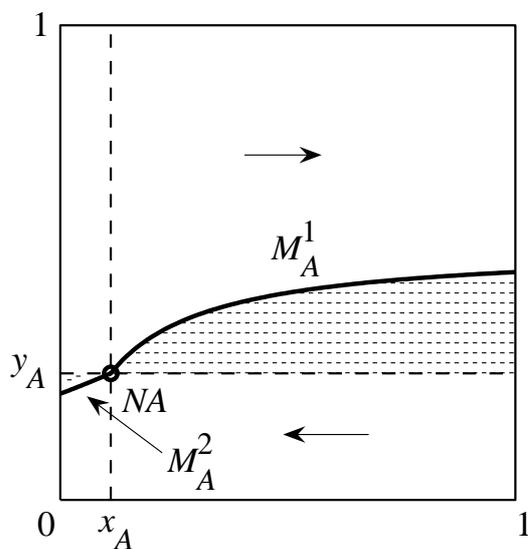


Рисунок 7. Поле направлений движения игроков первой коалиции для долгосрочных интересов, задаваемых среднеинтегральным функционалом

траекториях репликаторной динамики из теории эволюционных игр [27]:

$$g_A(x_{NE}, y_{NE}) = 2.7, \quad g_B(x_{NE}, y_{NE}) = 1.9.$$

Сравнивая значения функционалов выигрышей обеих коалиций в точках IK и IM , можно сказать, что полное доминирование одной над другой отсутствует. Однако, по значению среднеарифметической ставки точка IM для среднеинтегральных показателей доминирует точку IK для глобальных предельных функционалов. Средняя ставка в точке IM равна $AM = (3 + 2.8)/2 = 2.9$, что строго больше значения средней ставки в точке IK равного $AK = (2.7 + 2.9)/2 = 2.8$. Средняя ставка в статической точке Нэша NE много меньше значений средних ставок в точках IK и IM и равна $AN = (2.7 + 1.9)/2 = 2.3$.

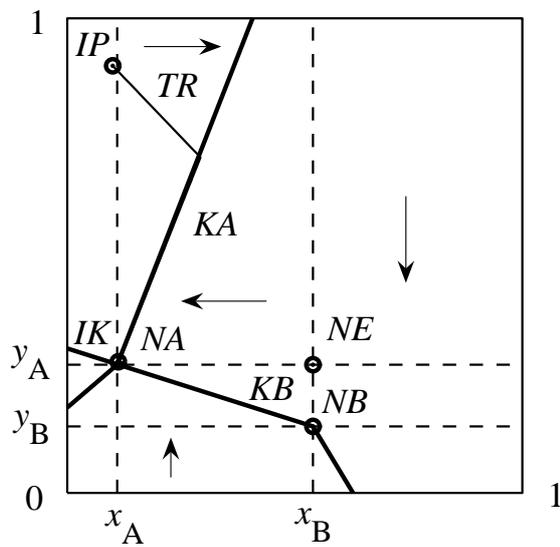


Рисунок 8. Равновесная траектория в игре с глобальными предельными выигрышами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. *Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах* // Функциональный анализ и его приложения. 2002. Т. 36. Вып. 2. С. 1-11.
2. Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. М.: Наука, 1985.
3. Давыдов А.А., Мена Матош Е. *Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда* // Математический сборник. 2007. Т. 198. № 1. С. 21–42.
4. Клейменов А.Ф. *Неантагонистические позиционные дифференциальные игры*. Екатеринбург: Наука, 1993.
5. Колмогоров А.Н. *Об аналитических методах в теории вероятностей* // Успехи математических наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.

6. Красовский Н.А., Кряжимский А.В., Тарасьев А.М. *Уравнения Гамильтона–Якоби в эволюционных играх* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 114–131.
7. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. *Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 167–182.
8. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. *Декомпозиционный алгоритм поиска равновесия в динамической игре* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. № 4. С. 49–88.
9. Красовский Н.А., Тарасьев А.М. *Равновесные решения в динамических играх*. Екатеринбург: УрГАУ, 2015.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
11. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. *О дифференциально-эволюционных играх* // Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
12. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности*. М.: Наука, 1977.
13. Мазалов В.В., Ретгиева А.Н. *Асимметрия в кооперативной задаче управления биоресурсами* // Управление большими системами. 2015. Вып. 55. С. 280–325.
14. Мазалов В.В., Токарева Ю.С. *Равновесие в задаче о сделках с неравномерным распределением резервных цен* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. № 2. С. 37–49.
15. Петросян Л.А., Захаров В.В. *Математические модели в экологии*. СПб: СПбГУ, 1997.
16. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. *Принципы устойчивой кооперации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. № 1. С. 106–123.

17. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М: Наука, 1969.
18. Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби*. М.: Наука, 1991.
19. Субботин А.И., Тарасьев А.М. *Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры* // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559–564.
20. Субботина Н.Н. *Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана* // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 556–561.
21. Ушаков В.Н. *К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
22. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. *Методы негладкого анализа при построении аппроксимаций решений дифференциальных игр и задач управления* // Вестник СПбГУ. Серия «Математика, механика, астрономия». 2013. Сер. 10. Вып. 3. С. 157–167.
23. Aubin J.-P. *A Survey of Viability Theory* // SIAM Journal on Control and Optimization. 1990. Vol. 28, No. 4, P. 749–788.
24. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. London: Academic Press, 1982.
25. Crandall M.G., Lions P.-L. *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations* // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 277, No. 1. Pp. 1–42.
26. Friedman D. *Evolutionary Games in Economics* // Econometrica. 1991. Vol. 59, No. 3. Pp. 637–666.
27. Hofbauer J., Sigmund K. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

28. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory*, New York: Prentice-Hall, 1971.
29. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control Under Lack of Information*. Boston: Birkhauser, 1995.
30. Tarasyev A.M. *A Differential Model for a 2×2 Evolutionary Game Dynamics* // IIASA Working Paper, Laxenburg, Austria. 1994. WP-94-63.
31. CNN Money [e-resource]. URL: <http://money.cnn.com/>.
32. Рынок Форекс [Электронный ресурс]: Графики доходности облигаций. URL: <http://www.fxstreet.ru.com/charts/bond-yield/>.

EQUILIBRIUM TRAJECTORIES IN DYNAMICAL BIMATRIX GAMES WITH AVERAGE INTEGRAL PAYOFF FUNCTIONALS

Nikolay A. Krasovskii, Ural State Agrarian University, Cand.Sc.
(nkrasovskiy@gmail.com).

Alexander M. Tarasyev, Krasovskii Institute of Mathematics and
Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Dr.Sc.,
Senior Research Scholar (tam@imm.uran.ru).

Abstract: Models of evolutionary nonzero-sum games are considered on the infinite time interval. Methods of differential games theory are used for the analysis of game interactions between two groups of participants. It is assumed, that participants in groups are subject to control through signals for the behavior change. Payoffs of coalitions are determined as average integral functionals on the infinite horizon. The problem of constructing a dynamical Nash equilibrium is posed for the considered evolutionary game. Ideas and approaches of non-antagonistic differential games are applied for the determination of the Nash equilibrium solutions. The results are based on dynamic constructions and methods of evolutionary games. The great attention is paid to the formation of the dynamical Nash equilibrium with players strategies, that maximize the corresponding payoff functions and have the guaranteed properties according to the minimax approach. The application of the minimax approach for constructing optimal control strategies synthesizes trajectories of the dynamical Nash equilibrium that provide better results in comparison to static solutions and evolutionary models with the replicator dynamics. The dynamical Nash equilibrium trajectories for evolutionary games with the average integral quality functionals are compared with trajectories for evolutionary games based on the global terminal quality functionals on the infinite horizon.

Keywords: dynamical bimatrix games, average integral payoffs, characteristics of Hamilton-Jacobi equations, equilibrium trajectories.